Интерполяционные формулы

Пусть точка x лежит в окрестности середины интервала содержащего $2n+1$ равноотстоящих с шагом h узла интерполирования

$$x_{-n} < x_{-(n-1)} < \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

- Для интерполирования функции $f(x)$ в этой точке можно использовать первой ($x_0<x$) или второй ($x_0>x$) интерполяционными формулами Гаусса.

- Обозначим $q = \dfrac{x - x_0}{h}$

- Первая интерполяционная формула Гаусса имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} +$$

$$+ \frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

- Вторая интерполяционная формула Гаусса имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} +$$

$$+ \frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\ldots(q-n)$$

- **Формула Стирлинга** представляет собой среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса:

$$P_n(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots(q^2-(n+1)^2)}{(2n)!}\cdot$$

$$\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots(q^2-(n+1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

$$R_n(x) \approx h^{2n+1} \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)\ldots(q^2 - n^2)$$

- **Формула Бесселя** имеет вид:

$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + (q - 1/2)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+\frac{(q-1/2)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+\frac{(q-1/2)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}$$

$$R_n(x) \approx h^{2n+1} \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q^2 - 1^2)\ldots(q^2 - n^2)(q - n - 1)$$

- Формула Стирлинга применяется для интерполирования при значениях q, близких к 0. на практике ее используют при $|q| \leq 0,25$

Формула Бесселя используется для интерполирования при значениях q, близких к 0,5.

Практически она используется при $0.25 \le q \le 0.75$

- В том случае, когда $q = 0.5$, формула Бесселя может быть переписана в виде:

$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3}{128} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1))^2}{2^{2n}(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2}.$$

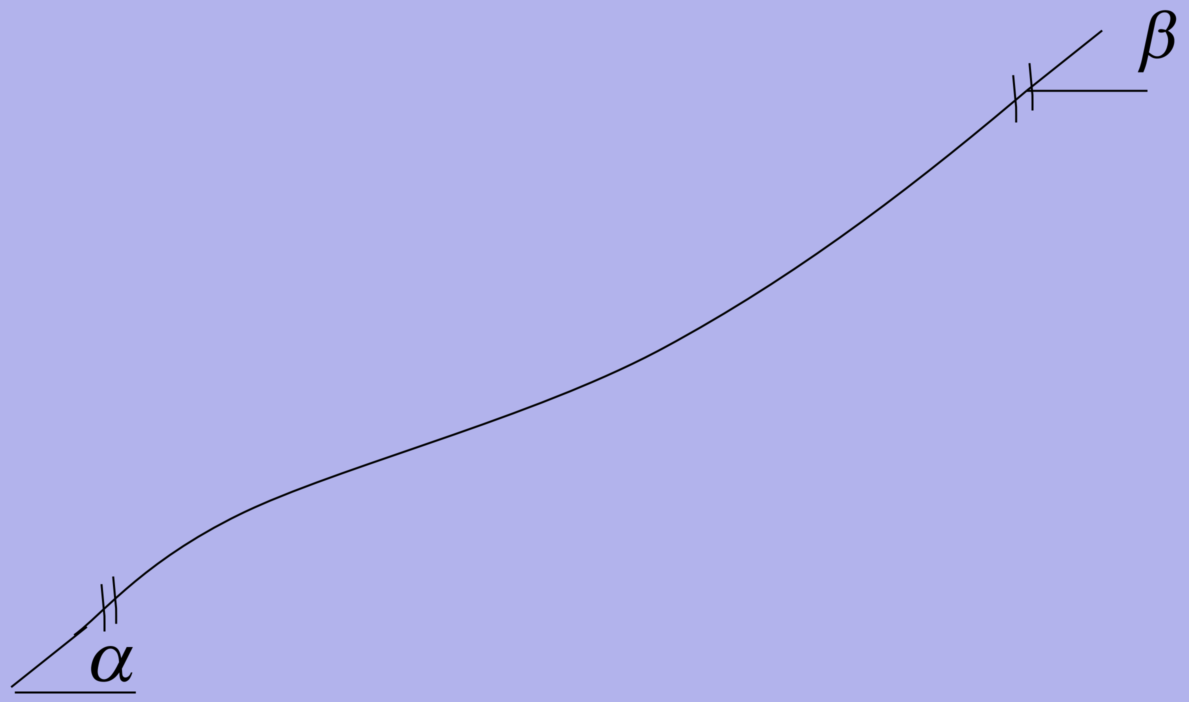
- **формула интерполирования на середину**.

$$R_n(x) \approx (-1)^{n+1} h^{2n+2} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1))^2}{2^{2n+2}(2n+2)!}$$

- **Сплайны.**

- **кубические сплайн-функции** — это специальным образом построенные многочлены третьей степени.

- Они представляют собой некоторую математическую модель гибкого тонкого стержня.
- Если закрепить его в двух соседних узлах интерполяции с заданными углами наклонов, то между точками закрепления этот стержень примет некоторую форму.



α
β

- Пусть форма этого стержня определяется функцией

$$y = S(x)$$

- между каждой парой соседних узлов интерполяции функция $S(x)$ является многочленом степени не выше третьей.

- Запишем ее в виде

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i$$

- Для определения коэффициентов на всех элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений.

$$S_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1},$$

$$S_i(x_i) = a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 = y_i, \quad (h_i = x_i - x_{i-1})$$

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}),$$