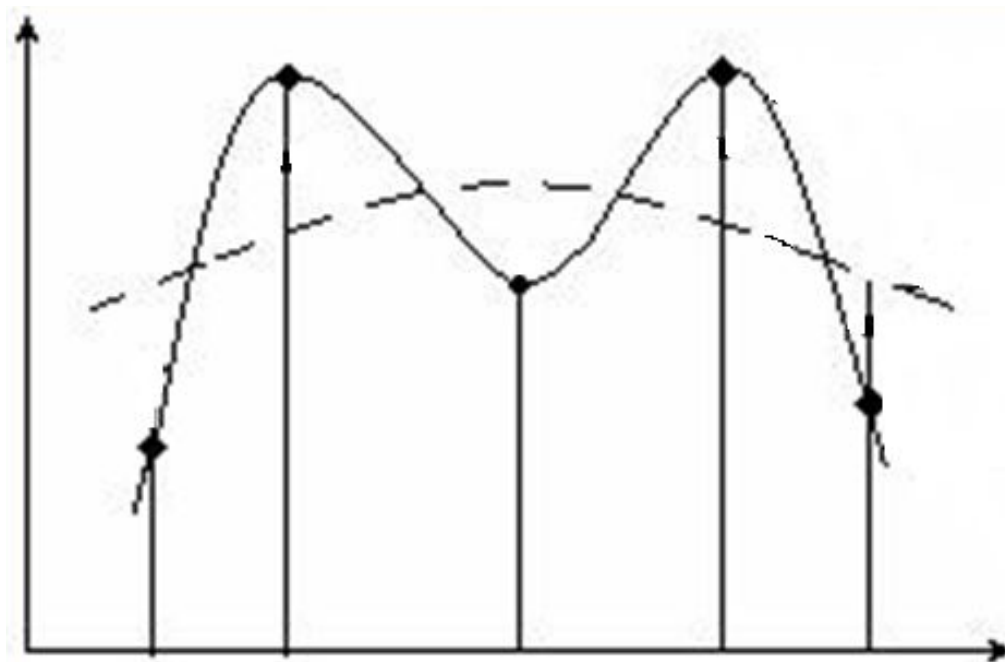


# Интерполяция функций



Интерполяция - это вычисление значений  $y(x)$  во всей области определения аргумента по заданному дискретному множеству точек, т.е. переход от дискретной функции к непрерывной.

локальная

глобальная



линейная

параболическая

кубическая  
парабола

полином

кубический

степени  $(N-1)$

сплайн

$x_0, x_1, \dots, x_n$  - узлы интерполяции

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|-----|-------|-------|
| 0   | $x_0$ | $y_0$ |
| 1   | $x_1$ | $y_1$ |
| .   | .     | .     |
| .   | .     | .     |
| .   | .     | .     |
| $n$ | $x_n$ | $y_n$ |

Задача интерполирования: найти значение функции в точке  $x_k$ , принадлежащей отрезку  $[x_0; x_n]$ , но при этом  $x_k$  не совпадает ни с одним узлом интерполяции ( $x_k$  не равно  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .)

## *Линейная интерполяция.*

Линейная интерполяция - строится ломаная, которая проходит через точки  $(X_i; Y_i)$ ,  $i=0,1,2,\dots,n$ , т.е. совпадающая с искомой функцией в узлах интерполирования и линейная на каждом участке  $(X_i; X_{i+1})$  при  $i=0,1,2,\dots,n-1$ .

Очевидно, что при  $X_i \leq X \leq X_{i+1}$  значения функции будут вычисляться по формуле:

$$\phi(X) = Y_i + (X - X_i) (Y_{i+1} - Y_i) / (X_{i+1} - X_i).$$

# Параболическая интерполяция

Пусть искомая функция полиномом:

$$y(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

Потребуем, чтобы он проходил через заданные точки

$$y(x_k) = a_0 + a_1x_k^1 + a_2x_k^2 + \dots + a_{n-1}x_k^{n-1}$$

**Задача.** Задана дискретная функция  $y(x_k) = y_k$ .

$k$     1    2    3    4

$x_k$    0    1    2    3

$y_k$    0    3    5    4

Полином  $y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ , степень полинома = 3 ( $N = 4$ ),  $y(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ;

Составляем систему линейных уравнений и решаем ее любым методом:

$$a_0 + a_1 0^1 + a_2 0^2 + a_3 0^3 = 0$$

$$a_0 + a_1 1^1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 = 3$$

$$a_0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + a_3 2^3 = 5$$

$$a_0 + a_1 3^1 + a_2 3^2 + a_3 3^3 = 4$$

Для решения методом Крамера вычисляется определитель Вандермонда:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 27 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 27 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 27 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 27 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 27 - 9 \cdot 8 - 2 \cdot 27 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 12 \end{aligned}$$



Для коэффициентов полинома имеем

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{\Delta_1}{W}, \dots, a_n = \frac{\Delta_n}{W}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 34, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 27 \end{vmatrix} = 6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

$$a_1 = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}, a_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Получим следующий интерполирующий полином:

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{6}x$$

# Интерполяционный полином Лагранжа

Полином степени  $N-1$ , проходящий через  $N$  точек.

Требует большого объема вычислений.

Если узлы полинома равноотстоящие – вычисления упрощаются.

При изменении количества точек – полиномы  $L$  рассчитываются заново

$$L_j(x_k) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_N)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_N)}$$

### Интерполяция методом Лагранжа.

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $k$   | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_k$ | 0 | 3 | 5 | 4 |

$$y(x) = \sum_{j=1}^N y_j L_j(x), \quad N=4 \quad y(x) = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 + y_4 L_4 = 0 \cdot L_1 + 3 \cdot L_2 + 5 \cdot L_3 + 4 \cdot L_4.$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^N y_j L_j(x) : N=4 \quad y(x) = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 + y_4 L_4 = 0 \cdot L_1 + 3 \cdot L_2 + 5 \cdot L_3 + 4 \cdot L_4.$$

$$L_2 = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2}.$$

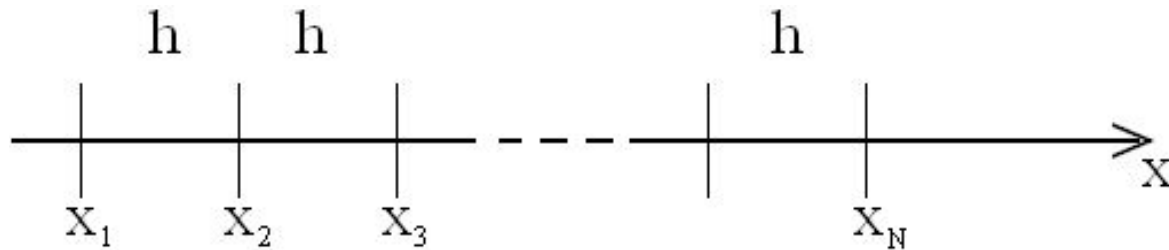
$$L_3 = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2}.$$

$$L_4 = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}.$$

$$y(x) = \frac{3x^3 - 15x^2 + 18x - 5x^3 + 20x^2 - 15x + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{17}{3}x}{2} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{17}{3}x}{2} = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{6}x \quad y(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{6}x$$

# Интерполяция методом Ньютона

При равноотстоящих узлах метод Ньютона, более простой метод, нежели метод Лагранжа



Вычисляем разности I-го порядка, через значение функции в соседних точках;

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k;$$

Вычисляем разности II-го порядка, через разности первого порядка в соседних точках;

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

Вычисляем разности n-ого порядка

$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1} y_k) = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$$

| $x$   | $y$   | $\Delta y$               | $\Delta^2 y$                             | $\Delta^3 y$                                 | $\Delta^4 y$                                 |
|-------|-------|--------------------------|--|--|--|
| $x_1$ | $y_1$ | $y_2 - y_1 = \Delta y_1$ | $\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$ | $\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1$ | $\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 = \Delta^4 y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ | $y_3 - y_2 = \Delta y_2$ | $\Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2$ | $\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2$ |  |
| $x_3$ | $y_3$ | $y_4 - y_3 = \Delta y_3$ | $\Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3$ |  |  |
| $x_4$ | $y_4$ | $y_5 - y_4 = \Delta y_4$ |  |  |  |
| $x_5$ | $y_5$ |                          |  |  |  |

Интерполяционный полином  $n$ -й степени  
имеет вид

$$y(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots + b_{N-1}(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{N-1})$$



Коэффициенты  $b$  определяются из условия:  
**полином должен проходить через все заданные точки.**

$$y(x_1) = b_0$$

Коэффициент  $b_0$  оцениваем через значение  $y(x_1)$

$$\Delta y_1 = y(x_2) - y(x_1) = b_0 + b_1(x_2 - x_1) - b_0 = b_1 h$$

Коэффициент  $b_1$  оцениваем через первую конечную разность  $\Delta y_1$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = y(x_3) - y(x_2) - \Delta y_1 \\ &= b_0 + b_1(x_3 - x_1) + b_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) - b_0 - b_1(x_2 - x_1) - b_1 h = b_2 2! h^2 \end{aligned}$$

Коэффициент  $b_2$  оцениваем через вторую

$$y(x) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{1!h}(x-x_1) + \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2}(x-x_1)(x-x_2) + \dots + \frac{\Delta^{(N-1)} y_1}{(N-1)!h^{N-1}}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{N-1})$$

Докажем, что  $y(x_k) = y_k$

$$x = x_1 \quad y(x_1) = y_1$$

$$x = x_2 \quad y(x_2) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{h}(x_2 - x_1) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{h}h = y_2$$

$$\begin{aligned} x = x_3 \quad y(x_3) &= y_1 + \frac{\Delta y_1}{h}(x_3 - x_1) + \frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{h}2h + \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{2h^2}2h^2 = \\ &= y_1 + 2y_2 - 2y_1 + y_3 - y_2 - (y_2 - y_1) = y_3 \end{aligned}$$

Достоинства метода Ньютона:

- более простые вычисления;
- можно добавить точки и уточнить интерполяционный полином, не меняя предыдущих вычислений.

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---|---|---|---|

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|---|---|---|

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $y_k$ | 0 | 3 | 5 | 4 |
|-------|---|---|---|---|