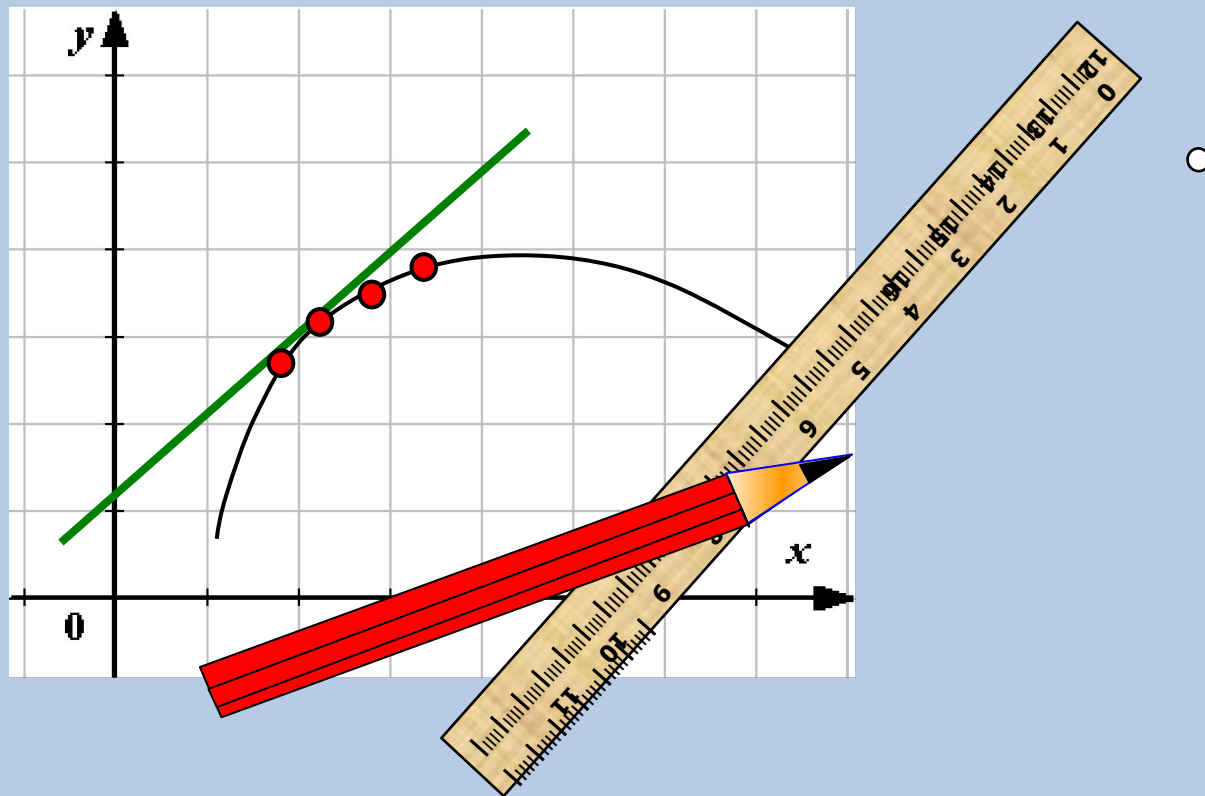


Задачи типа В12 в ЕГЭ Исследование функций.



Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной.

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4. Производная частного $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Основные формулы дифференцирования

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|
| c | 0 | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\operatorname{tg}x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| x^α | $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ | $\operatorname{ctg}x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

Два типа задач:

1. Нахождение точки максимума или минимума функции (на отрезке)
2. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

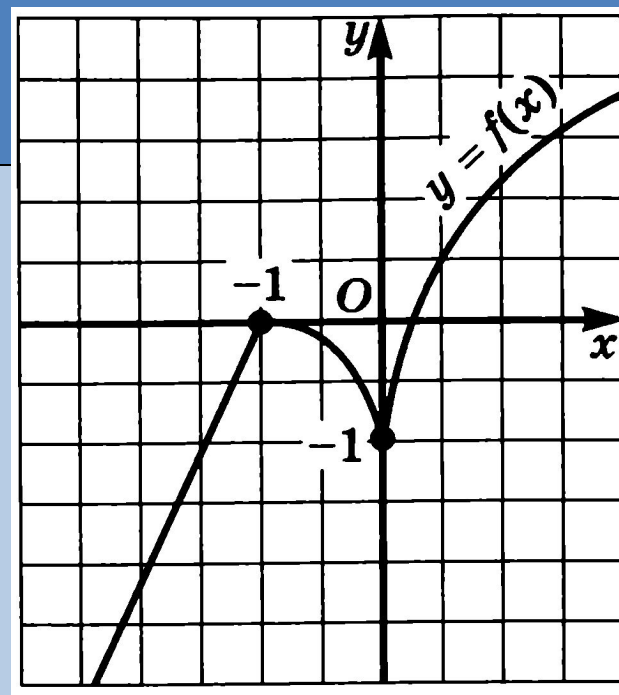
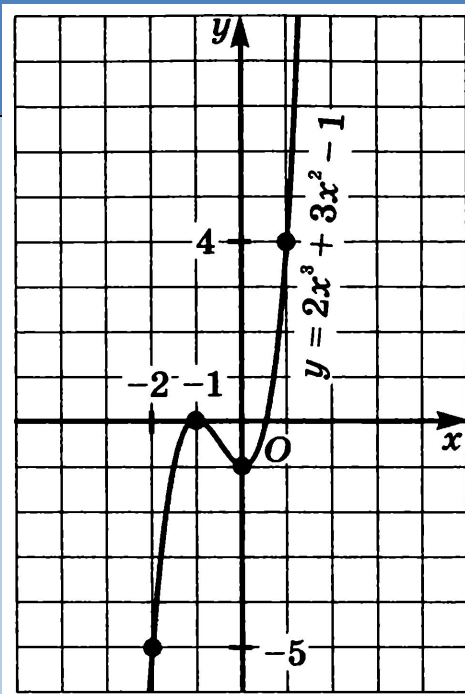
Основные определения и теоремы.

Теорема 1: Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве), то функция возрастает на промежутке X .

Теорема 2: Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве), то функция возрастает на промежутке X .

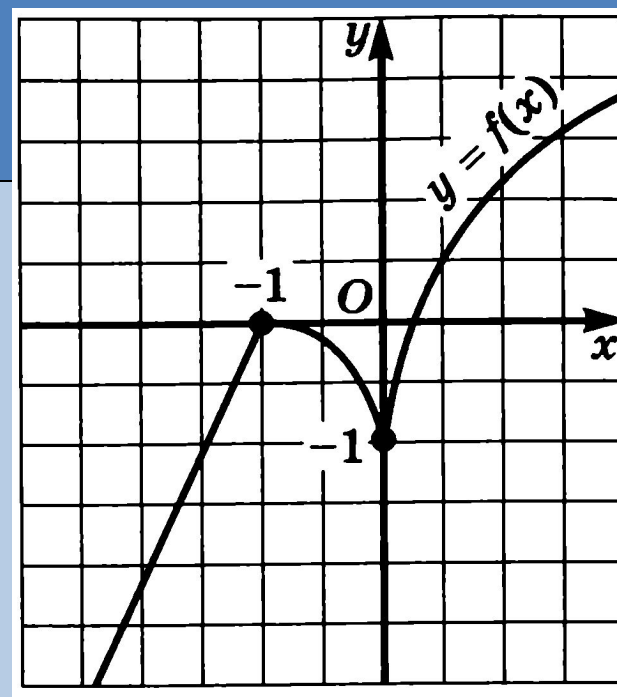
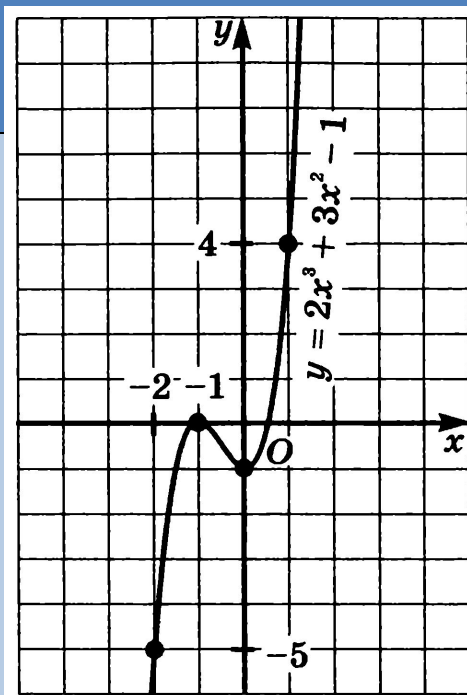
Основные определения и теоремы.

Опр. 1 Точку $x = x_0$ называют *точкой минимума функции* $y = f(x)$, если у этой функции существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$



Основные определения и теоремы.

Опр. 2 Точку $x = x_0$ называют *точкой максимума функции* $y = f(x)$, если у этой функции существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$



Основные определения и теоремы.

Точки минимума $x = x_{\min}$ и максимума $x = x_{\max}$ - **точки экстремума**.

Теорема 3: Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует

Основные определения и теоремы.

Теорема 4 (Достаточные условия экстремума):

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

- a) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется равенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то x_0 – точка минимума функции
- b) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется равенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) > 0$, то x_0 – точка максимума функции
- a) Если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума (максимума или минимума) функции.

1. Найти производную $y = f'(x)$
2. Найти стационарные $f'(x) = 0$) и критические (не существуют) точки функции
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем и определений сделать вывод о ее точках экстремума

Задачи на нахождение точек экстремума (максимума или минимума) функции.

№1 Найдите точку максимума функции

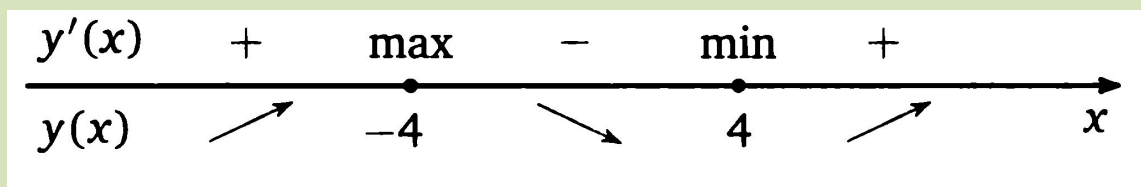
Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2. $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \quad 3(x^2 - 16) = 0 \quad | :3 \quad (x^2 - 16) = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0 \Rightarrow (x - 4) = 0$ или $(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 4$ или $x = -4$

3.



4. $x_{\max} = -4$

Задачи на нахождение точек экстремума (максимума или минимума) функции.

№1 Найдите точку максимума функции

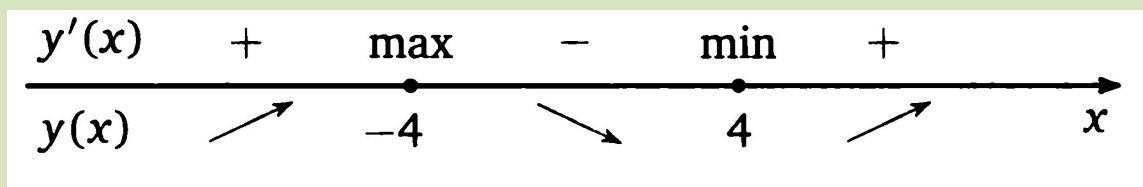
Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2. $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \quad 3(x^2 - 16) = 0 \quad | :3 \quad (x^2 - 16) = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0 \Rightarrow (x - 4) = 0$ или $(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 4$ или $x = -4$

3.



4.

$x_{\max} = -4$

Задачи для самостоятельного решения на нахождение экстремума функции.

Группа А

Найдите точку минимума
функции

$$y = 7 + 12x - x^3$$

Группа В

Найдите точку максимума
функции

$$y = \frac{16}{x} + x + 3$$

Группа С

Найдите точку минимума
функции

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$$

Группа D

Найдите точку максимума
функции

$$y = (2x - 3) \cos x - 2 \sin x + 5$$

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$ $y = f(x)$
3. Вычислить значения функции в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b ; выбрать среди этих значений наименьшее и наибольшее

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

№1 Найдите наименьшее значение
функции $y = x^3 - 48x + 17$ на отрезке
[-5;5]

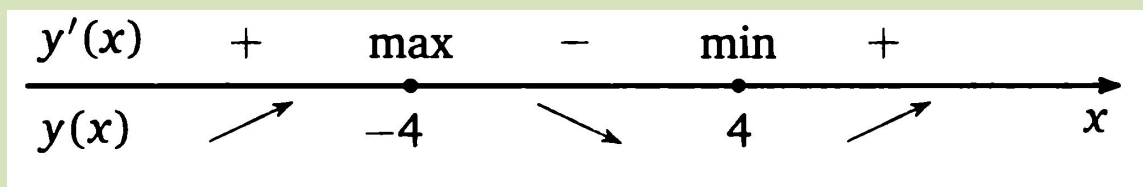
Решение.

1. $y = 3x^2 - 48$

2. $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 48 = 0 \quad 3(x^2 - 16) = 0 \quad | :3 \quad (x^2 - 16) = 0$

$(x - 4)(x + 4) = 0 \Rightarrow (x - 4) = 0$ или $(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 4$ или $x = -4$

3.



$f(4) = 4^3 - 48 \cdot 4 + 17 = -111$ $f(-4) = (-4)^3 - 48 \cdot (-4) + 17 = 145$

Задачи для самостоятельного решения на нахождение наибольшего или наименьшего значения

Группа А

*Найдите наибольшее значение
функции*

$$y = x^3 - 3x + 4$$

на отрезке $[-2;0]$

Группа В

*Найдите наименьшее значение
функции*

$$y = x + \frac{36}{x}$$

на отрезке $[1;9]$

Группа С

*Найдите наибольшее значение
функции*

$$y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$$

на отрезке $[0;4]$

Группа D

*Найдите наименьшее значение
функции*

$$y = 6 \sin x - 9x + 5$$

на отрезке $[-\frac{3\pi}{2};0]$

Домашняя работа

- **№1954,1977,2041** *ЕГЭ 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В. А.Л. Семенов, И.В.Яценко и др. – 3-е издание, - М.:Изд-во «Экзамен», 2012. - 543*

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
2. Алгебра и начала математического анализа: Задачник, Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
3. ЕГЭ 2012. Математика. Задача В12. Рабочая тетрадь / Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко – М.: Издательство МЦНМО, 2012