

A spiral-bound notebook with a light beige, textured cover. The spiral binding is on the left side. The text is centered on the cover.

# **Исследование функций и построение графиков**

A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a dark brown cover. The spiral binding is on the left side. A horizontal line is drawn across the page, and the text is centered below it.

# *Теоретический материал*

# Содержание

---

- 1) Область определения функции
- 2) Свойства функции (четность, нечетность, периодичность)
- 4) Точки пересечения функции с осями координат
- 5) Непрерывность функции. Характер точек разрыва
- 6) Асимптоты
- 7) Экстремумы функции. Исследование функции на монотонность
- 8) Выпуклость функции. Точки перегиба

# Область определения функции

---

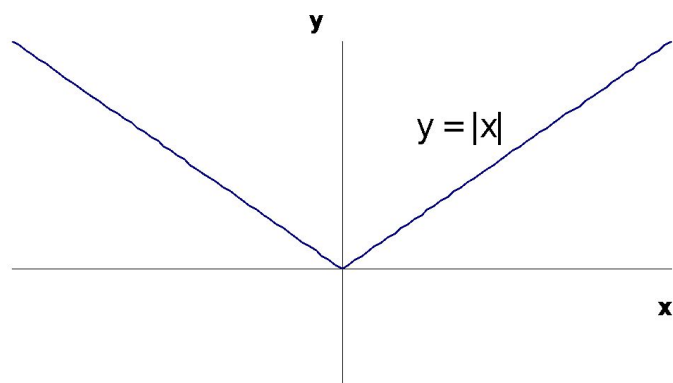
*Определение.* Областью определения функции называется множество значений независимой переменной, при которых функция определена.

*Примеры.*

$$\lambda = |u(x+1)| \quad D_f = (-1, +\infty)$$

$$y = \frac{2}{(x-3)^2} \quad D_f = R \setminus \{3\}$$

# Четные и нечетные функции

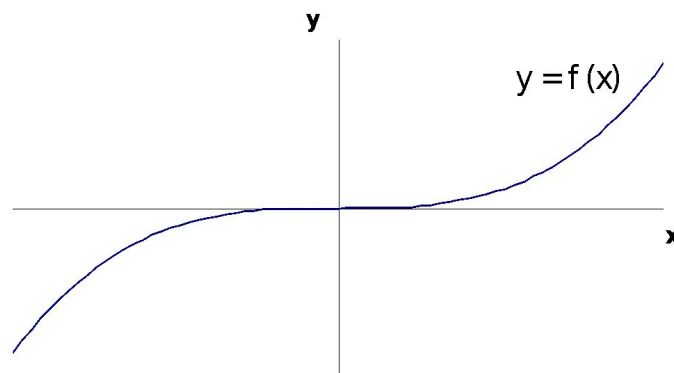


Функция  $y=f(x)$   
называется четной,  
если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$$

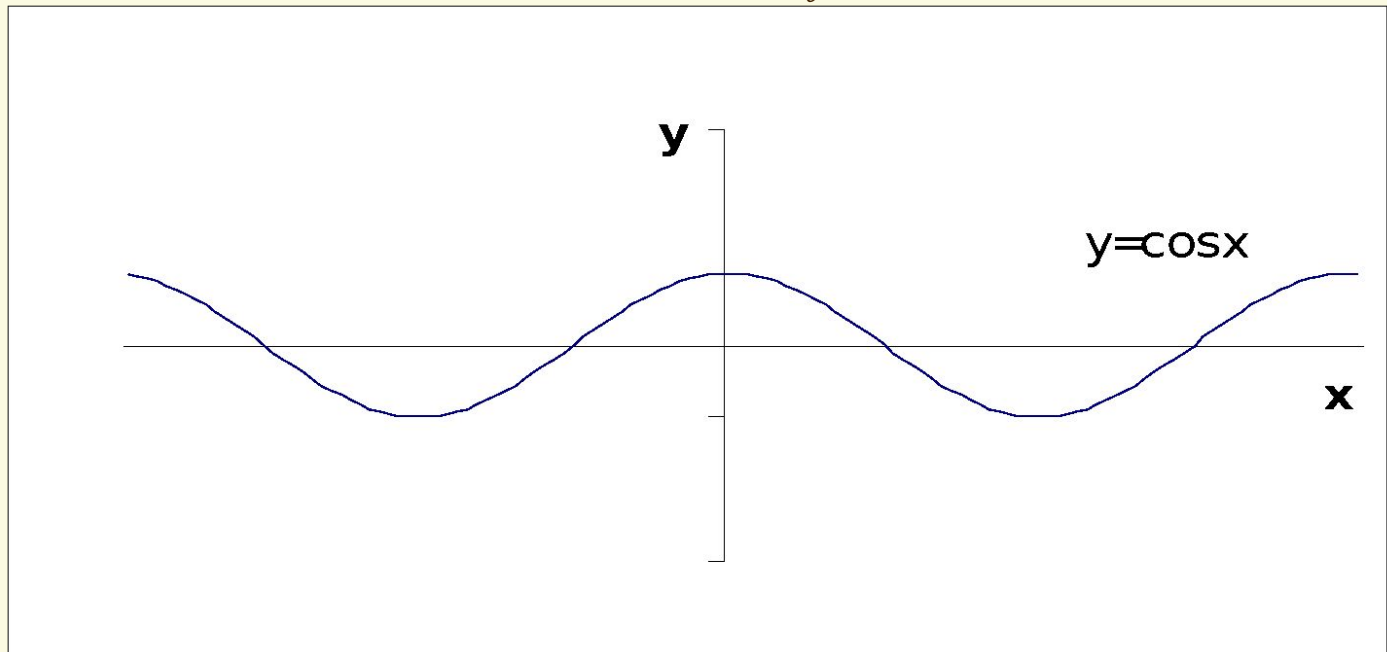
Функция  $y=f(x)$   
называется нечетной,  
если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$$



# Периодические функции

**Определение.** Функция  $y=f(x)$  называется периодической, если существует такое положительное число  $T$ , что если  $x$  принадлежит  $D_f$ , то  $x \pm T$  также принадлежит  $D_f$  и  $f(x+T)=f(x)$ .



# Точки пересечения с осями координат

---

При исследовании функции необходимо найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью  $Ox$  находятся из системы уравнений  $y=f(x)$  и  $y=0$ , а ординаты точек пересечения графика функции с осью  $Oy$  находятся из системы уравнений  $y=f(x)$  и  $x=0$ .

# Непрерывность

## Характер точек разрыва

---

Функция  $y=f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если функция определена в точке  $x_0$  и предел функции в точке  $x_0$  равен значению функции в точке  $x_0$ .

$$x_0 \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функции, непрерывные в каждой точке из области определения функции, называются *непрерывными функциями*.

Примеры непрерывных функций:  $y=\cos x$ ,  $y=\sin x$ ,  $y=e^x$ ,  $y=P_n(x)$  (многочлен степени  $n$ ).



# Точки разрыва функции

**Определение.** Точкой разрыва функции называется точка из области определения функции, в которой функция не является непрерывной.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

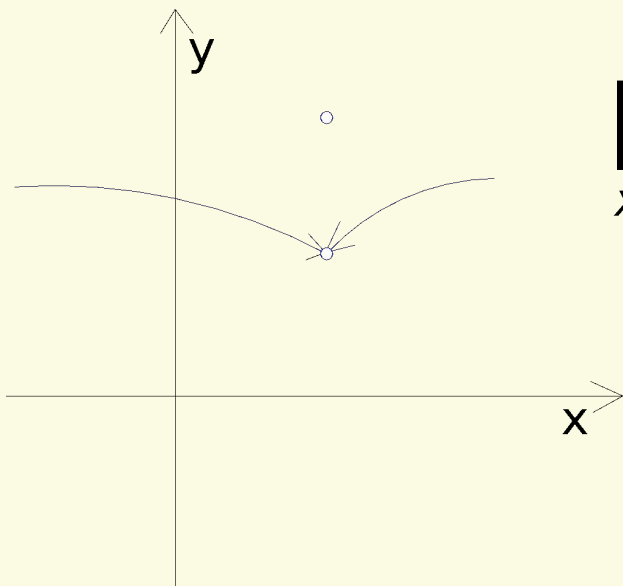
разрывна в 0, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, f(0) = 0$

# Классификация точек разрыва

## Точки устранимого разрыва

---

Если в точке  $x_0$  существуют конечные односторонние пределы функции, равные между собой, но не равные значению функции в точке  $x_0$ , то точка  $x_0$  называется *точкой устранимого разрыва*.



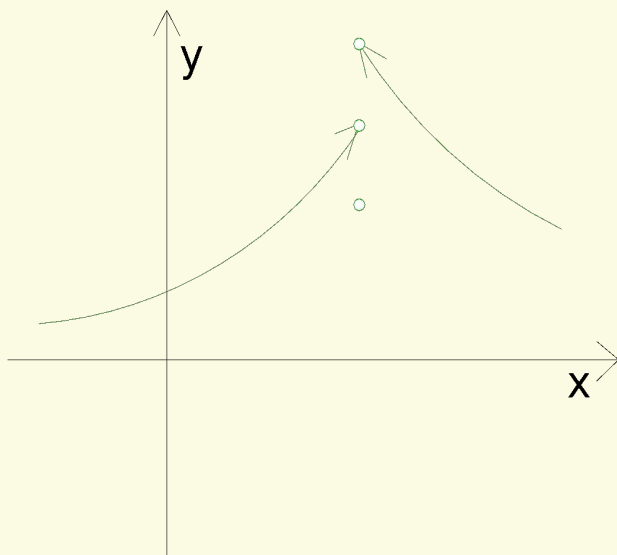
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$$

# Классификация точек разрыва

## Точки скачка

---

Если в точке  $x_0$  существуют конечные односторонние пределы функции, не равные между собой, то точка  $x_0$  называется *точкой скачка (точкой разрыва I рода)*.

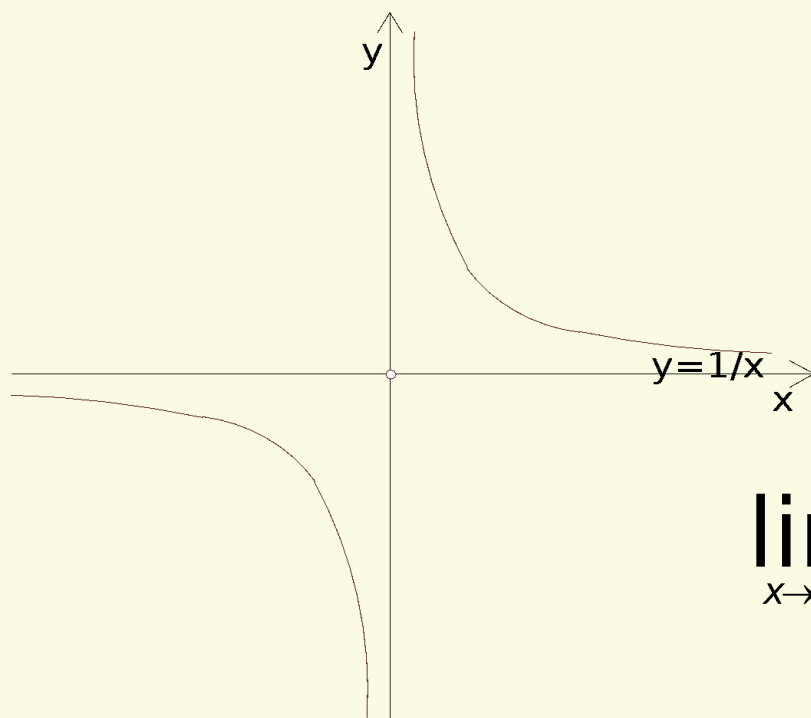


$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

# Классификация точек разрыва

## Точки разрыва II рода

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке  $x_0$  не существует или бесконечен, то точка называется *точкой разрыва II рода*.



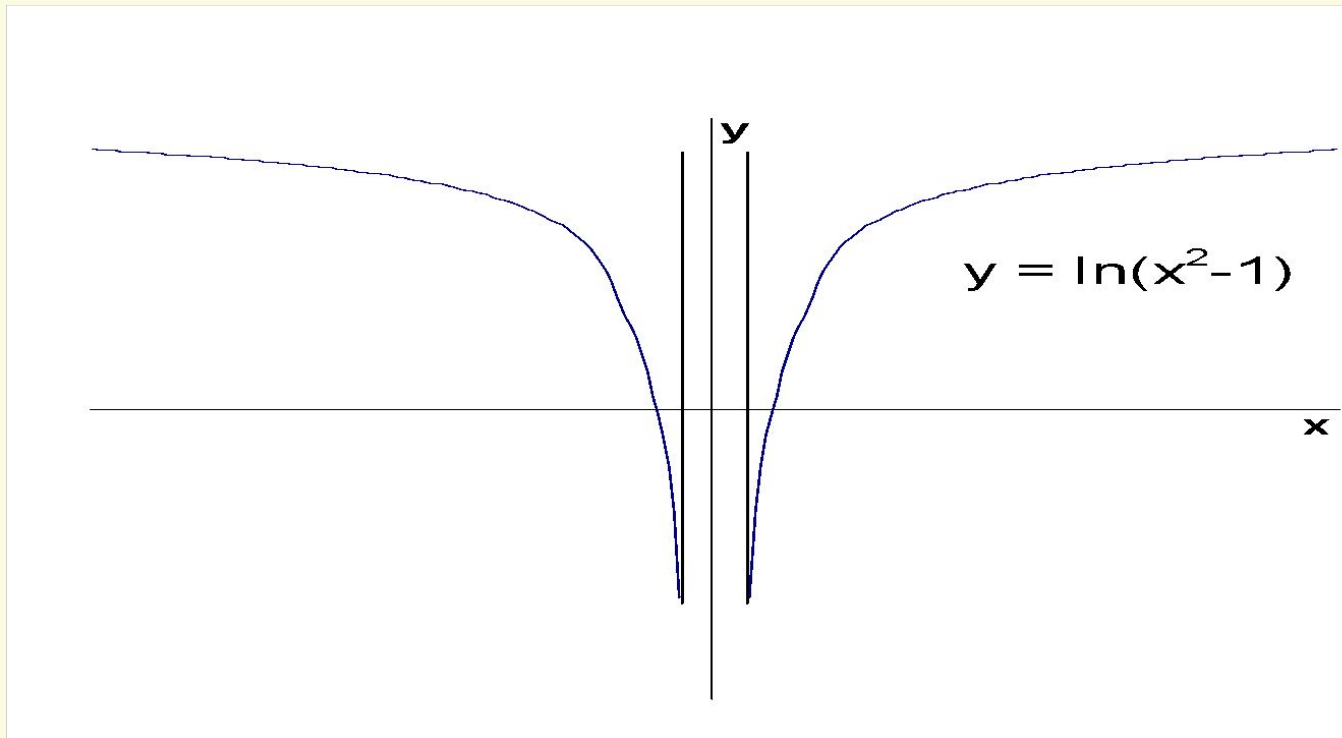
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

# Вертикальные асимптоты

Прямая  $x=x_0$  называется вертикальной асимптотой графика функции при  $x \rightarrow x_0$  если

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty.$$



# Наклонные асимптоты

---

Если существует прямая  $y=kx+b$  такая, что

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ , то эта прямая называется

асимптотой графика функции  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Для того чтобы прямая  $y=kx+b$  была асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

# Экстремумы функции

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на интервале  $(a, b)$ . Точка  $x_0$  интервала  $(a, b)$  называется точкой строгого максимума (минимума) функции  $f(x)$ , если в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$   $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

Точки минимума и точки максимума функции называются *точками экстремума* функции.

**Необходимое условие экстремума.** Пусть точка  $x_0$  - точка экстремума функции. Тогда либо производная функции в этой точке равна 0, либо не существует.

# Исследование функции на МОНОТОННОСТЬ

---

Известно, что если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) в  $(a, b)$ , то функция  $f(x)$  строго возрастает (строго убывает) в  $(a, b)$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) = x + 1|x$

$$f'(x) = \left( x + \frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Критические точки функции  $x = \pm 1$ .  $f'(x) > 0$  при  $x < -1$  и при  $x > 1$ ;  $f'(x) < 0$  при  $-1 < x < 0$  и при  $0 < x < 1$ .

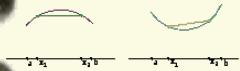
$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  функция возрастает

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$  функция убывает



# Выпуклость функции

Функция  $y=f(x)$ , определенная на интервале  $(a, b)$ , называется *выпуклой вверх (вниз)* в интервале  $(a, b)$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из интервала  $(a, b)$  из того, что  $x_1 < x_2$ , следует, что часть графика функции между точками  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$  лежит выше (ниже) хорды, соединяющей эти точки.



# Выпуклость функции.

## Точки перегиба

---

Также говорят, что график функции  $f(x)$  имеет на интервале  $(a, b)$  выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах  $(a, b)$  лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Если график функции в точке  $(x_0, f(x_0))$  переходит с одной стороны касательной на другую, то точка  $x_0$  называется *точкой перегиба функции*  $f(x)$ .

# Достаточные условия выпуклости функции и существования точек перегиба

---

## *Достаточное условие строгой выпуклости функции*

Если на интервале  $(a,b)$   $f''(x) > 0$ , то на интервале  $(a,b)$  функция выпукла вниз, и если на интервале  $f''(x) < 0$ , то на интервале  $(a,b)$  функция выпукла вверх.

## *Достаточное условие строгой выпуклости функции*

Если в левой и правой полуокрестностях некоторой точки  $x_0$   $f''(x)$  имеет противоположные знаки, то точка  $x_0$  – точка перегиба функции.

A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a dark brown cover. The spiral binding is on the left side. A horizontal line is drawn across the page, and the text "Практический материал" is written in red, italicized font below it.

---

*Практический материал*

Исследуем функцию  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$  и построим её график.

---

- 1). Поскольку знаменатель положителен при всех  $x$ , область определения функции - вся ось  $Ox$ .
- 2). Функция  $f(x)$  - нечётная, поскольку при смене знака  $x$  числитель меняет знак, а знаменатель остаётся без изменения, откуда  $f(-x) = -f(x)$ . Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат. Периодической функция не является.
- 3). Поскольку область определения этой элементарной функции -- вся вещественная ось, вертикальных асимптот график не имеет.

4). Найдём наклонные асимптоты при  $x \rightarrow \pm\infty$  в виде  $y = kx + b$ . Имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Таким образом, асимптотой как при  $x \rightarrow -\infty$ , так и при  $x \rightarrow +\infty$  служит прямая  $y = 1x + 0 = x$ .

---

5). Найдём точки пересечения с осями координат. Имеем:

$f(0) = 0$ , причём  $x=0$  - единственное решение уравнения  $f(x) = 0$ . Значит, график  $y = f(x)$  пересекает сразу и ось  $Ox$ , и ось  $Oy$  в начале координат.

Очевидно, что  $f(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $f(x) < 0$  при  $x < 0$ .

6) Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Очевидно, что  $f'(x) \geq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ ; единственная точка, в которой  $f'(x) = 0$  - это  $x=0$ . Значит, функция  $f(x)$  возрастает на всей оси  $Ox$ , а в стационарной точке  $x=0$  имеет горизонтальную касательную.



7) Найдём вторую производную:

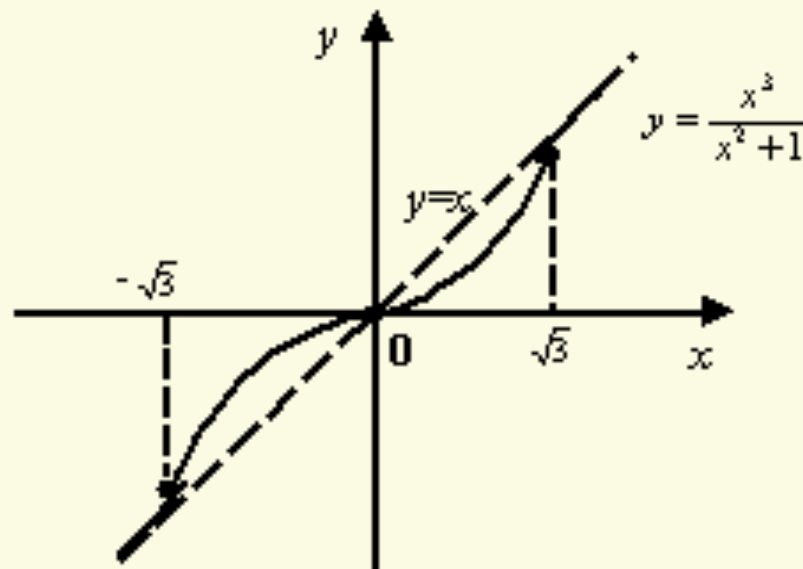
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Знаменатель этой дроби положителен при всех  $x$ .

Числитель имеет корни  $x=0$  и  $x=\pm\sqrt{3}$ , при этом  $f''(x) > 0$  на интервалах  $(-\infty; -\sqrt{3})$  и  $(0; \sqrt{3})$  - на этих интервалах функция выпукла. На интервалах  $(-\sqrt{3}; 0)$  и  $(\sqrt{3}; +\infty)$  выполняется обратное неравенство  $f''(x) < 0$ , здесь функция вогнута. Все три точки, в которых  $f''(x) = 0$ , то есть точки  $-\sqrt{3}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{3}$ , являются точками перегиба.

8). Теперь мы можем построить график с учётом всех предыдущих пунктов исследования функции. График имеет такой вид:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$



Исследуем функцию  $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$  и построим её график.

---

- 1). Ясно, что  $D(f) = R$ , поскольку оба сомножителя в выражении  $f(x)$  определены при любом  $x$ . Область значений  $E(f)$  найдём после того, как отыщем локальные экстремумы функции.
- 2). Функция не является ни чётной, ни нечётной; не является она и периодической.
- 3). Область определения не имеет граничных точек, значит, нет и вертикальных асимптот графика.

4) Будем искать наклонные асимптоты в виде  $y = kx + b$ .  
Коэффициент  $k$  найдём по формуле  $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  : при  
имеем  $x \rightarrow +\infty$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2)e^x = +\infty,$$

так что при  $x \rightarrow +\infty$  асимптоты нет, причём функция  $f(x)$   
стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

При  $x \rightarrow -\infty$  имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Теперь найдём значение  $b$  по формуле  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$  .

Имеем:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

Таким образом,  $k=0$  и  $b=0$ , так что при  $x \rightarrow -\infty$  асимптота имеет уравнение  $y=0$ , то есть совпадает с осью  $Ox$ .

5). Точка пересечения с осью  $Oy$  равна  $f(0)=0$ . Заодно нашли одну точку пересечения с осью  $Ox$ . Чтобы найти все точки пересечения графика с осью  $Ox$ , решаем уравнение  $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ . Поскольку  $e^x \neq 0$ , решаем уравнение  $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$ , откуда получаем два корня:  $x=0$  и  $x=2$ . Так как точек разрыва нет, то имеем три интервала знакопостоянства функции:  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 2)$  и  $(2; +\infty)$ .

Знак функции определяется множителем  $x^2 - 2x$ , поскольку  $e^x > 0$  при всех  $x$ . Значит,  $f(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; 0)$  и  $x \in (2; +\infty)$  и  $f(x) < 0$  при  $x \in (0; 2)$

б) Вычислим производную:

$$f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x.$$

Интервалы возрастания задаются неравенством  $f'(x) > 0$ , то есть, с учётом того, что  $e^x > 0$ , неравенством  $x^2 - 2x > 0$ .

Решением этого неравенства служит множество

$(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ . На этих двух интервалах функция

возрастает. Легко видеть, что на интервале  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ , следовательно, это

интервал убывания функции. В точке  $-\sqrt{2}$  возрастание

сменяется убыванием, значит, точка  $-\sqrt{2}$  - точка

локального максимума.

Значение функции в этой точке равно

$$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1.17.$$

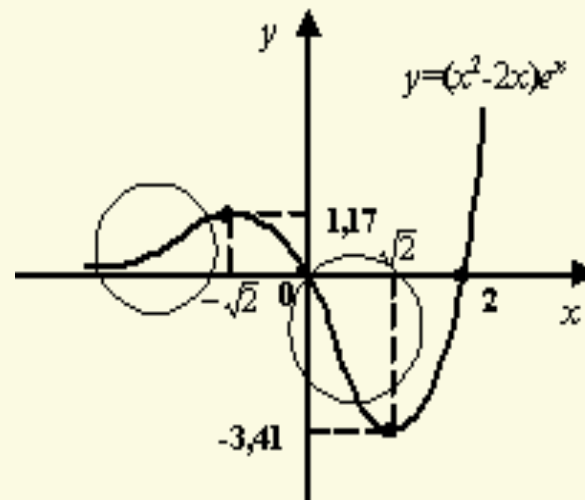
В точке  $\sqrt{2}$  убывание сменяется возрастанием, значит, точка  $\sqrt{2}$  -- точка локального минимума функции.

Значение функции в точке минимума таково:

$$f_{\min} = f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -3.41.$$

Теперь мы можем примерно представить, как идёт график функции:

Эскиз графика  
функции  $f(x)$



Становится очевидно, что область значений функции --  
это

---

$$\mathcal{E}(f) = [f_{\min}; +\infty) \approx [-3.41; +\infty).$$

7) По эскизу графика видно, что где-то в местах, обведённых кружочками, должно смениться направление выпуклости, то есть должны быть точки перегиба. Для исследования этого найдём вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 2)e^x + 2xe^x = (x^2 + 2x - 2)e^x.$$

Решим неравенство  $f''(x) > 0$ , эквивалентное неравенству  $x^2 + 2x - 2 > 0$ . Решением этого квадратного неравенства служит объединение интервалов  $(-\infty; -1 - \sqrt{3}) \approx (-\infty; -2.7)$  и  $(-1 + \sqrt{3}; +\infty) \approx (0.7; +\infty)$ . На этих интервалах функция выпукла.



Ясно, что на интервале  $(-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \approx (-2.7; 0.7)$  функция будет вогнутой. Тем самым точки  $x_1 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$  и  $x_2 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.7$  -- это точки перегиба. Значения функции в точках перегиба такие:

$$f(x_1) = (6 + 4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0.84;$$

$$f(x_2) = (6 - 4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \approx -1.93.$$

8). Осталось построить окончательный чертёж:

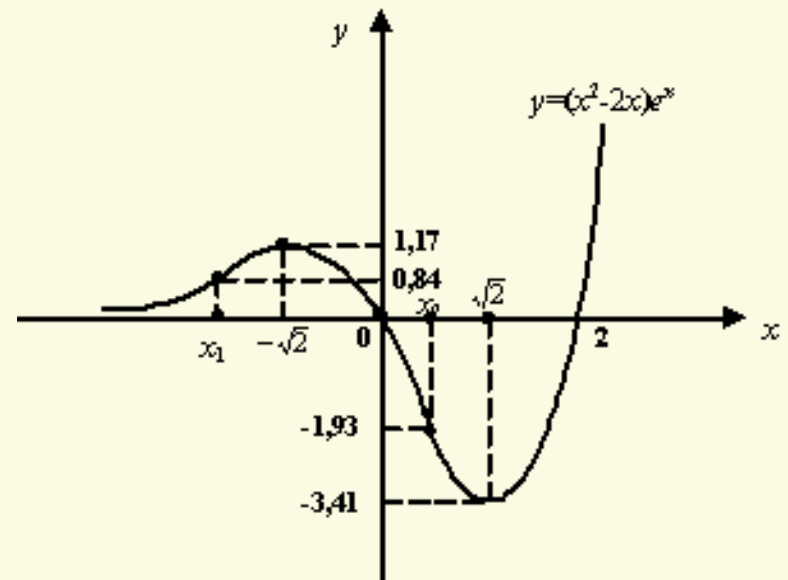


График функции  $(x^2 - 2x)e^x$ .