

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Кафедра Прикладной  
Математики (к.241)  
Турундаевский Виктор  
Борисович

# Структура дисциплины

- ◆ Лекции – 32 ч.
- ◆ Практические занятия – 32 ч.

## ОТЧЕТНОСТЬ

- ◆ Контрольная работа - 5
- ◆ ТЕСТЫ - 1
- ◆ ФОРУМ - 1
- ◆ Экзамен

# ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- ◆ **Исследование операций** — научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

**Операция** — любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели.

**Оптимальными** считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других.

# ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

- ◆ **1. Постановка задачи.**
- ◆ **2. Построение содержательной модели рассматриваемого объекта.**
- ◆ **3. Построение математической модели.**
- ◆ **4. Анализ модели или получение решения задачи.**
- ◆ **5. Анализ решения**
- ◆ **6. Проверка полученных результатов на их адекватность природе изучаемой системы.**

# Лекция 1.

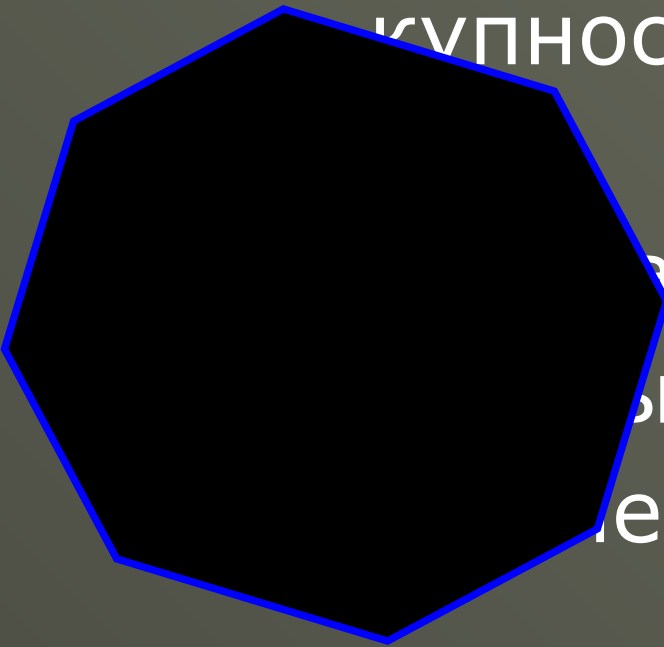
- ◆ Экономико-математическая модель (ЭММ). Понятие, пример, общая классификация ЭММ.
- ◆ Общая задача линейного программирования, основные элементы и понятия.
- ◆ Общая запись оптимизационной ЭММ (задача оптимального программирования). Основные элементы и понятия.
- ◆ Графический метод решения задачи линейного программирования.
- ◆ Особые случаи решения ЗЛП графическим методом.
- ◆ Каноническая форма записи ЗЛП. Способы приведения ЗЛП к каноническому виду
- ◆ Экономический смысл основных и дополнительных переменных в канонической форме задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов

# Математический аппарат линейного программирования

## Понятие о выпуклых множествах

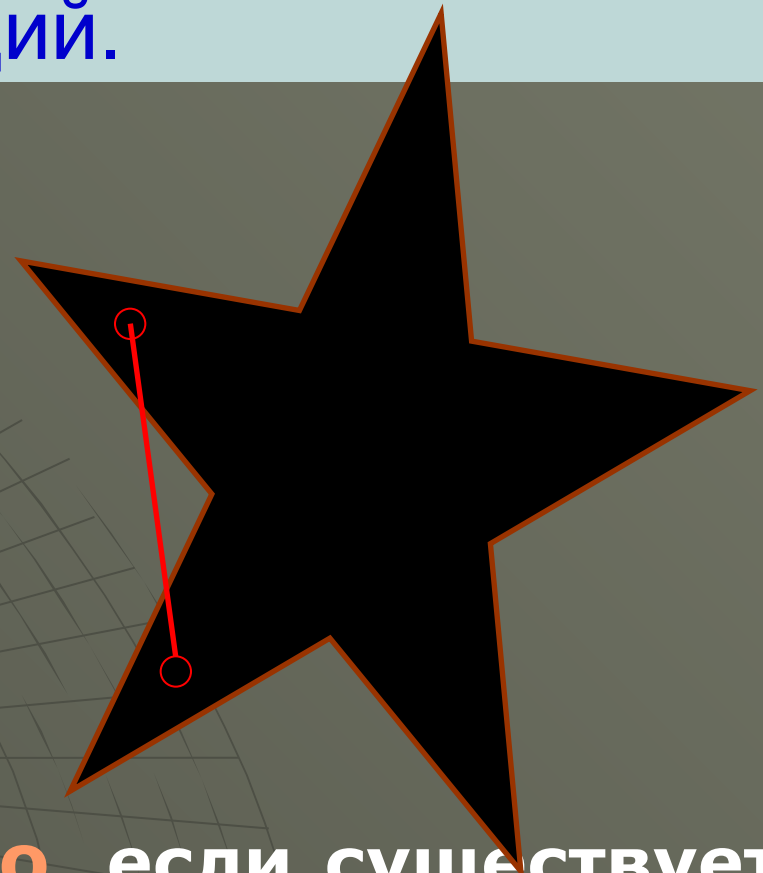
**Множество** – определенная  
сово-

купность объектов (элементов)



различают множества:  
выпуклые;  
невыпуклые.

**Множество выпукло**, если вместе с его любыми двумя точками ему принадлежит и весь отрезок их соединяющий.

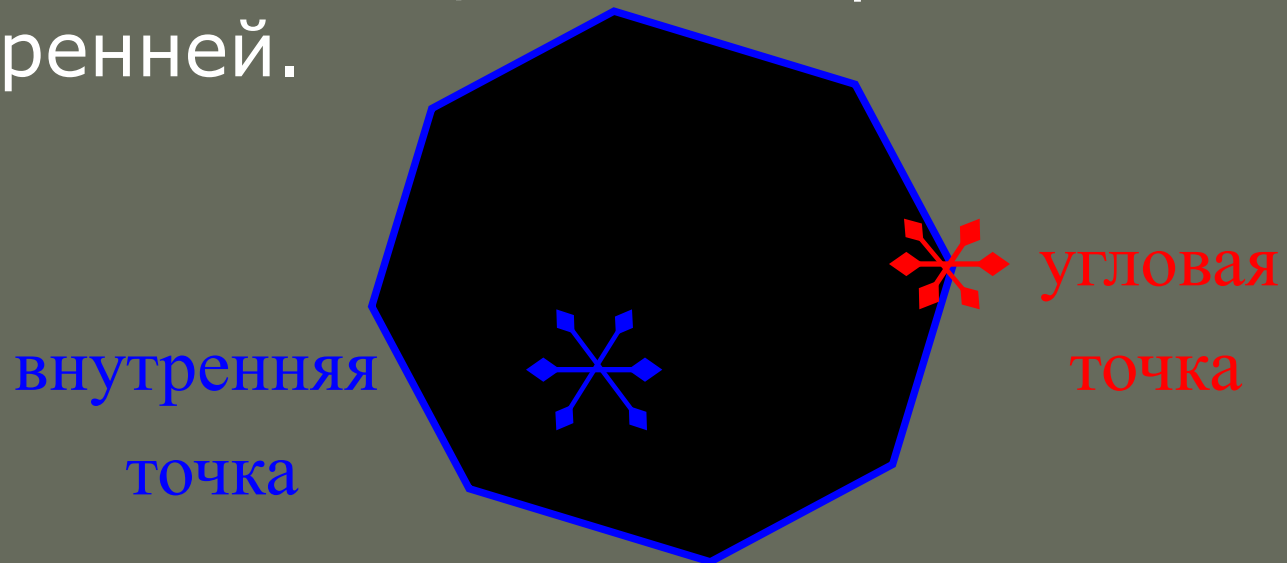


**Множество невыпукло**, если существует хотя бы одна такая пара точек множества, что отрезок, соединяющий эти точки не принадлежит целиком этому множеству.

# Понятие угловой точки

Для выпуклых множеств вводится понятие угловой точки.

**Угловой** (крайней) **точкой** выпуклого множества называется точка, через которую нельзя провести ни одного отрезка состоящего только из точек данного множества, для которого она была бы внутренней.





# **Пример 1. Задача оптимального использования ресурсов (задача о коврах)**

- ◆ В распоряжении фабрики имеется определенное количество ресурсов: рабочая сила, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Например, пусть это будут ресурсы трех видов: рабочая сила (80 чел./дней), сырье (480 кг пряжи) и оборудование (130 станкочасов). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл.1.
- ◆ Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	Ковер «Лужайка»	Ковер «Силуэт»	Ковер «Детский»	Ковер «Дымка»	
<b>Труд</b>	<b>7</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>80</b>
<b>Сырье</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>480</b>
<b>Оборудование</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>130</b>
<b>Цена ед. изделия (тыс. руб.)</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	

# Экономико-математическая модель задачи

- ◆ **Переменные**
- ◆ Обозначим через  $x_1, x_2, x_3, x_4$  количество ковров каждого типа.
- ◆ **Целевая функция** – это выражение, которое необходимо максимизировать:  
$$F(x) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4.$$
- ◆ **Функциональные ограничения (ограничения по ресурсам)**
  - ◆  $7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80$  (человеко/дней),
  - ◆  $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480$  (кг пряжи),
  - ◆  $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \leq 130$  (станкоочасов),
- ◆ **Прямые ограничения**  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ .

## Пример 2.

Некоторое предприятие изготавливает два вида продукции I и II. Для производства которой используется два вида сырья A и B.

Сырье	Расход сырья на 1т продукции		Суточный запас, т
	Прод. I	Прод. II	
<b>A</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>24</b>
<b>B</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>6</b>

Спроса на продукцию I более чем на 1 т. Спрос на продукцию II не превышает 2 т в сутки.

Основные цены 1-й тонны продукции равны: 5 тыс. ден. ед на прод. I и 4 тыс. ден. ед на прод. II.

Требуется определить объемы выпуска продукции обеспечивающие *max* прибыль.

Составим ЭММ задачи по следующей схеме

1. Идентифицируем переменные;
2. Выявим цель задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать такое сочетание, которое будет соответствовать оптимальному решению;
3. Выявим ограничения, которые будут наложены на переменные.

Далее реализуем приведенную схему.

1. Поскольку в условии задачи требуется определить объемы производства каждого вида продукции, то обозначим искомые переменные через  $x_1$  и  $x_2$ :

$x_1$  – суточный объем производства продукции первого вида (т);

$x_2$  – суточный объем производства продукции второго вида (т).

2. Составим целевую функцию задачи.

Прибыль предприятия будет складываться в виде суммы прибылей от реализации продукции первого и второго вида. Запишем это условие.

$$F(x) = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$$

3. Выделим ограничения:

- на расход используемых продуктов

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad - \text{ по сырью } A,$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad - \text{ по сырью } B,$$

$$-1x_1 + 1x_2 \leq 1 \quad - \text{ по превышению} \\ \text{спроса продукции II}$$

над I,

$$0x_1 + 1x_2 \leq 2 \quad - \text{ по спросу на} \\ \text{продукцию II,}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  - условие неотрицат.

Задачи подобного вида называю 3ПП

- ◆ Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.



- ◆ К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального решения), само возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с

## Общая постановка ЗЛП

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , максимизирующие линейную форму:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n, \quad (0.1)$$

при условиях :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (>=, =) b_i \quad i = \overline{1, m} \quad (0.2)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, p}; \quad p \leq n \quad (0.3)$$

Соотношения (0.2) и (0.3) будем называть соответственно функциональными и прямыми ограничениями ЗЛП.

Значения переменных  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) можно рассматривать как компоненты некоторого вектора  $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  пространства  $E_n$ .

### **Определение**

Планом или допустимым решением задачи линейного программирования будем называть вектор пространства  $E_n$ , компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи. Множество всех планов задачи линейного программирования (0.1)-(0.3) будем обозначать  $P$ .

## Определение.

План  $\bar{X}^* = (X^*_1, X^*_2, \dots, X^*_n)$  будем называть решением задачи линейного программирования или ее оптимальным планом, если

$$f(\bar{X}^*) = \max_{\bar{X} \in P} f(\bar{X})$$

## Определение.

Будем говорить, что задача линейного программирования разрешима, если она имеет хотя бы один оптимальный план.

## Основная ЗЛП

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности. Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$  максимизирующих линейную форму

$$f(\bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (0.4)$$

при условиях 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m} \quad (0.5)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (0.6)$$

## Основная ЗЛП

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности. Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$  максимизирующих линейную форму

$$f(\bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (0.4)$$

при условиях 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m} \quad (0.5)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (0.6)$$

или в векторной форме

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max \quad (0.7)$$

$$A\bar{x} \leq \bar{b} \quad (0.8)$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad (0.9)$$

Где  $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ,  $A = (a_{ij})$  – матрица коэффициентов ограничений (0.5). Задача (0.4)-(0.5) или (0.7)-(0.9) называется основной ЗЛП.

Основная ЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при  $m_1 = m$ ,  $p = n$ .

Для построения общего метода решения ЗЛП разные формы ЗЛП должны быть приведены к некоторой стандартной форме, называемой канонической задачей линейного программирования (КЗЛП).

## Каноническая ЗЛП

В канонической форме

- 1) все функциональные ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;
- 2) все переменные неотрицательны;
- 3) целевая функция подлежит максимизации.

Таким образом, КЗЛП имеет вид

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (0.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (0.11)$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad b_j \geq 0; \quad x_j \geq 0 \quad (0.12)$$

КЗЛП является частным случаем общей ЗЛП .



В матрично-векторной форме КЗЛП имеет вид

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad \bar{b} \geq \bar{0}$$

или в векторной форме

$$\max(\bar{C}, \bar{X})$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j = \bar{b}$$

$$\bar{b} \geq \bar{0}, \quad \bar{x} \geq 0,$$

где  $\bar{a}_j$  -  $j$ -ый столбец матрицы  $A$

Очевидно, что определения плана и оптимального плана, данные для общей ЗЛП, справедливы и для КЗЛП.

**Любую ЗЛП можно привести к аноническому виду, используя следующие правила:**

а) максимизация целевой функции

$$f(\bar{x}) = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

равносильна минимизации целевой функции

$$f(\bar{x}) = - C_1X_1 - C_2X_2 - \dots - C_nX_n;$$

б) ограничение в виде неравенства, например

$3X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 6$ , может быть приведено к стандартной форме

$3X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 6$ , где новая переменная  $X_4$

неотрицательна. Ограничение

$X_1 - X_2 + 3X_3 > 10$  может быть приведено к стандартной форме

$X_1 - X_2 + 3X_3 - X_5 = 10$ , где новая переменная  $X_5$

неотрицательна;

в) если некоторая переменная  $X_K$  может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду

$$X_K = X'_K - X''_K \text{ где } X''_K \geq 0 \text{ и } X'_K \geq 0.$$

## Пример 2.1.



$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 - x_2 - x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = 2$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0$$

# Задача о костюмах

- ◆ **Пример 3.** *Планирование выпуска продукции пошивочного предприятия.*
- ◆ **Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского – 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.**

# Экономико-математическая модель задачи о костюмах

- ◆ **Переменные:**  $x_1$  – число женских костюмов;  
 $x_2$  – число мужских костюмов.
- ◆ Максимизировать **целевую функцию**
- ◆  $f(x) = 10 x_1 + 20 x_2$
- ◆ Ограничения **задачи имеют вид:**
- ◆  $x_1 + x_2 \leq 150,$
- ◆  $2 x_1 + 0,5 x_2 \leq 240,$
- ◆  $x_1 + 3,5 x_2 \leq 350,$
- ◆  $x_2 \geq 60,$
- ◆  $x_1 \geq 0.$

# Графический метод решения ЗЛП

- ◆ Строится многоугольная область допустимых решений (ОДР) ЗЛП.
- ◆ Строится вектор-градиент целевой функции (ЦФ) с началом в точке  $x_0, (0;0)$
- ◆ Линия уровня  $c_1x_1 + c_2x_2 = a$  ( $a$  – постоянная величина) – прямая, перпендикулярная вектору-градиенту, – передвигается в направлении этого вектора в случае максимизации  $f(x_1, x_2)$  до тех пор, пока не покинет пределов ОДР. Предельная точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума  $f(x_1, x_2)$ .
- ◆ Для нахождения координат точки максимума достаточно решить систему уравнений прямых, дающих в пересечении точку максимума. Значение  $f(x_1, x_2)$ , найденное в полученной точке, является максимальным значением целевой функции.

В качестве примера рассмотрим  
составленную ранее ЭММ

(пример 2):

$$F(x) = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24, \quad - (1)$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad - (2)$$

$$-1x_1 + 1x_2 \leq 1, \quad - (3)$$

$$0x_1 + 1x_2 \leq 2, \quad - (4)$$

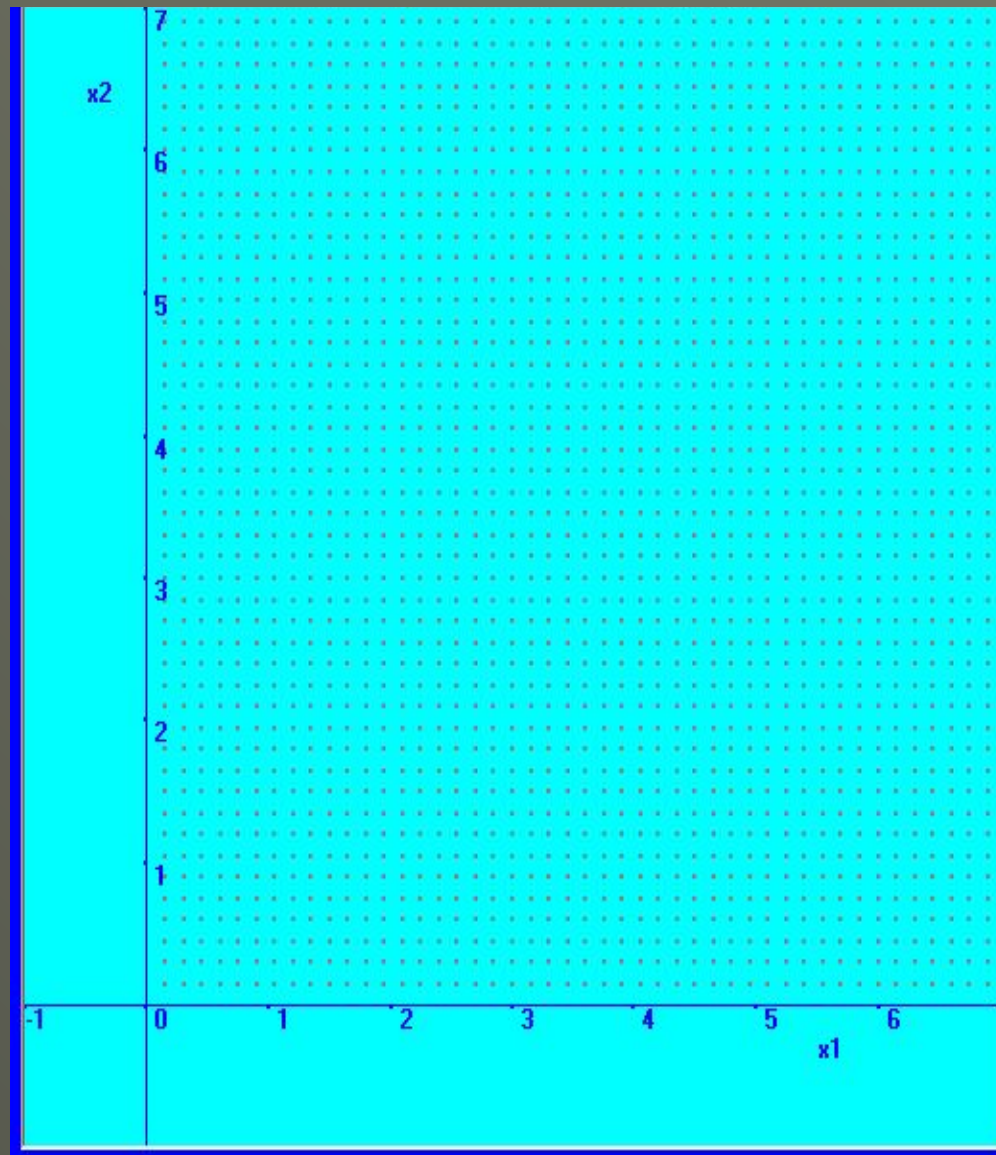
$$x_1 \geq 0, \quad - (5)$$

$$x_2 \geq 0. \quad - (6)$$

Затем пронумеруем все  
ограничения

# Построение ОДР

- проведем оси и обозначим их через  $x_1$  и  $x_2$ ;
- на оси нанесем деления;
- учтем условия неотрицательности переменных  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ , это означает, что решение необходимо искать в первой четверти;
- далее каждое неравенство поочередно заменяем на равенство и по ним строим прямые на графике.





Строим первую линию ограничения

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad - (1)$$

$x_1$	0	4
$x_2$	6	0

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$



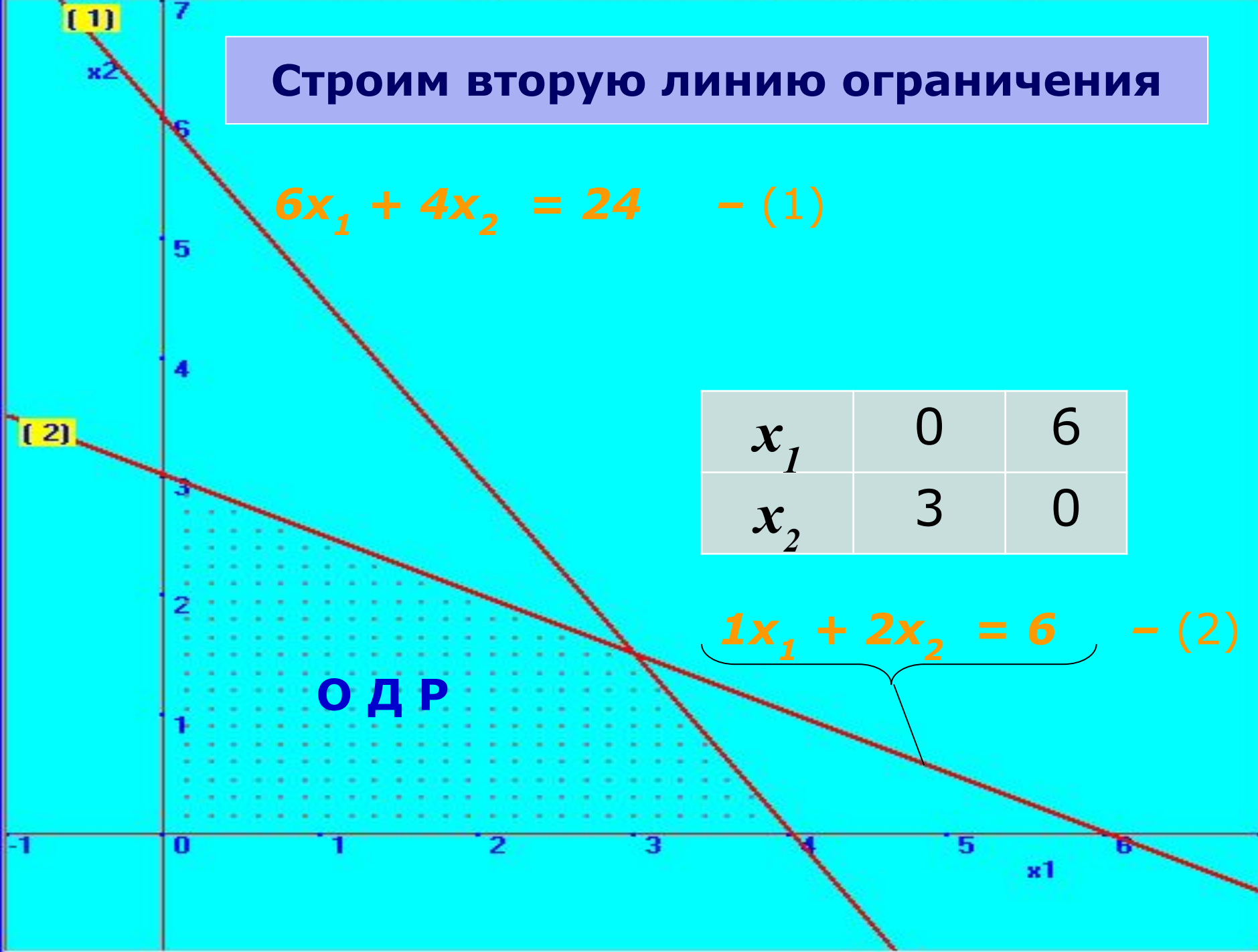
Строим вторую линию ограничения

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad - (1)$$

$x_1$	0	6
$x_2$	3	0

$$1x_1 + 2x_2 = 6 \quad - (2)$$

ОДР



# Строим третью линию ограничения

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad - (1)$$

$$-1x_1 + 1x_2 = 1 \quad - (3)$$

$$1x_1 + 2x_2 = 6 \quad - (2)$$

**ОДР**

$x_1$	0	-1
$x_2$	1	0



Строим четвертую линию  
ограничения

$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad - (1)$

$-1x_1 + 1x_2 = 1 \quad - (3)$

$0x_1 + 1x_2 = 2 \quad - (4)$

$1x_1 + 2x_2 = 6 \quad - (2)$

О Д  
Р



# Поиск оптимального решения

Для поиска оптимального решения в ОДР строим линию уровня и вектор-градиент.

**Линия уровня** целевой функции – прямая линия, построенная по уравнению целевой функции, в множестве точек которой целевая функция принимает одно и то же значение.

**Вектор-градиент** целевой функции – вектор, координаты начала которого совпадают с началом координат, а координатами конца, являются частные производные этой функции, вычисленные в некоторой точке.

**Свойство вектора-градиента** – указывает направление наиболее быстрого возрастания функции в окрестности выбранной точки и он перпендикулярен линиям уровня.

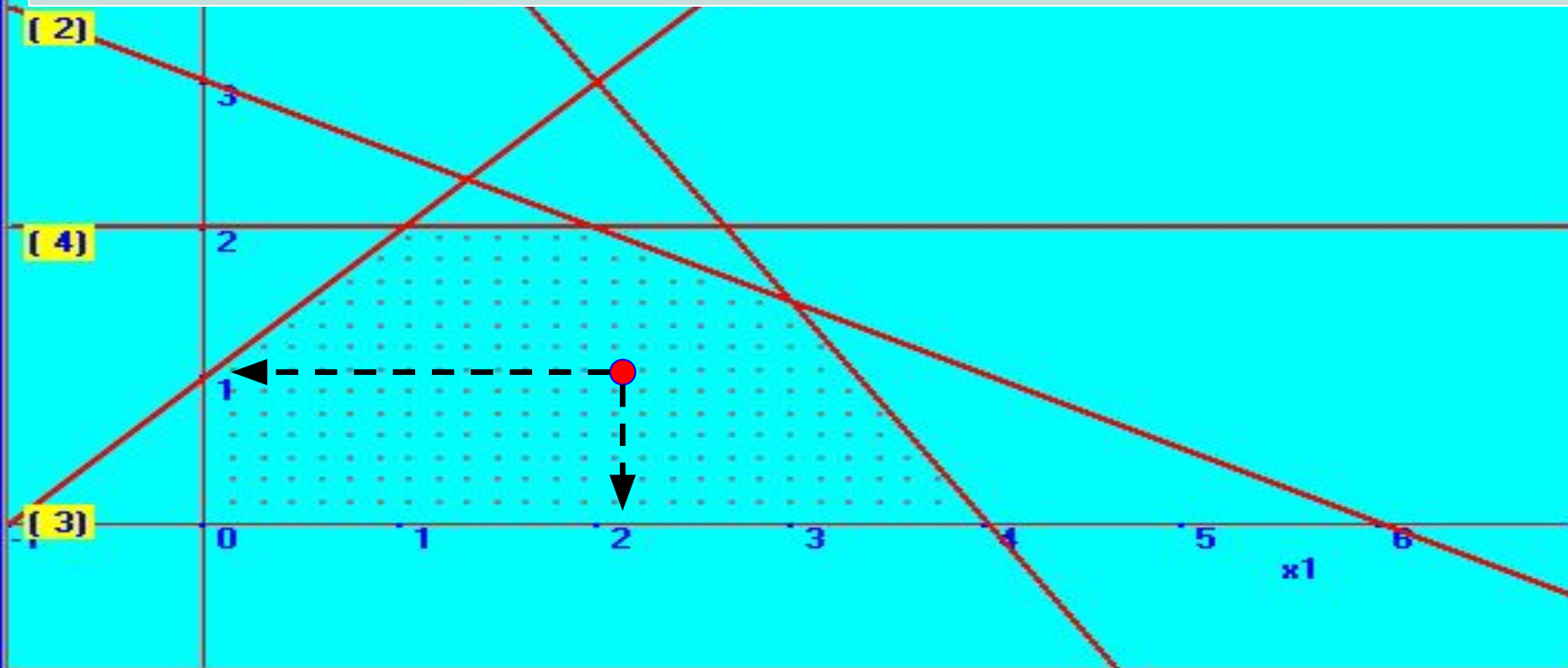
## **Алгоритм построения линии уровня:**

- в ОДР произвольно выбирается точка, с координатами  $x_1$  и  $x_2$  удобными для вычисления;
- координаты выбранной точки подставляются в уравнение целевой функции;
- рассчитывается значение целевой функции;

# Алгоритм построения линии уровня:

1) в ОДР произвольно выбирается точка, с координатами удобными для вычисления (например,  $x_1=2$ ,  $x_2=1$ );

2) координаты выбранной точки подставляются в уравнение целевой функции:  $F(x) = 5x_1 + 4x_2 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$ ;

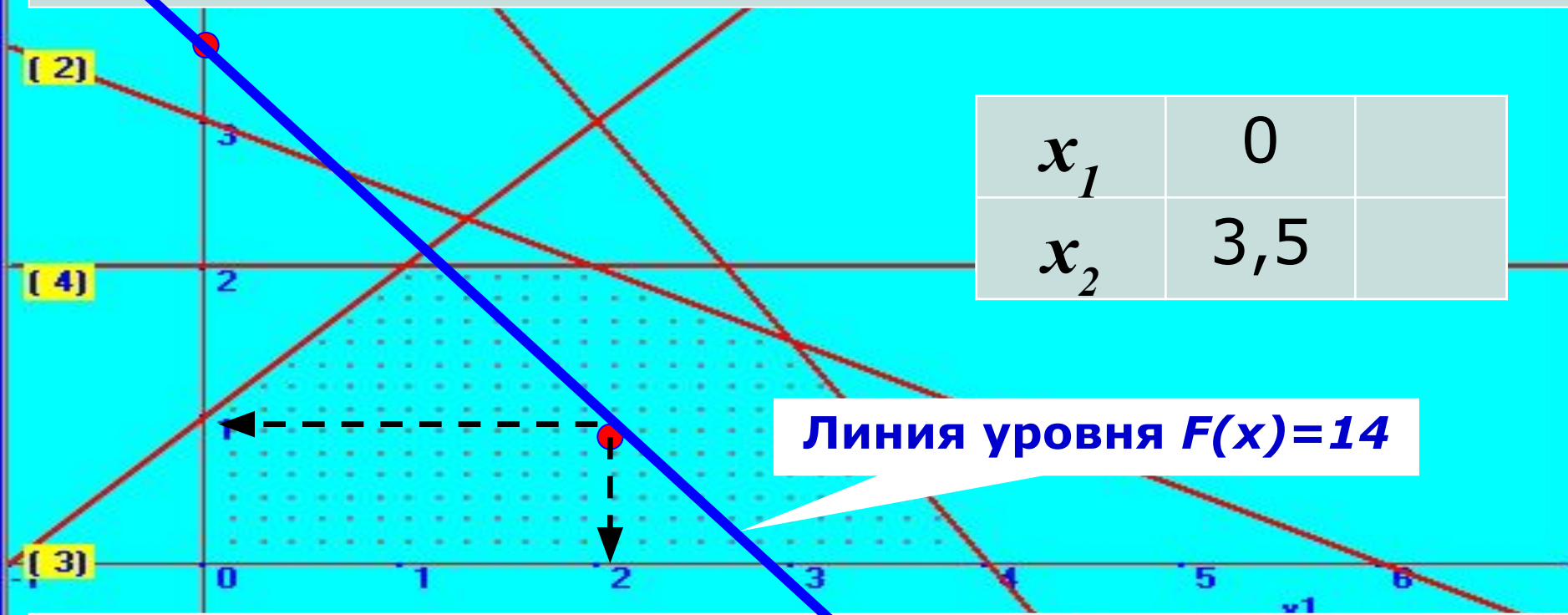


# Алгоритм построения линии уровня:

3) Записывается уравнение целевой функции

$$5x_1 + 4x_2 = 14;$$

4) По уравнению целевой функции  $F(x)$  находятся координаты второй точки для построения линии уровня;



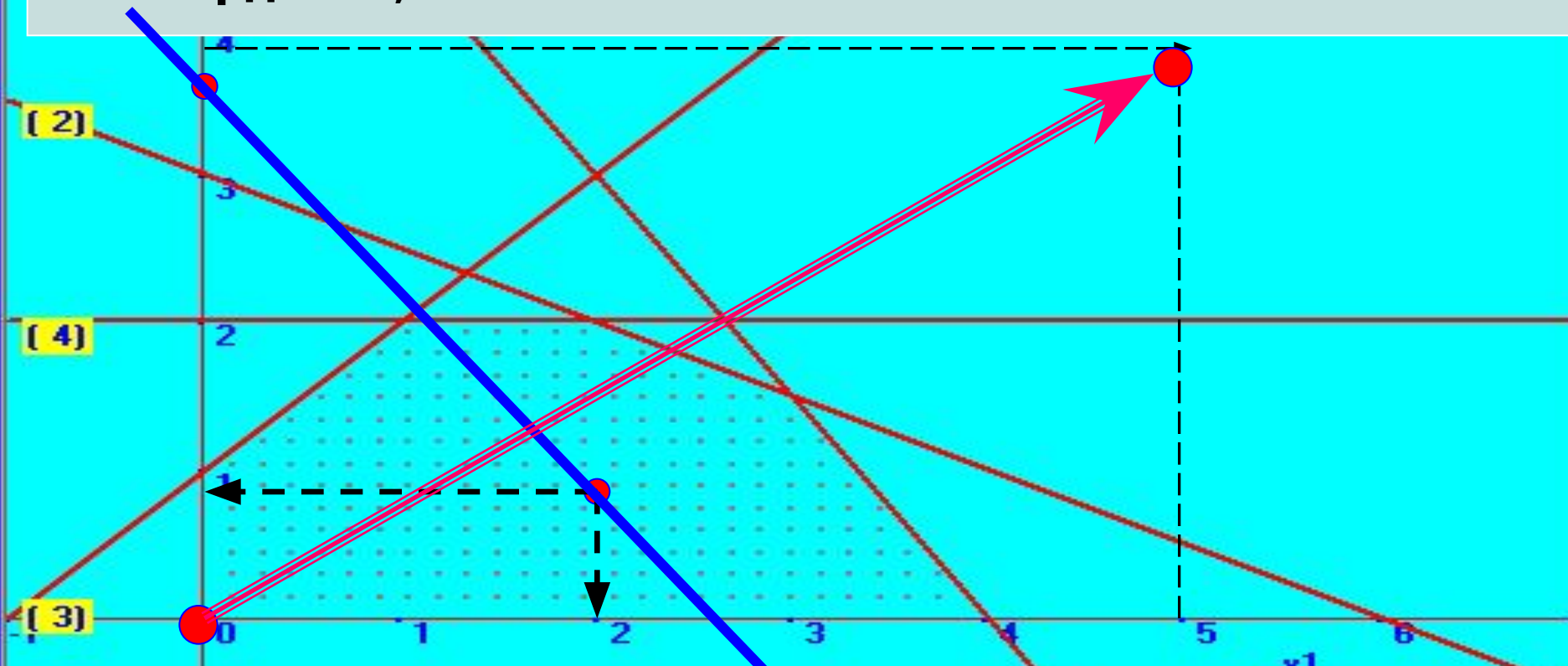
5) Через две точки проводится линия уровня  $F(x)=14$ ;

# Построение вектора-градиента

1) Координатами конца вектора-градиента являются коэффициенты при переменных в целевой функции (5,4)

$$5x_1 + 4x_2 = 14 ;$$

2) Начало вектора-градиента совпадает с началом координат;



3) Строим вектор-градиент.





Линия уровня

Вектор-градиент

ОПТИМУМ

(1)

Обј

x2

(2)

(4)

(3)

x1

- ◆ В крайней, угловой точке достигается максимум целевой функции. Для нахождения координат этой точки достаточно решить систему из двух уравнений прямых, дающих в пересечении точку максимума:

- ◆  $6x_1 + 4x_2 = 24,$

- ◆  $x_1 + 2x_2 = 6$

- ◆ Решая систему, получаем  $x_1 = 3, x_2 = 1.5$

- ◆ Ответ

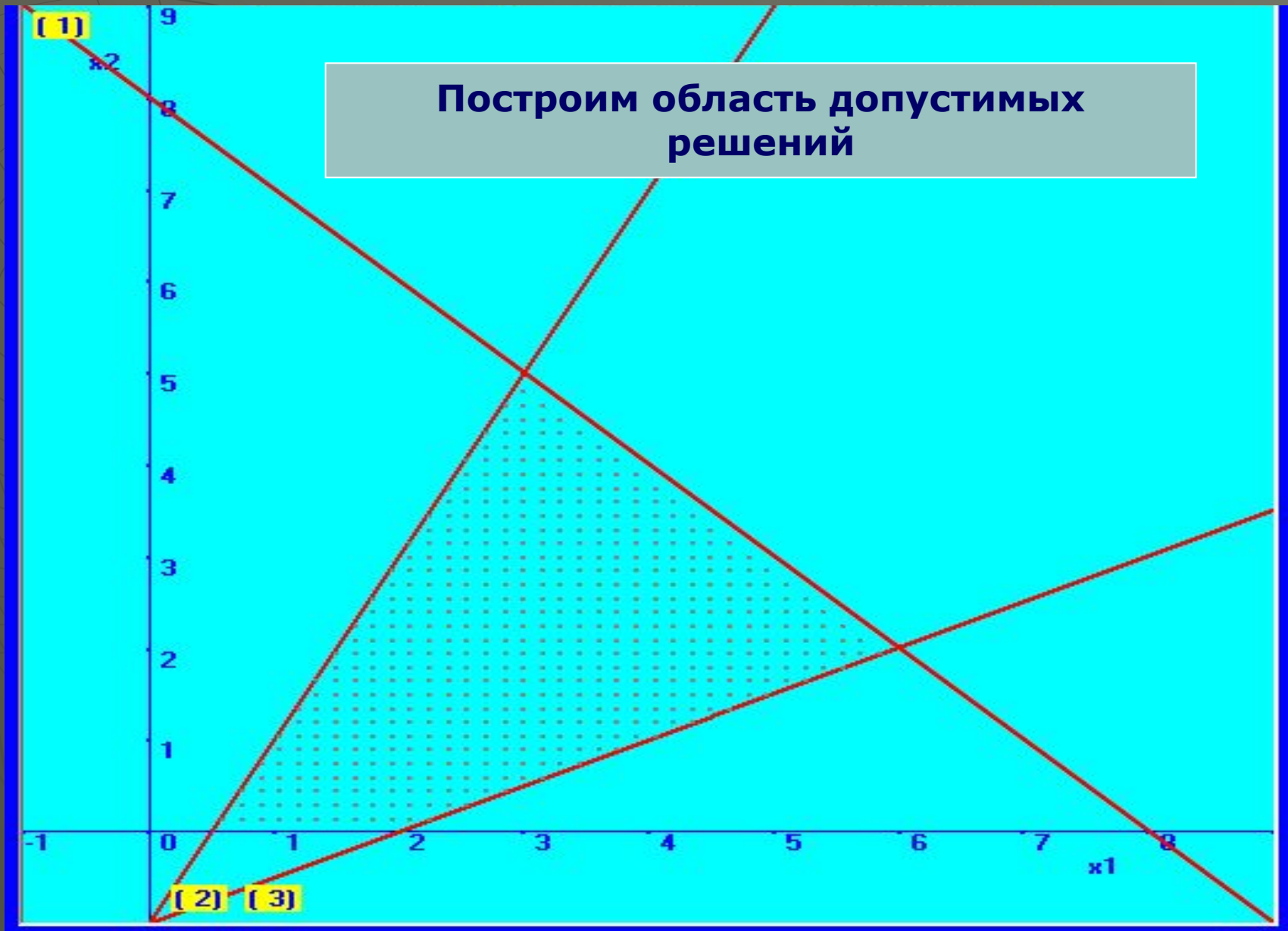
- ◆ Для получения максимальной прибыли - **21** тыс. ден. единиц ( $F(x) = 5x_1 + 4x_2 = 5 \times 3 + 4 \times 1.5 = 21$ ) необходимо выпустить 3 тонны первого продукта и полторы тонны второго.

# Особые случаи решения ЗЛП

В процессе решения ЗЛП могут встретиться особые случаи:

- ✓ Неединственность оптимального решения;
- ✓ Вырожденность базисного решения;
- ✓ Отсутствие конечного оптимума;
- ✓ Область допустимых решений представлена одной точкой;
- ✓ Множество допустимых решений пусто.

# Неединственность оптимального решения

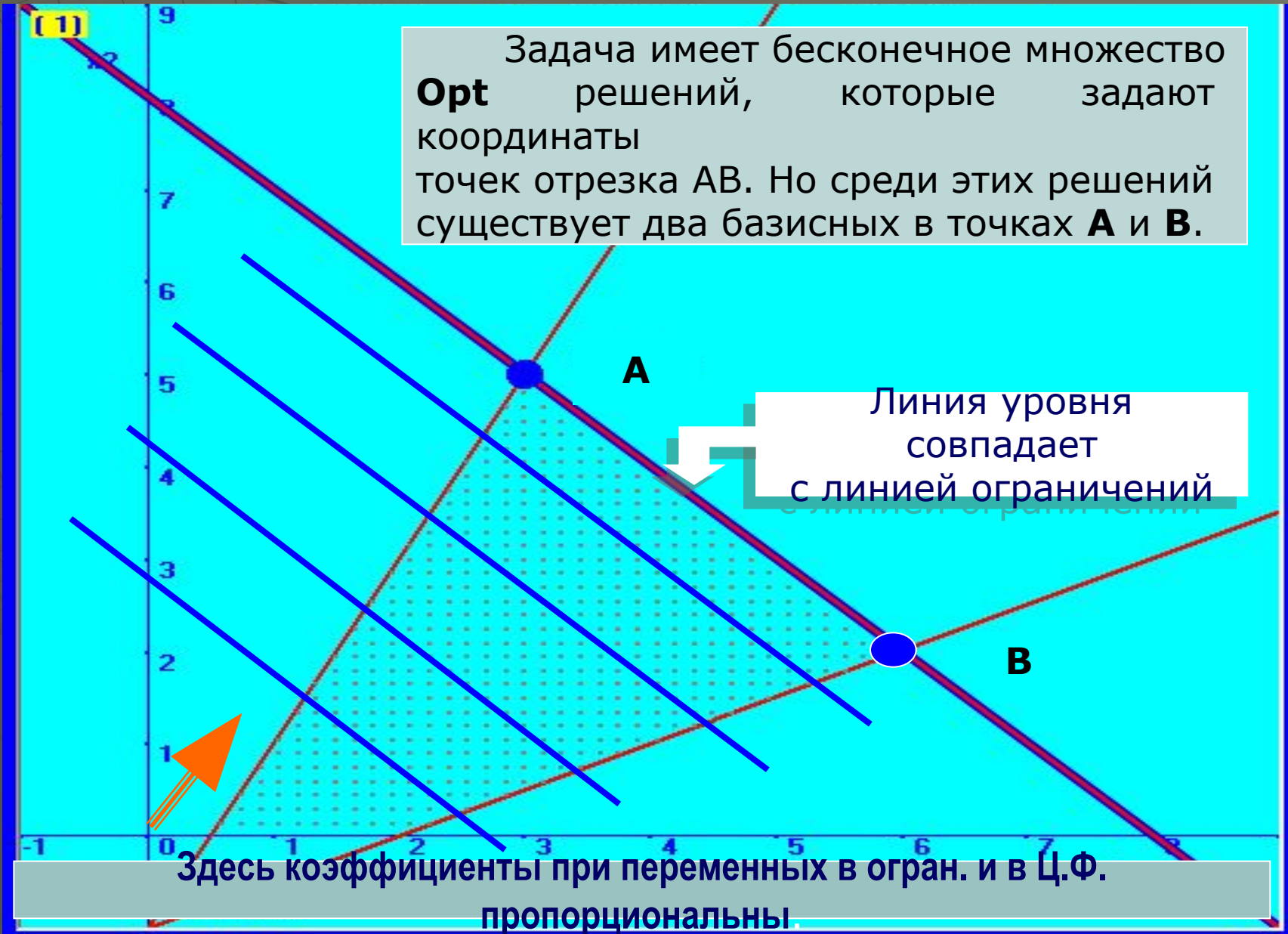


# Неединственность оптимального решения

Задача имеет бесконечное множество **Opt** решений, которые задают координаты точек отрезка АВ. Но среди этих решений существует два базисных в точках **А** и **В**.

Линия уровня совпадает с линией ограничений

Здесь коэффициенты при переменных в огран. и в Ц.Ф. пропорциональны.



# Вырожденность базисного решения

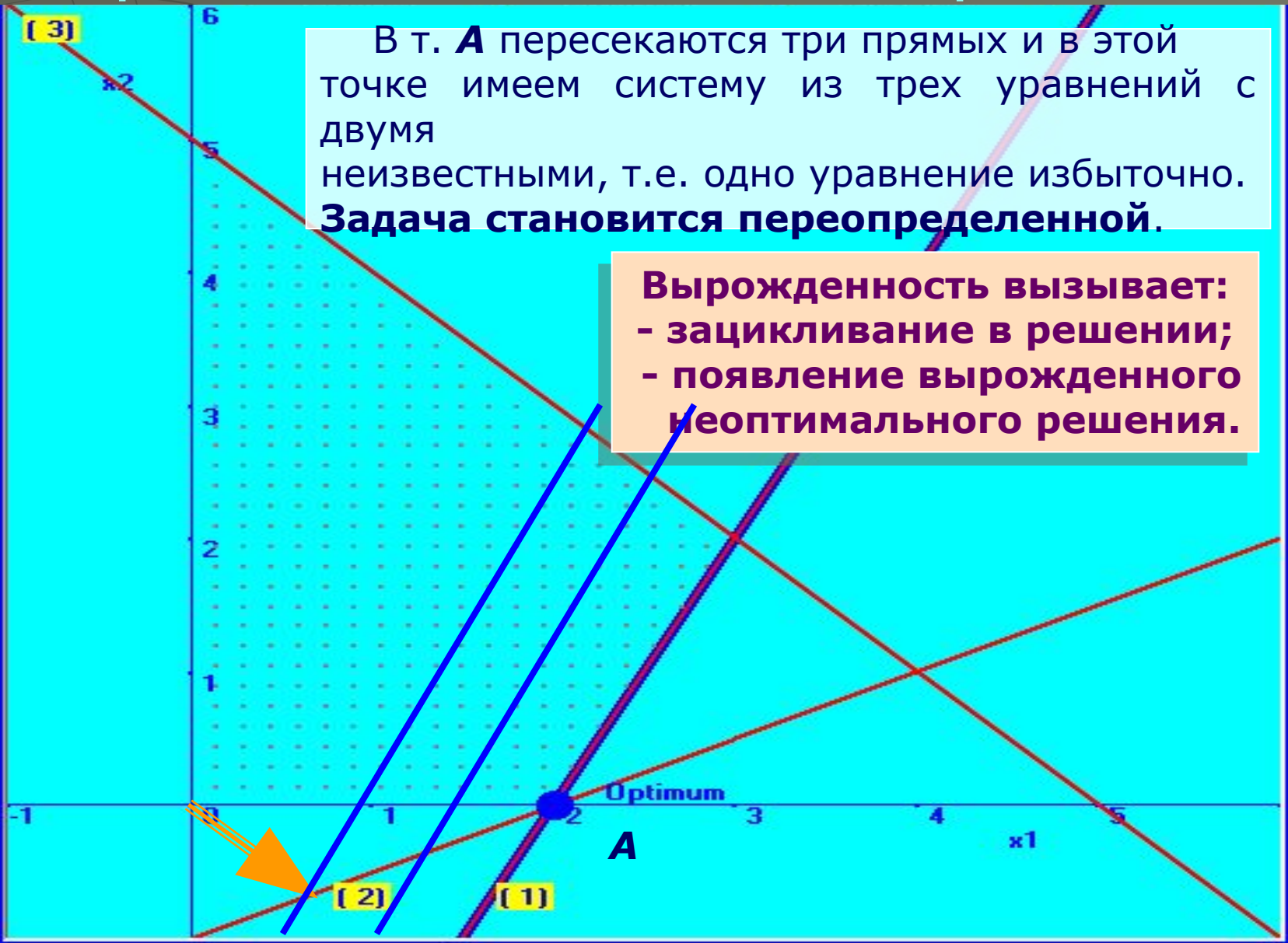


# Вырожденность базисного решения

В т. **A** пересекаются три прямых и в этой точке имеем систему из трех уравнений с двумя неизвестными, т.е. одно уравнение избыточно. **Задача становится переопределенной.**

**Вырожденность вызывает:**

- закливание в решении;
- появление вырожденного неоптимального решения.



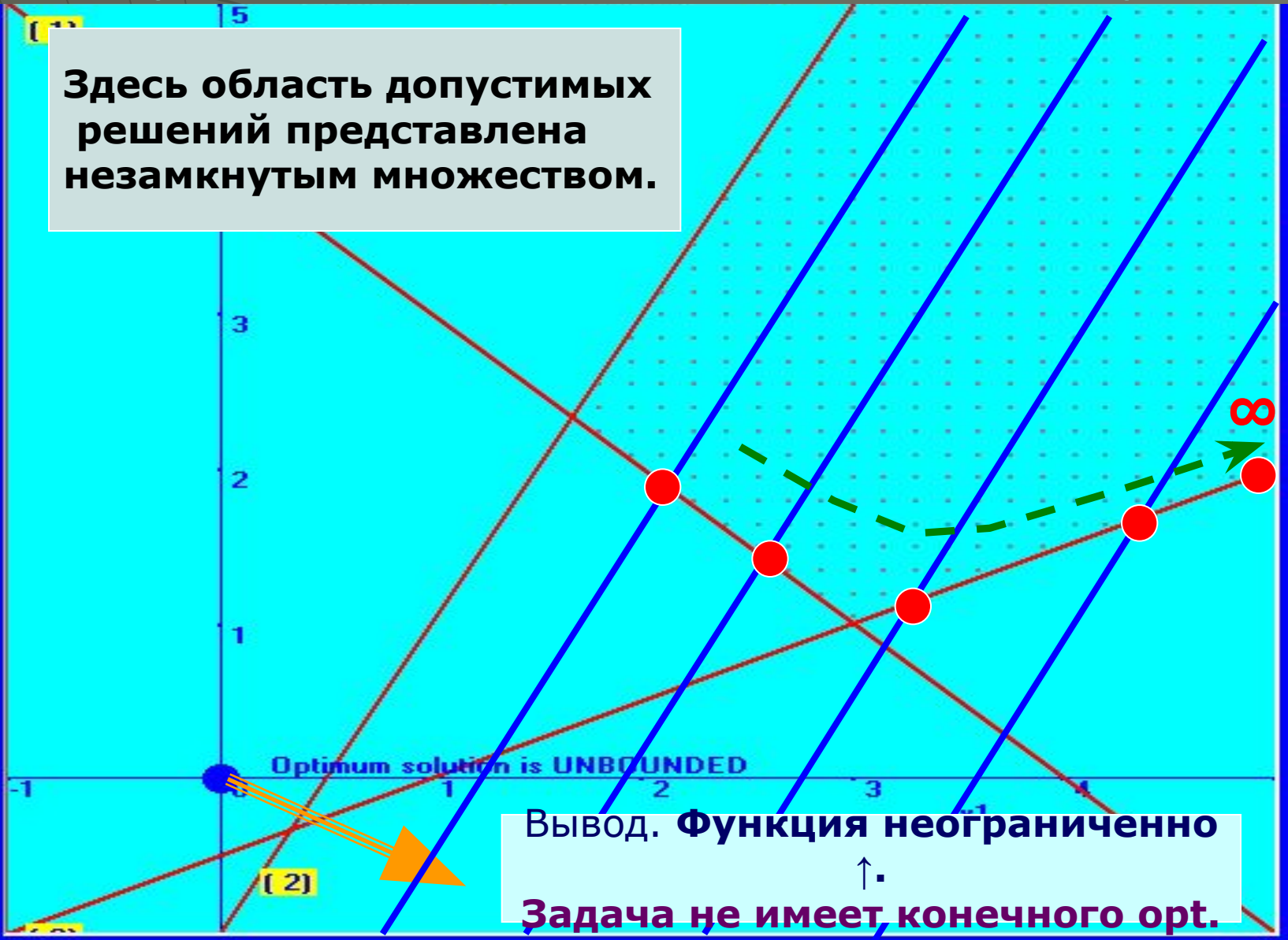
# Отсутствие конечного оптимума





# Отсутствие конечного оптимума

Здесь область допустимых решений представлена незамкнутым множеством.

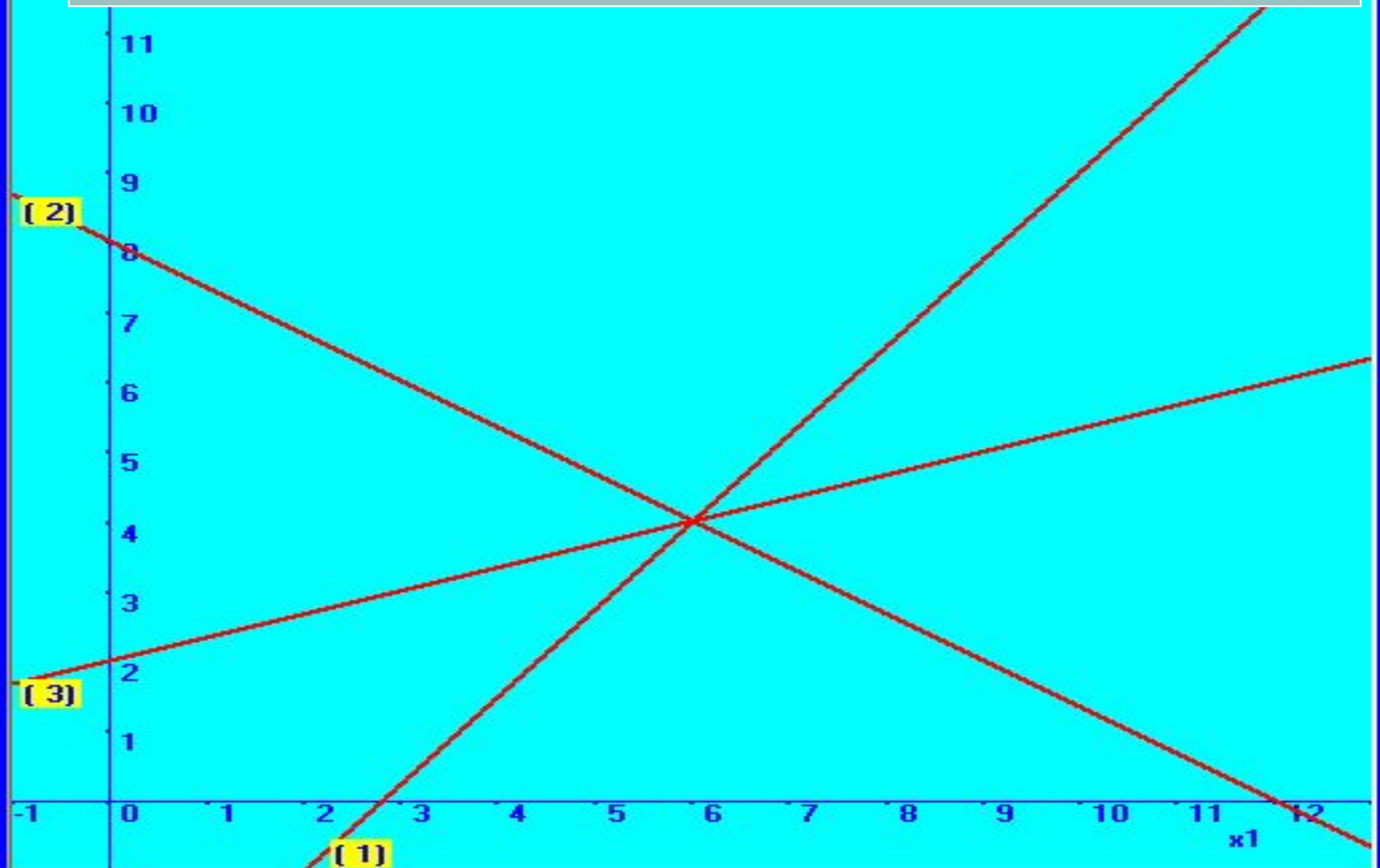


Вывод. **Функция неограниченно**

**Задача не имеет конечного опт.**

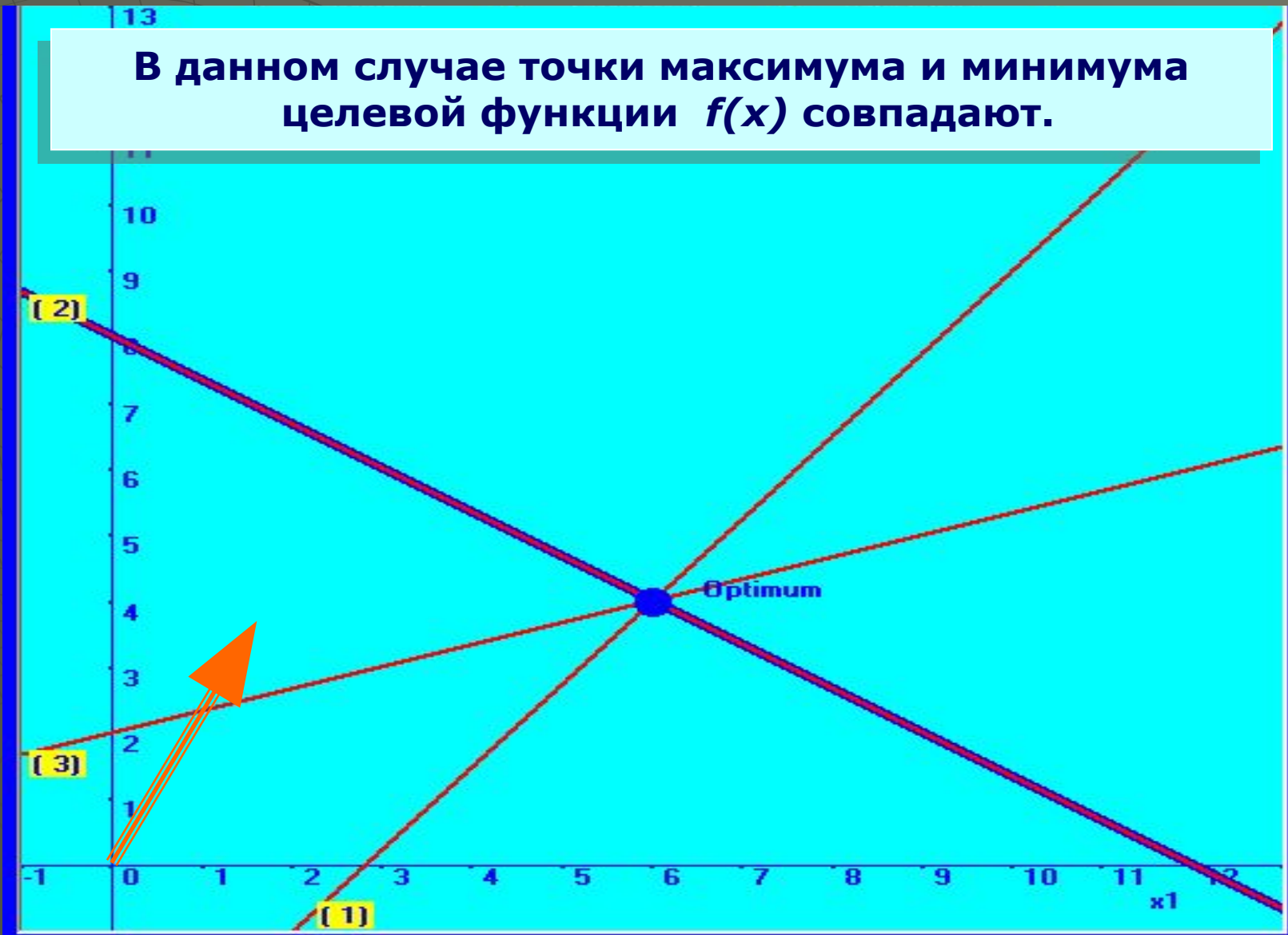
# Область допустимых решений представлена одной точкой

Построим область допустимых решений для случая,  
когда все линии пересекаются в одной точке.

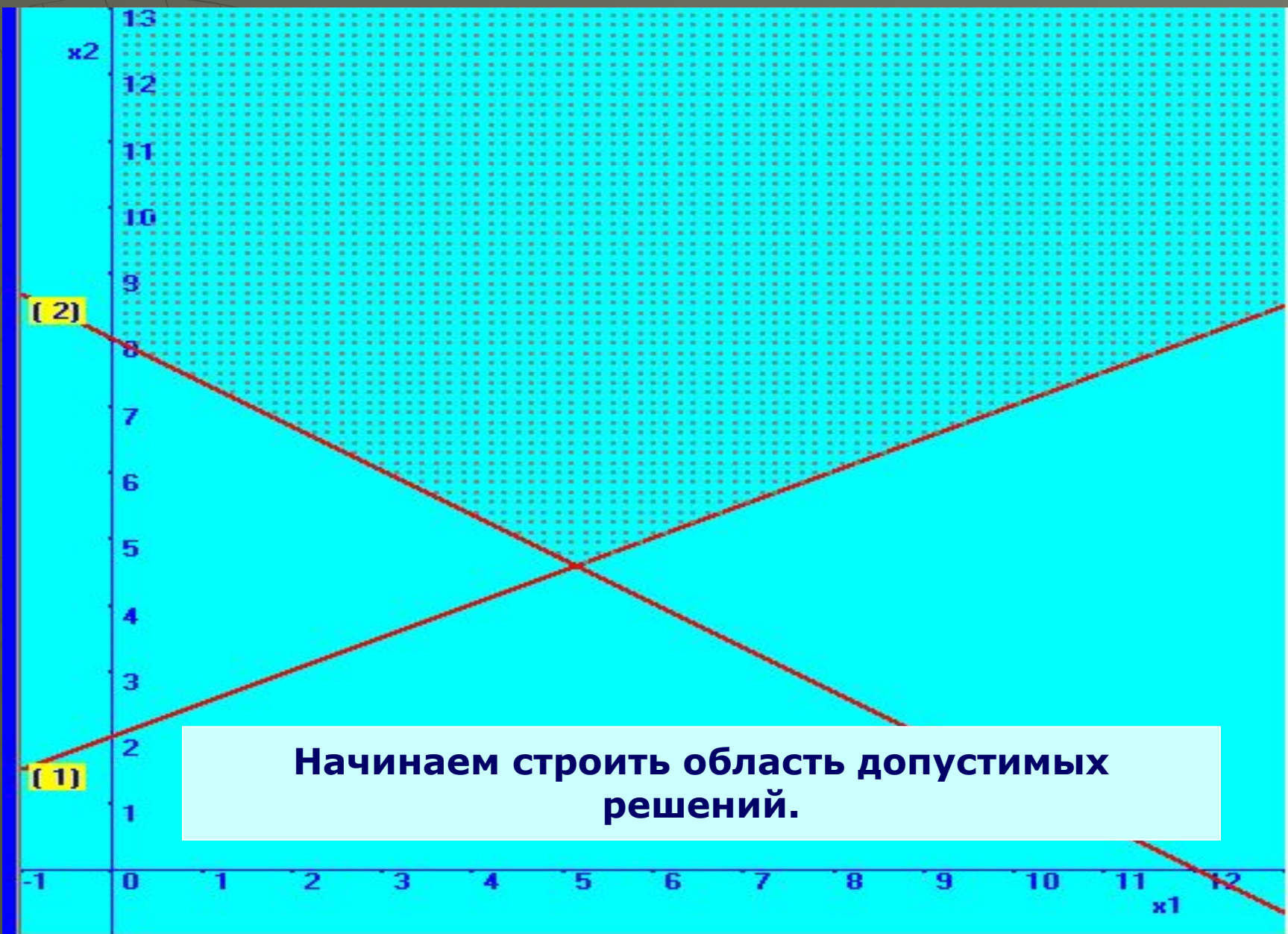


# Область допустимых решений представлена одной точкой

В данном случае точки максимума и минимума  
целевой функции  $f(x)$  совпадают.



# Множество допустимых решений пусто



# Множество допустимых решений пусто

После нанесения третьего ограничения, область допустимых решений исчезает, т.е. множество пусто.



Экономический смысл основных и дополнительных переменных в канонической форме задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов (на примере задачи о коврах).

$$f(\bar{X}) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

- ◆  $7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 80,$
- ◆  $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 480,$
- ◆  $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 + x_7 = 130,$
- ◆  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$

$$\bar{X}^* = (0; 30; 10; 0)$$

# Понятие устойчивости (чувствительности) решения

Существуют интервалы изменения коэффициентов в  $F(x)$ , при которых оптимальное решение сохраняется.

1. Изменение коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  в целевой функции вызывает изменение угла наклона прямой  $F(x)$  – линии уровня.
2. Изменение констант в правой части ограничения

Интервал оптимальности решения

ОПТИМУМ

ОПТИМУМ

ОПТИМУМ

Изменение констант в правой части ограничений рассмотрим отдельно.