ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫОПТИМИЗАЦИИ

Кафедра Прикладной Математики (к.241)
Турундаевский Виктор Борисович

Структура дисциплины

- Лекции – 32 ч.
- Практические занятия – 32 ч.

ОТЧЕТНОСТЬ

- Контрольная работа - 5
- ТЕСТЫ - 1
- ФОРУМ - 1
- Экзамен

ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- ***Исследование операций*** — научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.
  Операция — любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели.
  Оптимальными считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других.

ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

- **1. Постановка задачи.**
- **2. Построение содержательной модели рассматриваемого объекта.**
- **3. Построение математической модели.**
- **4. Анализ модели или получение решения задачи.**
- **5. Анализ решения**
- **6. Проверка полученных результатов на их адекватность природе изучаемой системы.**

Лекция 1.

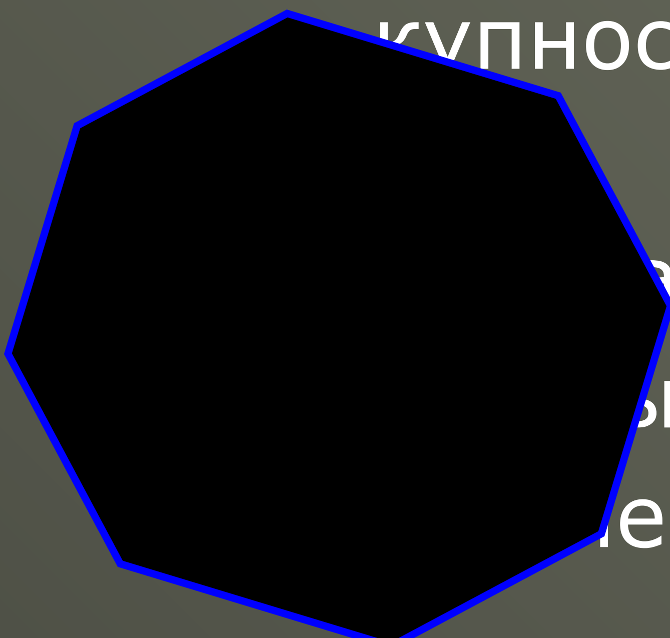
- Экономико-математическая модель (ЭММ). Понятие, пример, общая классификация ЭММ.
- Общая задача линейного программирования, основные элементы и понятия.
- Общая запись оптимизационной ЭММ (задача оптимального программирования). Основные элементы и понятия.
- Графический метод решения задачи линейного программирования.
- Особые случаи решения ЗЛП графическим методом.
- Каноническая форма записи ЗЛП. Способы приведения ЗЛП к каноническому виду
- Экономический смысл основных и дополнительных переменных в канонической форме задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов

Математический аппарат линейного программирования

Понятие о выпуклых множествах

Множество – определенная сово-

купность объектов (элементов)

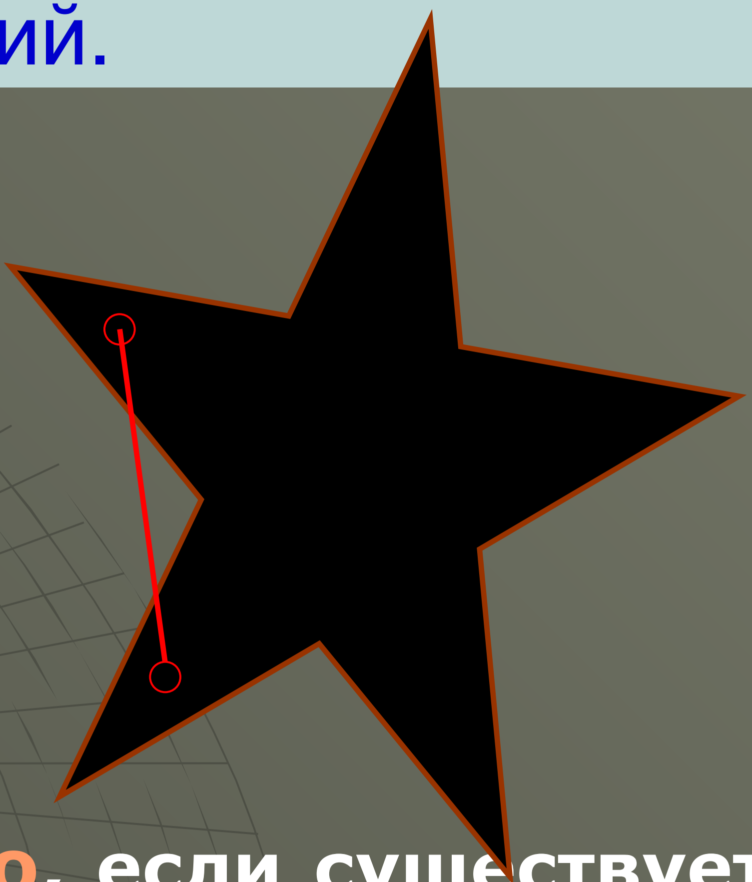


азличают множества:

ыпуклые;

евыпуклые.

Множество выпукло, если вместе с его любыми двумя точками ему принадлежит и весь отрезок их соединяющий.

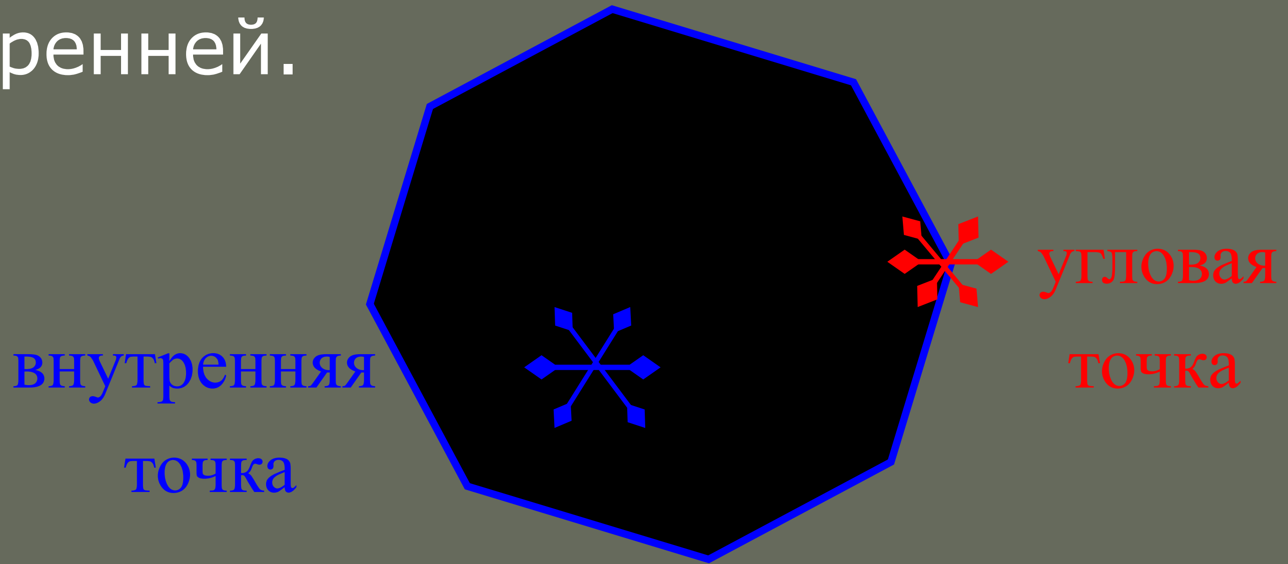


Множество невыпукло, если существует хотя бы одна такая пара точек множества, что отрезок, соединяющий эти точки не принадлежит целиком этому множеству.

Понятие угловой точки

Для выпуклых множеств вводится понятие угловой точки.

Угловой (крайней) **точкой** выпуклого множества называется точка, через которую нельзя провести ни одного отрезка состоящего только из точек данного множества, для которого она была бы внутренней.



Пример 1. Задача оптимального использования ресурсов (задача о коврах)

- В распоряжении фабрики имеется определенное количество ресурсов: рабочая сила, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Например, пусть это будут ресурсы трех видов: рабочая сила (80 чел./дней), сырье (480 кг пряжи) и оборудование (130 станкочасов). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в табл.1.
- Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	Ковер «Лужайка»	Ковер «Силуэт»	Ковер «Детский»	Ковер «Дымка»	
Труд	**7**	**2**	**2**	**6**	**80**
Сырье	**5**	**8**	**4**	**3**	**480**
Оборудование	**2**	**4**	**1**	**8**	**130**
Цена ед. изделия (тыс. руб.)	**3**	**4**	**3**	**1**	

Экономико-математическая модель задачи

- **Переменные**
- **Обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 количество ковров каждого типа.**
- **Целевая функция** – это выражение, которое необходимо максимизировать:
- $F(x) = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4$.
- **Функциональные ограничения (ограничения по ресурсам)**
- $7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \le 80$ (человеко/дней),
- $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 480$ (кг пряжи),
- $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \le 130$ (станкочасов),
- Прямые ограничения $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

Пример 2.

Некоторое предприятие изготавливает два вида продукции I и II Для производства которой использ… А и В.

Сырье	Расход сырья на 1т продукции		Суточный запас, т
	Прод. I	Прод. II	
A	**6**	**4**	**24**
B	**1**	**2**	**6**

… сырья состав…

Расхо… …ого вида продук…

Сут… …вышает спроса на продукцию I более чем на 1т. Спрос на продукцию II не превышает 2 т в сутки.

Основные цены 1-й тонны продукции равны:

5 тыс. ден. ед на прод. I и **4** тыс. ден. ед на прод. II.

Требуется определить объемы выпуска продукции обеспечивающие *max* прибыль.

Составим ЭММ задачи по следующей схеме

1. Идентифицируем переменные;
2. Выявим цель задачи, для достижения которой из всех допустимых значений перемененных нужно выбрать такое сочетание, которое будет соответствовать оптимальному решению;
3. Выявим ограничения, которые будут наложены на переменные.

Далее реализуем приведенную схему.

1. Поскольку в условии задачи требуется определить объемы производства каждого вида продукции, то обозначим искомые переменные через x_1 и x_2:

x_1 – суточный объем производства продукции первого вида (т);

x_2 – суточный объем производства продукции второго вида (т).

2. Составим целевую функцию задачи.

Прибыль предприятия будет складываться в виде суммы прибылей от реализации продукции первого и второго вида. Запишем это условие.

$$F(x) = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$$

3. Выделим ограничения:

- на расход используемых продуктов

$6x_1 + 4x_2 \le 24$ - по сырью **A,**

$1x_1 + 2x_2 \le 6$ - по сырью **B,**

$-1x_1 + 1x_2 \le 1$ - по превышению спроса продукции **II** над **I,**

$0x_1 + 1x_2 \le 2$ - по спросу на продукцию **II,**

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ - условие неотрицат.

Задачи подобного вида называю ЗПП

- Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

- К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального решения), само возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с

Общая постановка ЗЛП

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных X1, X2, E, Xn , максимизирующие линейную форму:

f (x1, x2, …, xn) = c1x1 + … +cnxn , (0.1)

при условиях :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (>=,=) b_i \qquad i = \overline{1, m}$$

(0.2)

$$x_j \ge 0; \qquad j = \overline{1, p}; \qquad p \le n$$

(0.3)

Соотношения (0.2) и (0.3) будем называть соответственно функциональными и прямыми ограничениями ЗЛП.

Значения переменных Xj (j = 1, 2, ..., n) можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\overline{X} = (X_{1,}, X_2, ..., X_n)$ пространства En.

Определение

Планом или допустимым решением задачи линейного программирования будем называть вектор пространства En, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи. Множество всех планов задачи линейного программирования (0.1)-(0.3) будем обозначать P.

Определение.

План $\overline{X^*} = (X^*{}_1, X^*{}_2, ..., X^*{}_n)$ будем называть решением задачи линейного программирования или ее оптимальным планом, если $f(\overline{X}^*) = \max\limits_{\overline{X} \in P} f(\overline{X})$

Определение.

Будем говорить, что задача линейного программирования разрешима, если она имеет хотя бы один оптимальный план.

Основная ЗЛП

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности. Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных $X_{1,}, X_{2}, \ldots, X_{n}$ максимизирующих линейную форму

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (0.4)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m} \qquad (0.5)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n} \qquad (0.6)$$

Основная ЗЛП

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности. Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ максимизирующих линейную форму

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (0.4)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad (0.5)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \qquad (0.6)$$

или в векторной форме

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to \max \qquad (0.7)$$

$$A\bar{x} \le \bar{b} \qquad (0.8)$$

$$\bar{x} \ge \bar{0} \qquad (0.9)$$

Где $\bar{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов ограничений (0.5). Задача (0.4)-(0.5) или (0.7)-(0.9) называется основной ЗЛП.

Основная ЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при $m1 = m$, $p = n$.

Для построения общего метода решения ЗЛП разные формы ЗЛП должны быть приведены к некоторой стандартной форме, называемой канонической задачей линейного программирования (КЗЛП).

Каноническая ЗЛП

В канонической форме

1) все функциональные ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;
2) все переменные неотрицательны;
3) целевая функция подлежит максимизации.

Таким образом, КЗЛП имеет вид

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (0.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (0.11)$$

$$i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,m}; \quad b_j \ge 0; \quad x_j \ge 0 \qquad (0.12)$$

КЗЛП является частным случаем общей ЗЛП .

В матрично-векторной форме КЗЛП имеет вид

$$f(\overline{x}) = (\overline{c}, \overline{x}) \to \max$$
$$A\overline{x} = \overline{b}$$
$$\overline{x} \geq \overline{0} \quad \overline{b} \geq \overline{0}$$

или в векторной форме

$$\max(\overline{C}, \overline{X})$$
$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{b}$$
$$\overline{b} \geq \overline{0}, \quad \overline{x} \geq 0,$$

где $\overline{a}_j$ - *j*-ый столбец матрицы А

Очевидно, что определения плана и оптимального плана, данные для общей ЗЛП, справедливы и для КЗЛП.

Любую ЗЛП можно привести к аноническому виду, используя следующие правила:

а) максимизация целевой функции

$$f(\overline{x}) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$$

равносильна минимизации целевой функции

$$f(\overline{x}) = - C_1X_1 - C_2X_2 - \ldots - C_nX_n;$$

б) ограничение в виде неравенства, например

$3X1 + 2X2 - X3 \le 6$, может быть приведено к стандартной форме $3X1 + 2X2 - X3 + X4 = 6$, где новая переменная X4 неотрицательна. Ограничение

$X1 - X2 + 3X3 > 10$ может быть приведено к стандартной форме $X1 - X2 + 3X3 - X5 = 10$, где новая переменная X5 неотрицательна;

в) если некоторая переменная X_K может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду

$X_K = X_K^{'} - X_K^{''}$ где $X_K^{''} \ge 0$ и $X_K^{'} \ge 0$.

Пример 2.1.

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$2x_1 - x_2 \ge 1$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

$$f(\bar{x}) = 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 - x_2 - x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = 2$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0$$

Задача о костюмах

- **Пример 3.** *Планирование выпуска продукции пошивочного предприятия.*
- **Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского – 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.**

Экономико-математическая модель задачи о костюмах

- **Переменные**: $x1$ – число женских костюмов; $x2$ – число мужских костюмов.
- Максимизировать **целевую функцию**
- $f(x) = 10\, x1 + 20\, x2$
- Ограничения **задачи имеют вид:**
- $x1 + x2 \le 150,$
- $2\, x1 + 0{,}5\, x2 \le 240,$
- $x1 + 3{,}5\, x2 \le 350,$
- $x2 \ge 60,$
- $x1 \ge 0.$

Графический метод решения ЗЛП

- Строится многоугольная область допустимых решений (ОДР) ЗЛП.
- Строится вектор-градиент целевой функции (ЦФ) с началом в точке x_0, (0;0)
- Линия уровня $c_1x_1+c_2x_2 = a$ (a – постоянная величина) – прямая, перпендикулярная вектору-градиенту , – передвигается в направлении этого вектора в случае максимизации $f(x_1,x_2)$ до тех пор, пока не покинет пределов ОДР. Предельная точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума $f(x_1,x_2)$.
- Для нахождения координат точки максимума достаточно решить систему уравнений прямых, дающих в пересечении точку максимума. Значение $f(x_1,x_2)$, найденное в полученной точке, является максимальным значением целевой функции.

В качестве примера рассмотрим составленную ранее ЭММ (пример 2):

$$F(x) = 5x_1 + 4x_2 \Rightarrow max$$

$6x_1 + 4x_2 \le 24$, – (1)

$1x_1 + 2x_2 \le 6$, – (2)

$-1x_1 + 1x_2 \le 1$, – (3)

$0x_1 + 1x_2 \le 2$, – (4)

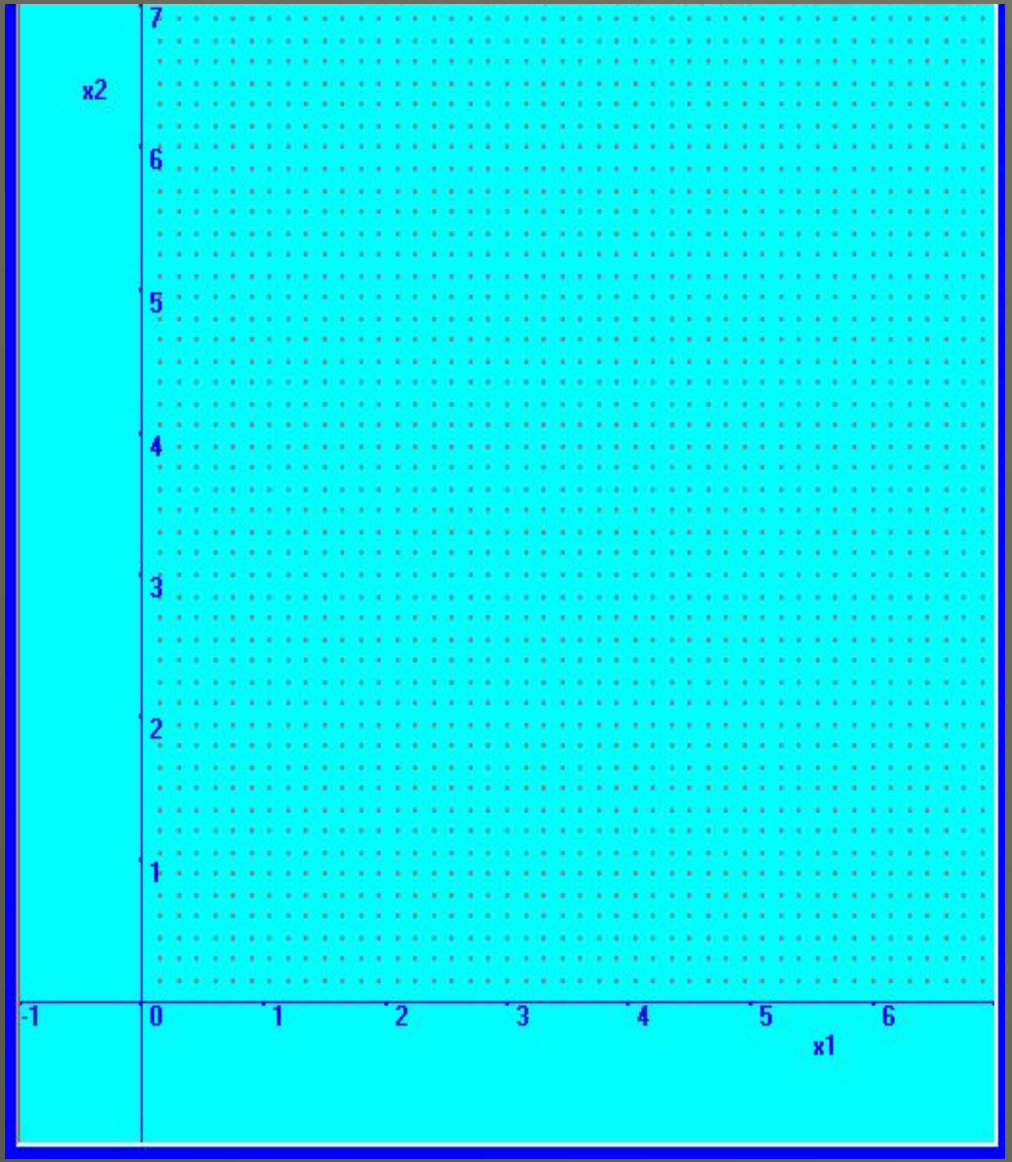
$x_1 \ge 0$, – (5)

$x_2 \ge 0$. – (6)

Затем пронумеруем все ограничения

Построение ОДР

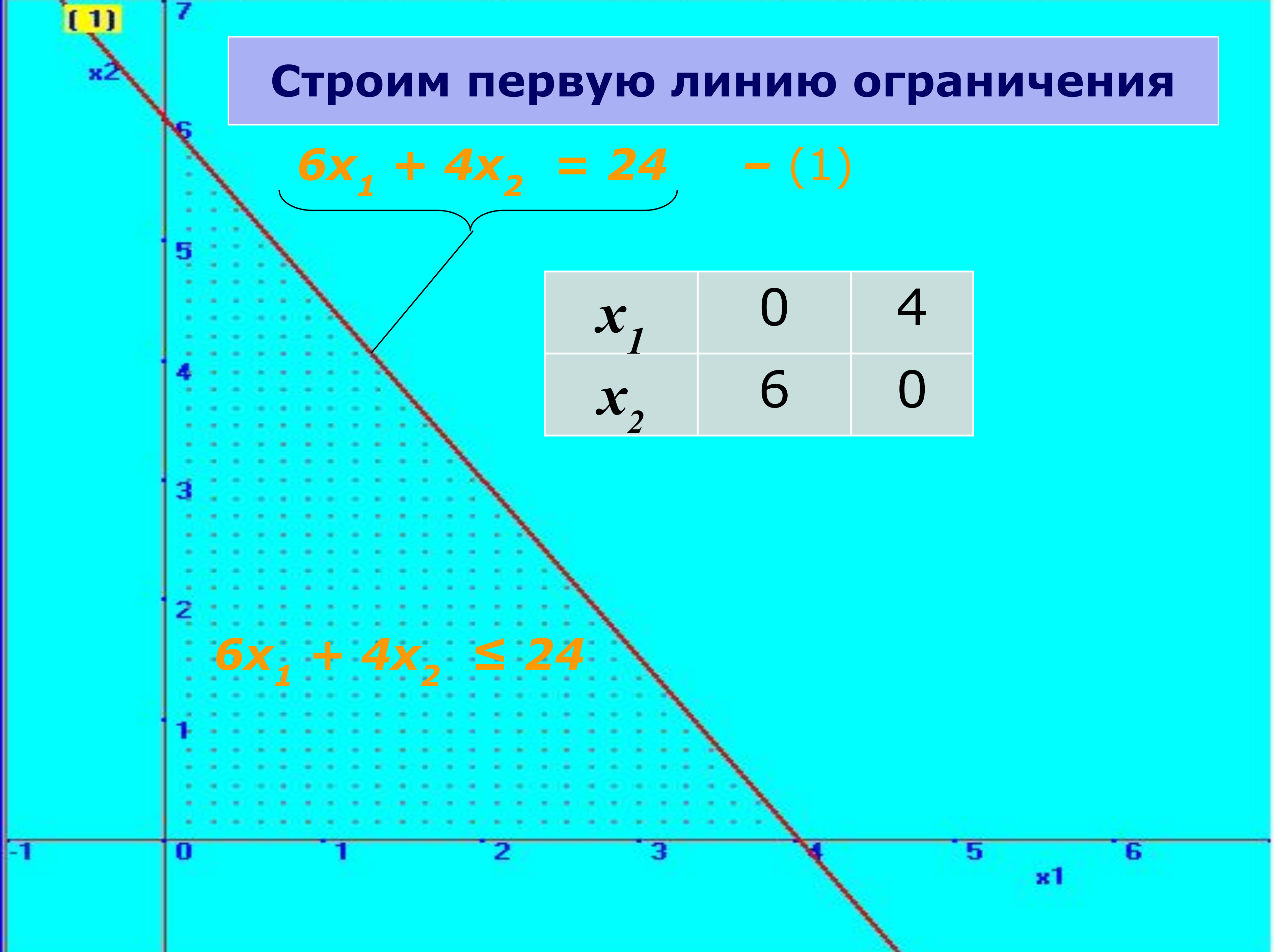
- проведем оси и обозначим их через x_1 и x_2;
- на оси нанесем деления;
- учтем условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, это означает, что решение необходимо искать в первой четверти;
- далее каждое неравенство поочередно заменяем на равенство и по ним строим прямые на графике.



Строим первую линию ограничения

$$\underbrace{6x_1 + 4x_2 = 24}\quad -\ (1)$$

x_1	0	4
x_2	6	0



$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$

Строим вторую линию ограничения

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad - (1)$$

x_1	0	6
x_2	3	0

$$\underbrace{1x_1 + 2x_2 = 6}\quad - (2)$$

Строим третью линию ограничения

$6x_1 + 4x_2 = 24$ – (1)

$-1x_1 + 1x_2 = 1$ – (3)

x_1	0	-1
x_2	1	0

$1x_1 + 2x_2 = 6$ – (2)

Строим четвертую линию ограничения

$6x_1 + 4x_2 = 24$ – (1)

$-1x_1 + 1x_2 = 1$ – (3)

$0x_1 + 1x_2 = 2$ – (4)

$1x_1 + 2x_2 = 6$ – (2)

Поиск оптимального решения

Для поиска оптимального решения в ОДР строим линию уровня и вектор-градиент.

Линия уровня целевой функции – прямая линия, построенная по уравнению целевой функции, в множестве точек которой целевая функции принимает одно и то же значение.

Вектор-градиент целевой функции – вектор, координаты начала которого совпадают с началом координат, а координатами конца, являются частные производные этой функции, вычисленные в некоторой точке.

Свойство вектора-градиента – указывает направление наиболее быстрого возрастания функции в окрестности выбранной точки и он перпендикулярен линиям уровня.

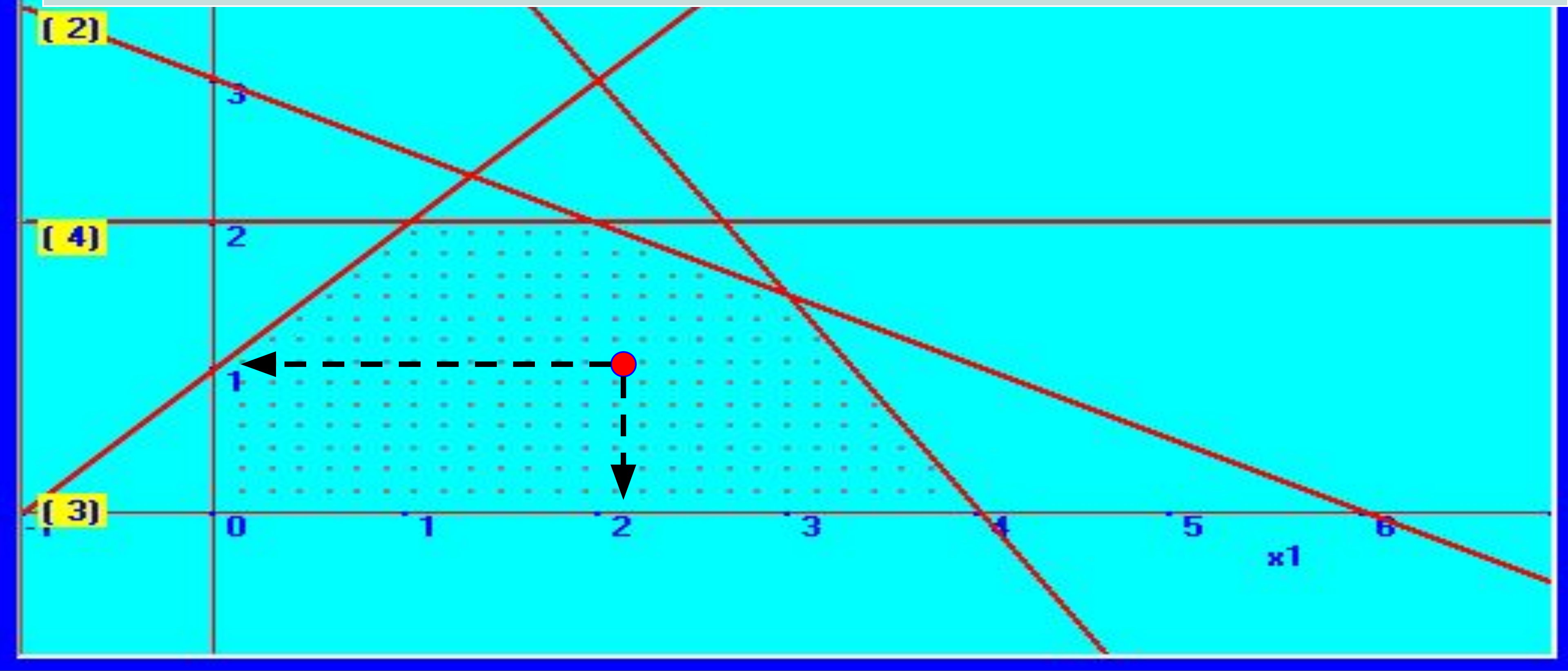
Алгоритм построения линии уровня:

- в ОДР произвольно выбирается точка, с координатами x_1 и x_2 удобными для вычисления;
- координаты выбранной точки подставляются в уравнение целевой функции;
- рассчитывается значение целевой функции;

Алгоритм построения линии уровня:

1) в ОДР произвольно выбирается точка, с координатами удобными для вычисления (например, *x1=2, x2=1*);

2) координаты выбранной точки подставляются в уравнение целевой функции: $F(x) = 5x_1 + 4x_2 = 5\cdot 2 + 4\cdot 1 = 14$;



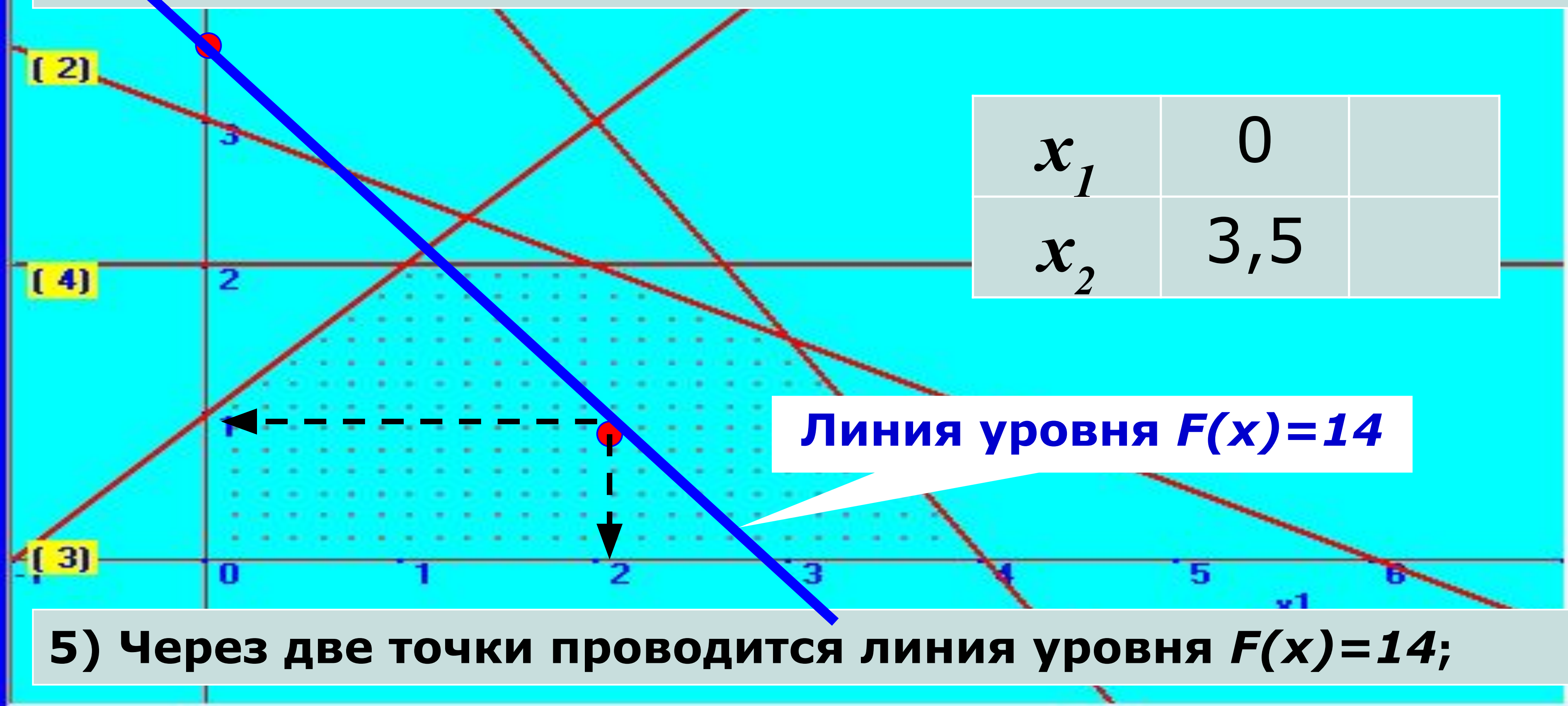
Алгоритм построения линии уровня:

3) Записывается уравнение целевой функции

$$5x_1 + 4x_2 = 14\ ;$$

4) По уравнению целевой функции *F(x)* находятся координаты второй точки для построения линии уровня;

x_1	0	
x_2	3,5	

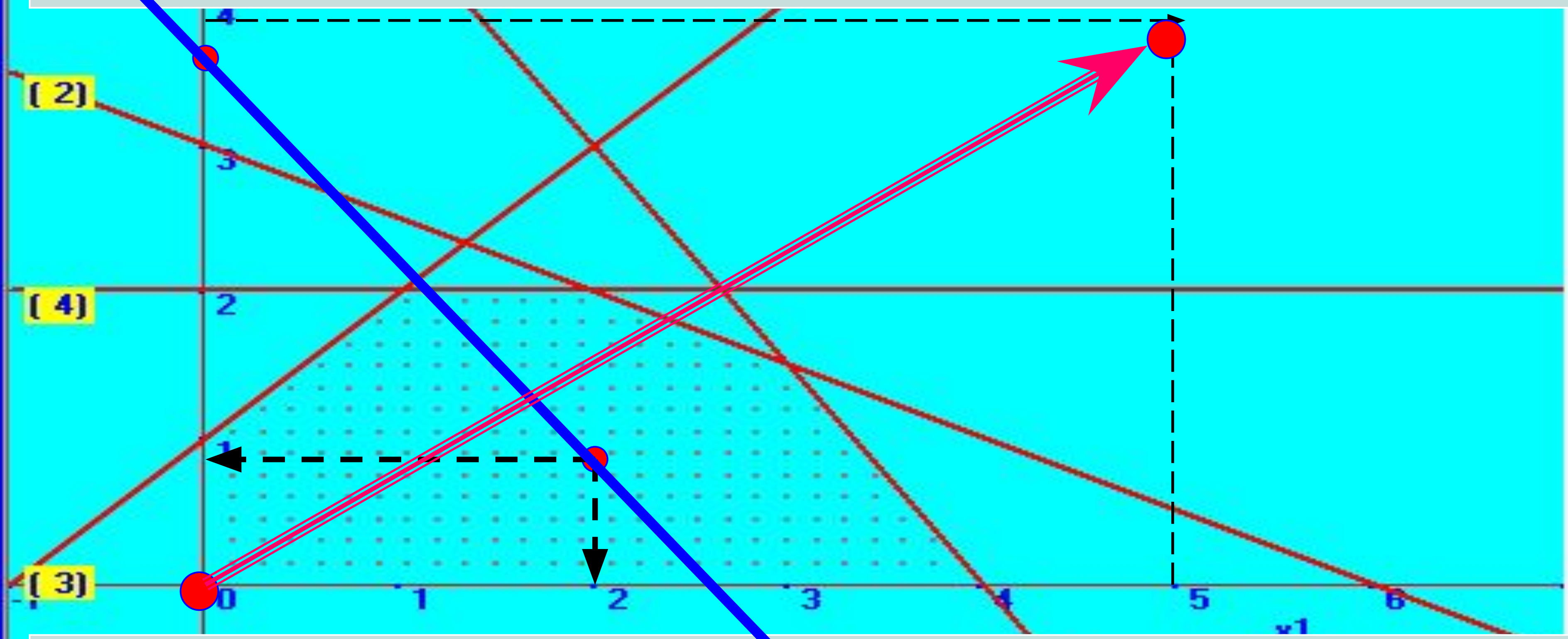


5) Через две точки проводится линия уровня *F(x)=14*;

Построение вектора-градиента

1) Координатами конца вектора-градиента являются коэффициенты при переменных в целевой функции (5,4) $5x_1 + 4x_2 = 14$;

2) Начало вектора-градиента совпадает с началом координат;



3) Строим вектор-градиент.

Линия уровня
Вектор-градиент
Оптимум
(1)
Obj
(2)
(4)
(3)
x2
x1
0
1
2
3
4
5
6
7

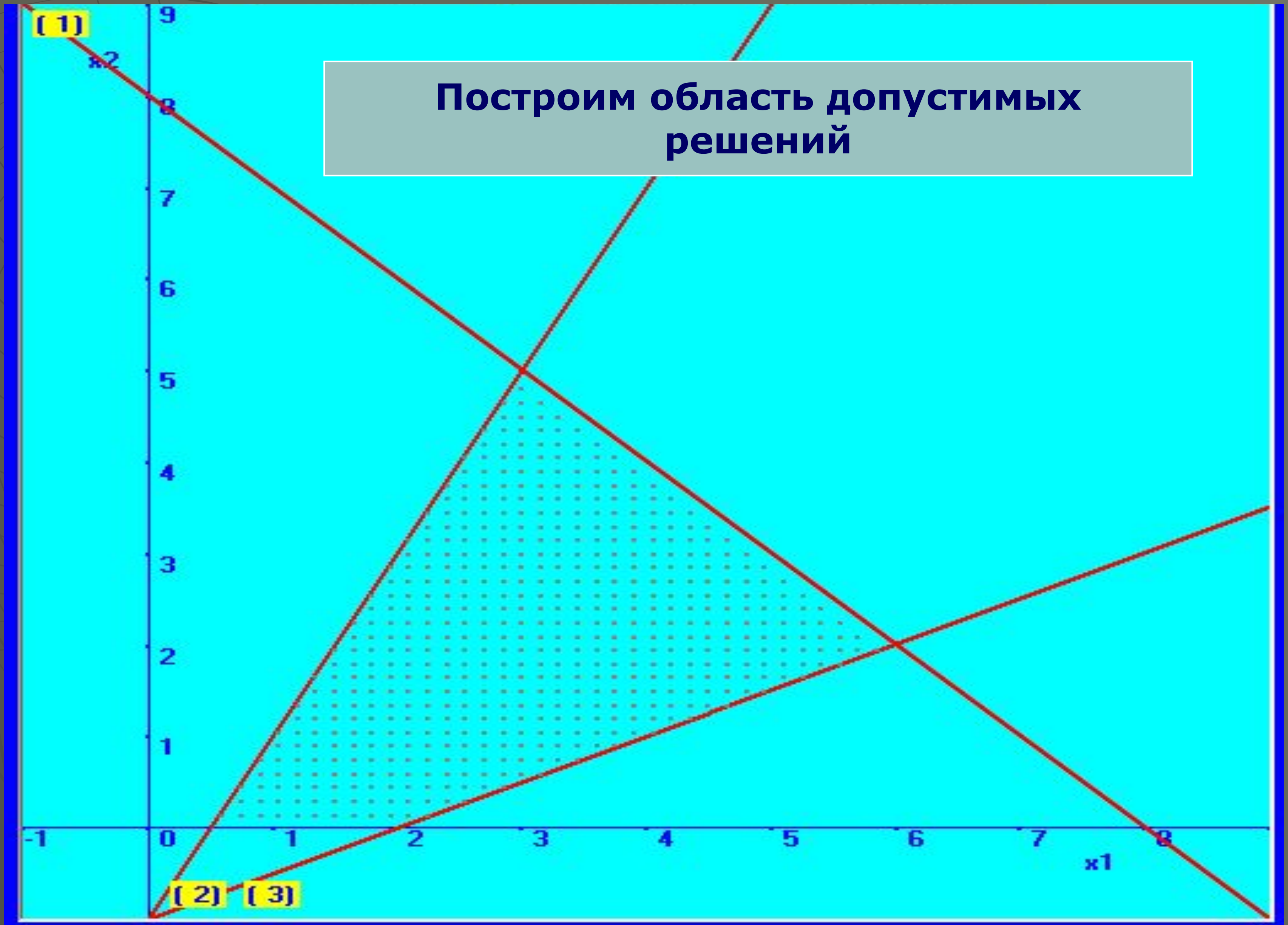
- В крайней, угловой точке достигается максимум целевой функции. Для нахождения координат этой точки достаточно решить систему из двух уравнений прямых, дающих в пересечении точку максимума:
- $6x_1 + 4x_2 = 24,$
- $x_1 + 2x_2 = 6$
- Решая систему, получаем $x_1 = 3,\ x_2 = 1.5$
- Ответ
- Для получения максимальной прибыли - **21** тыс. ден. единиц (***F(x) = 5x₁ + 4x₂*** =5×3+4×1.5=21) необходимо выпустить 3 тонны первого продукта и полторы тонны второго.

Особые случаи решения ЗЛП

В процессе решения ЗЛП могут встретить-ся особые случаи:

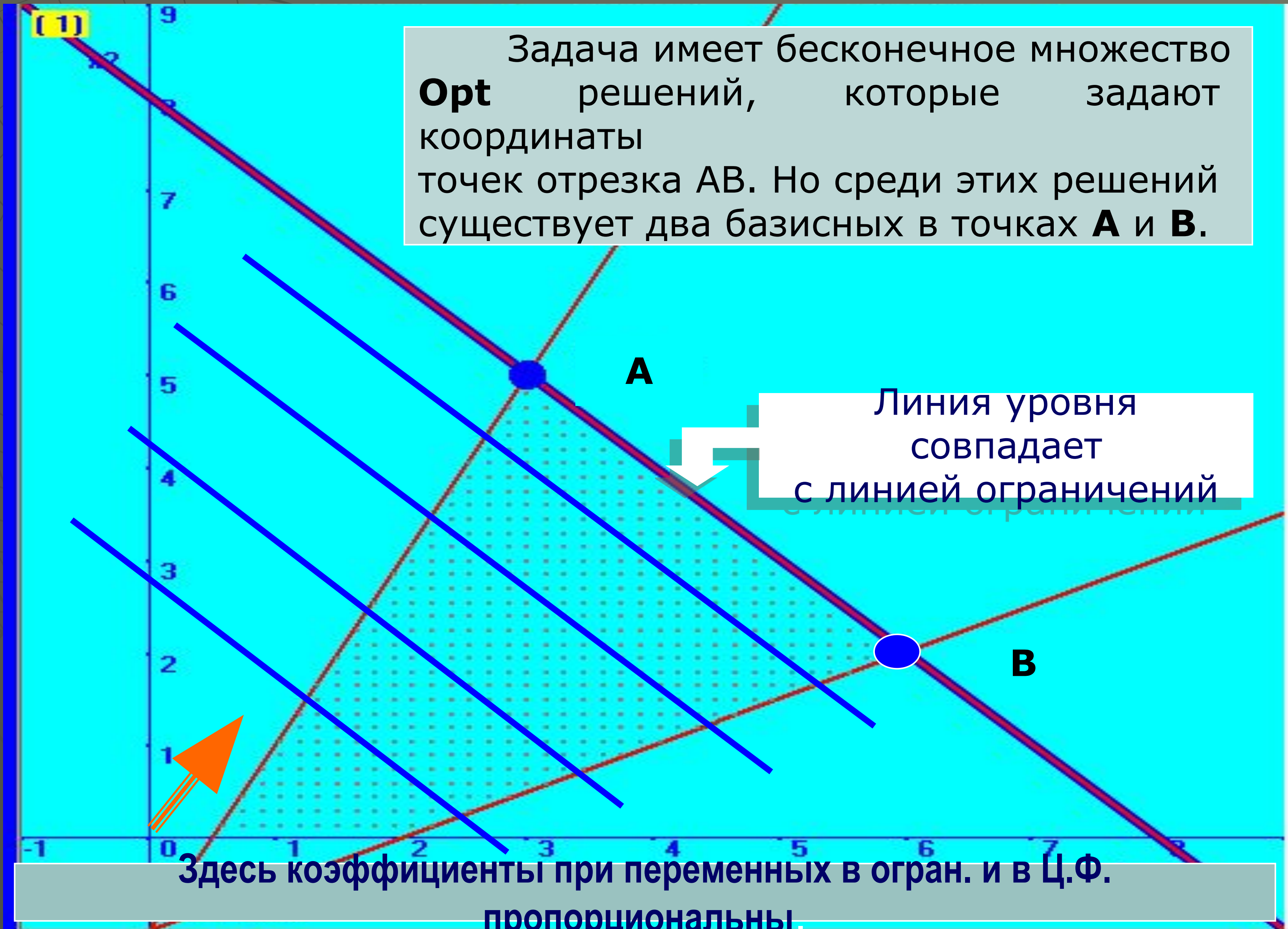
- Неединственность оптимального решения;
- Вырожденность базисного решения;
- Отсутствие конечного оптимума;
- Область допустимых решений представлена одной точкой;
- Множество допустимых решений пусто.

Неединственность оптимального решения



Неединственность оптимального решения

Задача имеет бесконечное множество **Opt** решений, которые задают координаты
точек отрезка АВ. Но среди этих решений существует два базисных в точках **А** и **В**.



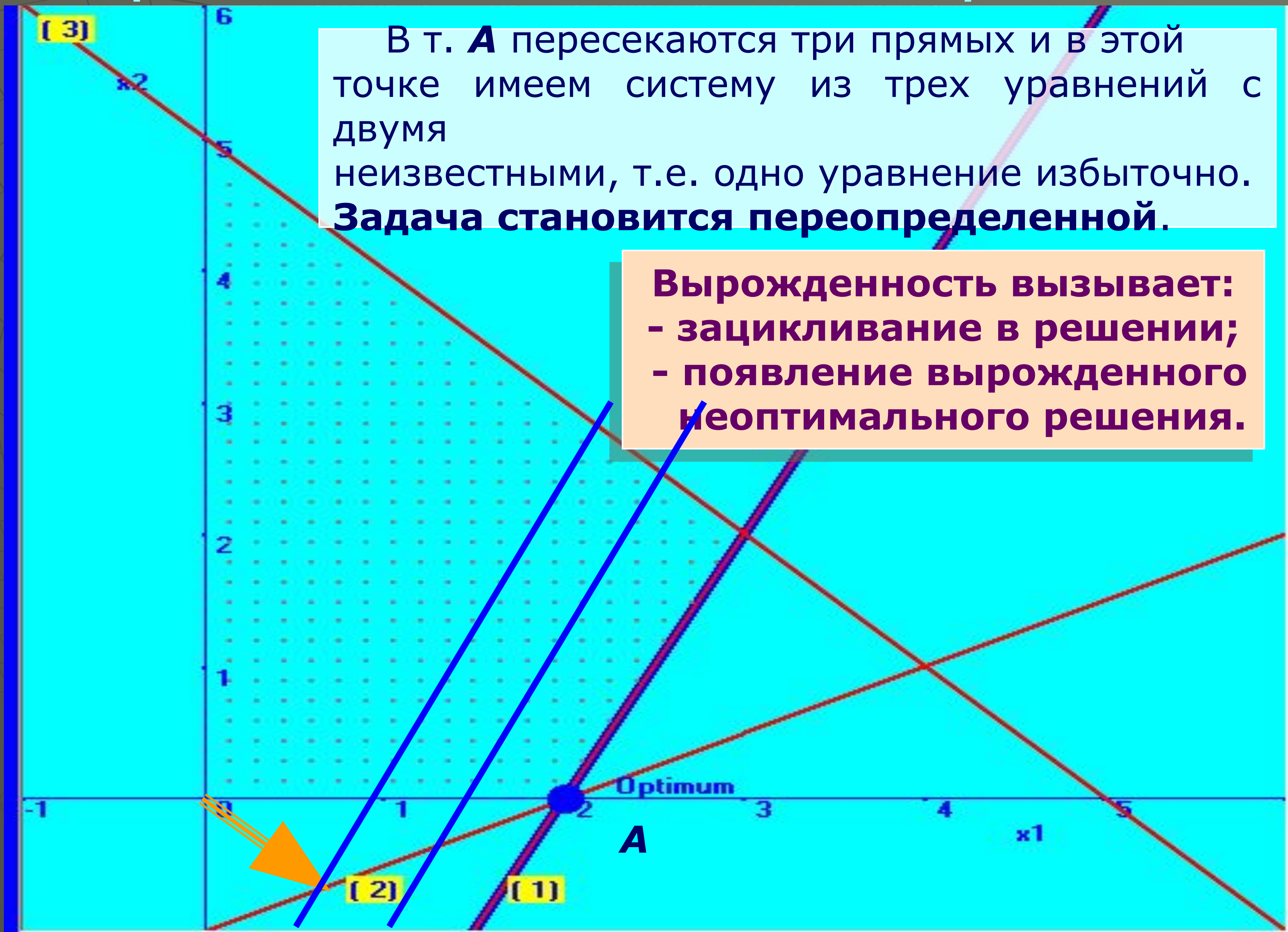
Здесь коэффициенты при переменных в огран. и в Ц.Ф. пропорциональны.

Вырожденность базисного решения

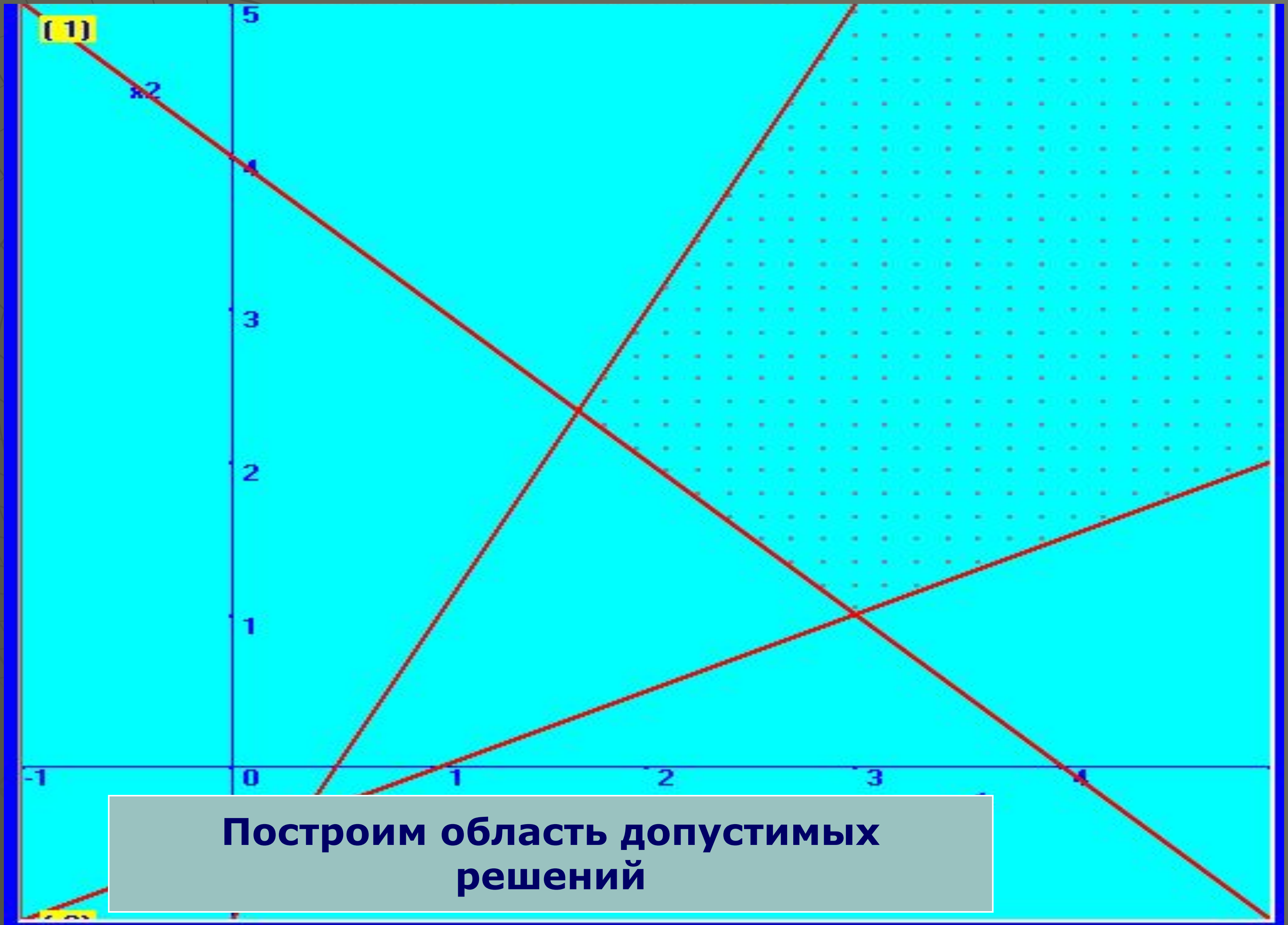
Вырожденность базисного решения

В т. ***А*** пересекаются три прямых и в этой точке имеем систему из трех уравнений с двумя
неизвестными, т.е. одно уравнение избыточно. **Задача становится переопределенной**.

Вырожденность вызывает:
- зацикливание в решении;
- появление вырожденного неоптимального решения.

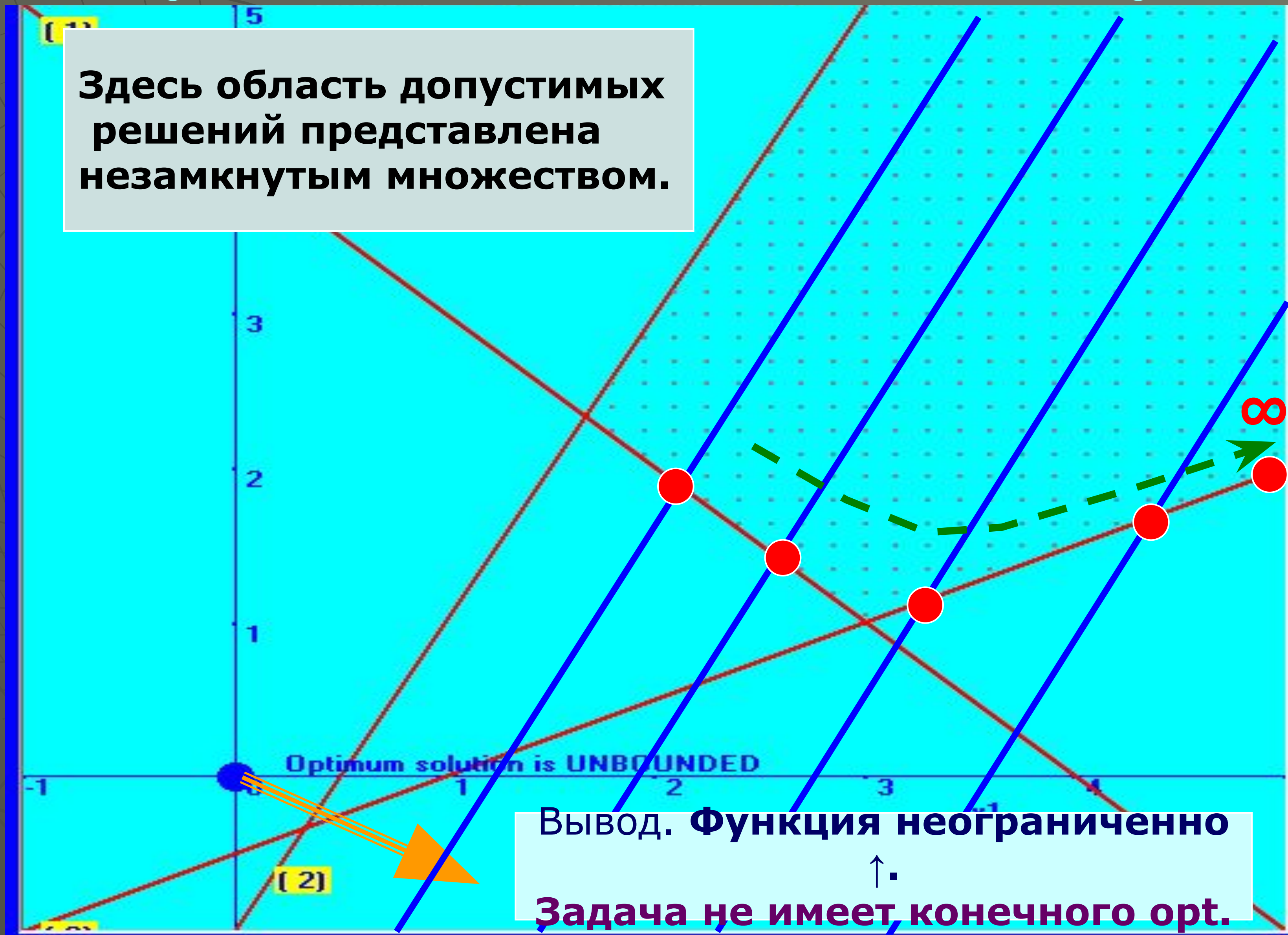


Отсутствие конечного оптимума



Построим область допустимых решений

Отсутствие конечного оптимума



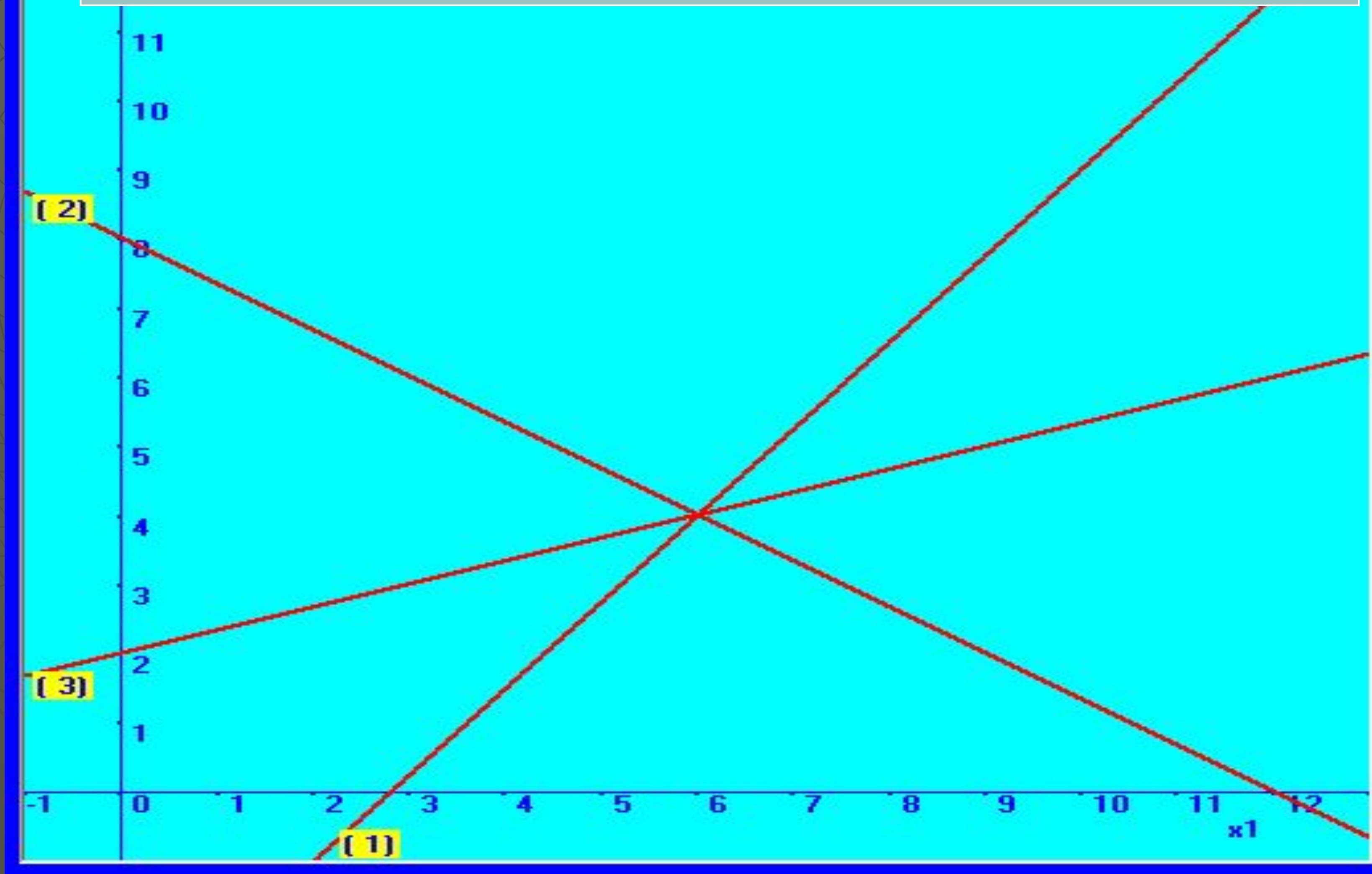
Здесь область допустимых решений представлена незамкнутым множеством.

Вывод. **Функция неограниченно ↑.**

Задача не имеет конечного opt.

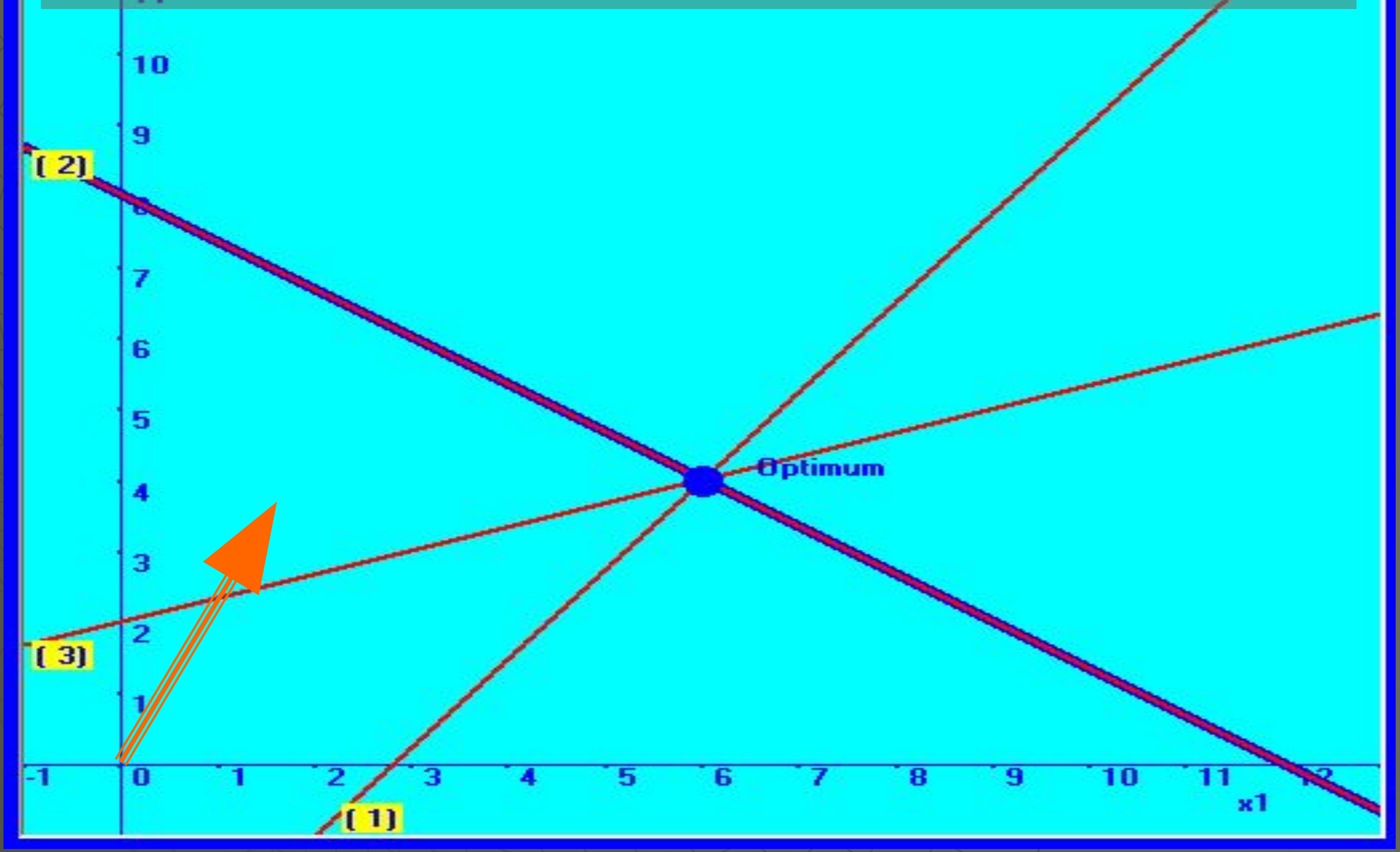
Область допустимых решений представлена одной точкой

Построим область допустимых решений для случая, когда все линии пересекаются в одной точке.

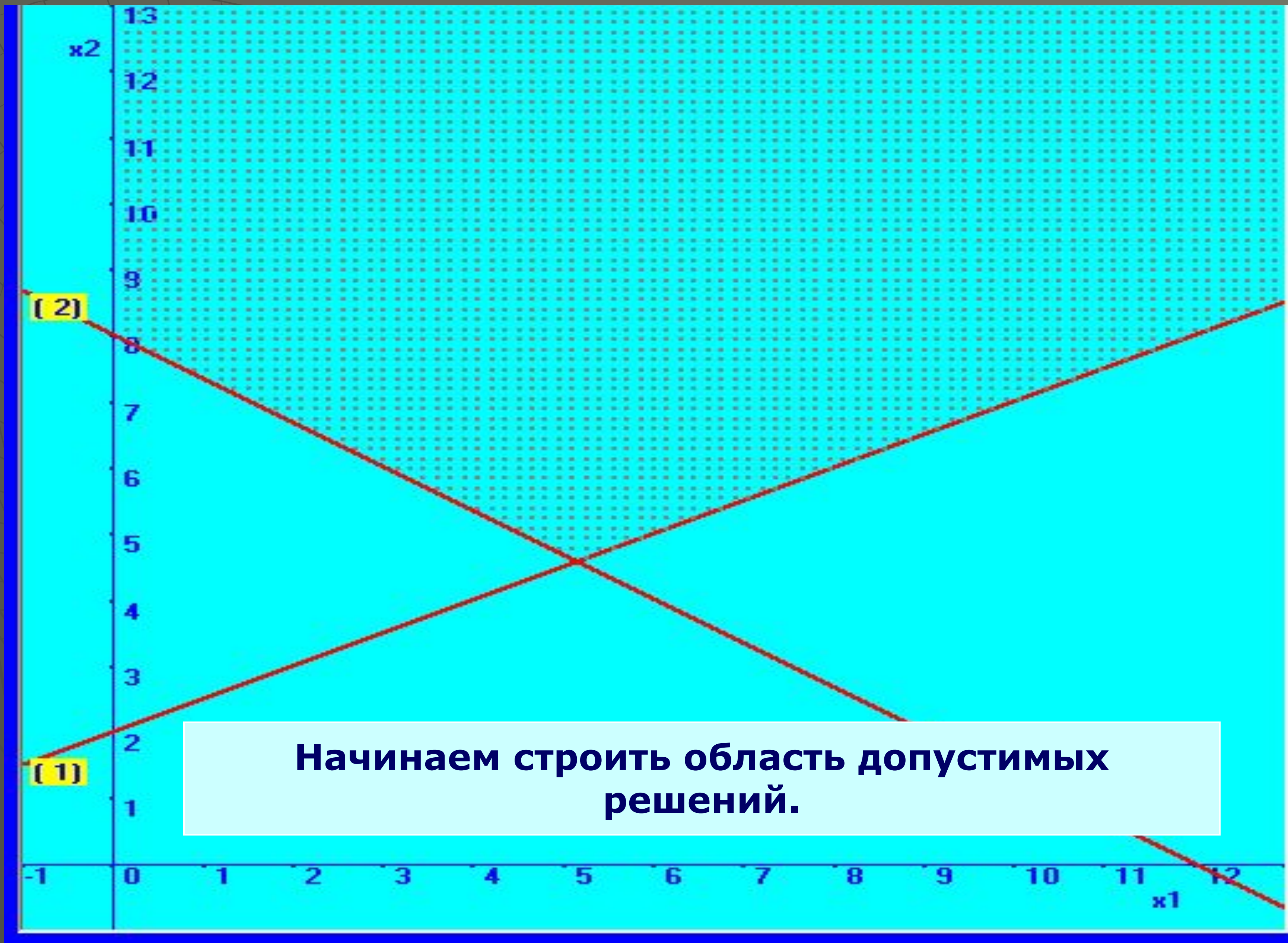


Область допустимых решений представлена одной точкой

В данном случае точки максимума и минимума целевой функции *f(x)* совпадают.



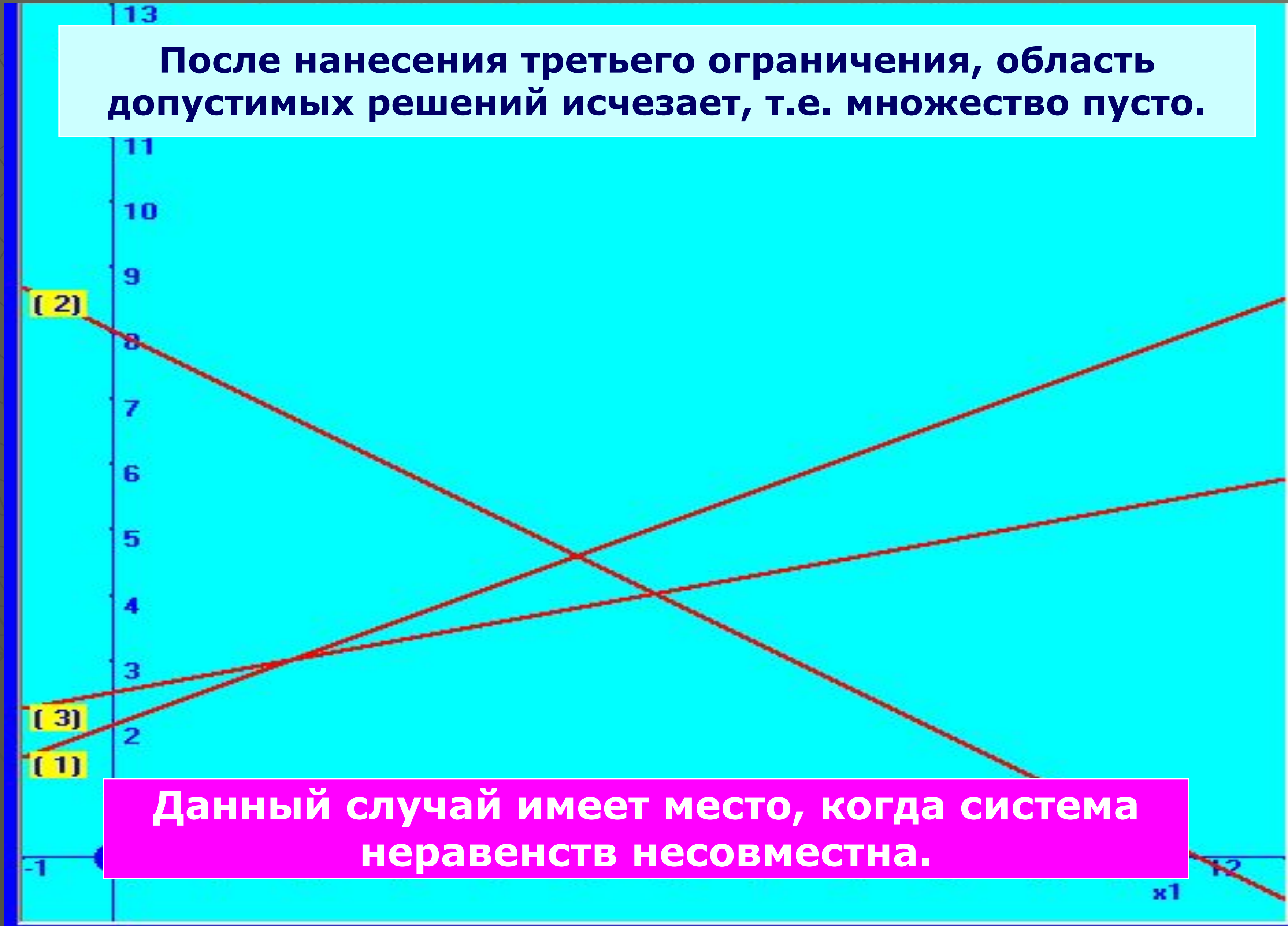
Множество допустимых решений пусто



Начинаем строить область допустимых решений.

Множество допустимых решений пусто

После нанесения третьего ограничения, область допустимых решений исчезает, т.е. множество пусто.



Данный случай имеет место, когда система неравенств несовместна.

Экономический смысл основных и дополнительных переменных в канонической форме задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов (на примере задачи о коврах).

$$f(\overline{X}) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

- $7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + \mathbf{x_5} = 80,$
- $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 + \mathbf{x_6} = 480,$
- $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 + \mathbf{x_7} = 130,$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$

$$\overline{X}^* = (0;\ 30;\ 10;\ 0)$$

Понятие устойчивости (чувствительности) решения

**Существуют интервалы изменения коэффициентов в F(x), при
которых оптимальное решение сохраняется.**

1. Изменение коэффициентов c_1 и c_2 в целевой функции вызывает изменение угла наклона прямой ***F(x)*** – линии уровня.
2. Изменение констант в правой части ограничения

Изменение констант в правой части ограничений рассмотрим отдельно.