

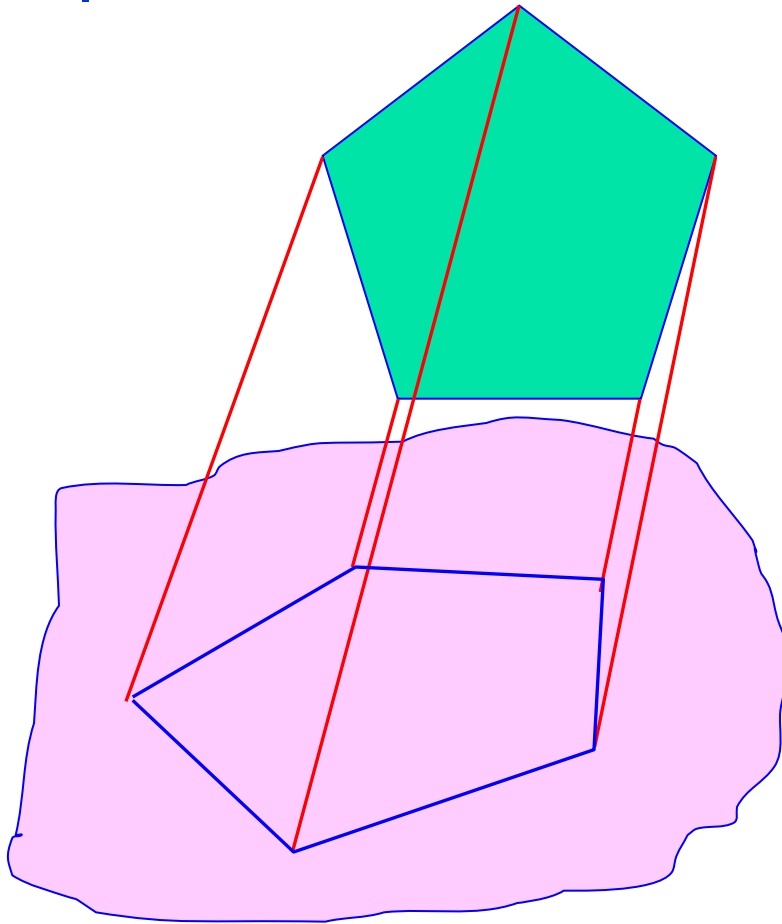
*Изучение сечений  
в стереометрии  
с помощью  
компьютера*



# Введение

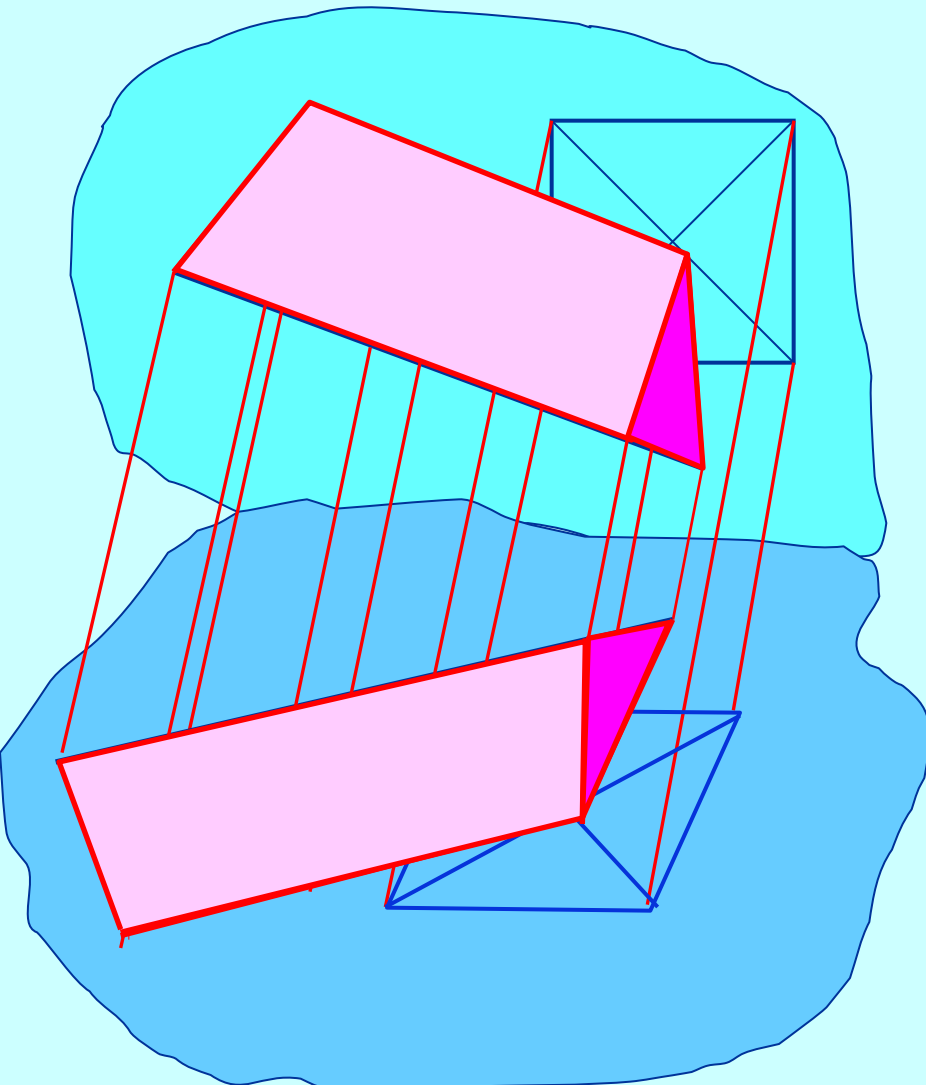
В школьном курсе стереометрии основными задачами на построение являются задачи на построение сечений пространственных фигур, а для этого необходимо научиться изображать эти фигуры.

Существуют различные методы изображения пространственных фигур на плоскости, но практика показывает, что целесообразным является метод ***параллельного проецирования.***



- Этот метод осуществляется проектированием всех параллельных прямых.
- Проекционное изображение фигуры в таком случае можно получить не непосредственным проецированием этой фигуры, а выполняя построения в строгом соответствии с законами параллельного проектирования.

## Эти законы сводятся к сохранению на проекционном чертеже таких свойств фигуры:



1. свойство фигуры быть точкой, прямой, плоскостью;
2. свойство фигуры иметь пересечение;
3. деление отрезка в данном отношении;
4. свойство прямых (плоскостей, прямой и плоскости) быть параллельными;
5. свойство фигуры быть треугольником, параллелограммом, трапецией;
6. отношение длин параллельных отрезков;
7. отношение площадей двух фигур.

В зависимости от цели используются  
изображения следующих трех видов:

**иллюстративные**    **полные**    **метрически определенные**

Но всем этим изображениям предъявляются такие требования:

- а) изображение должно быть верным, то есть оно должно представлять собой фигуру, подобную произвольной параллельной проекции;
- б) изображение должно быть по возможности наглядным, то есть должно вызывать верные пространственные представления об изображаемой фигуре;
- с) изображение должно быть легко выполнимым, то есть правила построения должны быть максимально простыми;
- д) изображение должно быть удобоизмеримым, то есть по изображению можно, и притом не сложно, восстановить оригинал метрически точно.

***Только после того можно строить их сечения.***

## Цели моей работы:

исследовать построение сечений  
в стереометрии и применить  
компьютер для изображения  
сечений.



При решении стереометрических задач  
требования к качеству чертежа, его наглядности  
значительно возрастает.



***В построение пространственного чертежа входит:***

- выбор оптимального положения изображаемого тела,
- **выбор ракурса и проекции,**
- умение минимизировать количество изображенных линий,
- **умение строить сечения и проекции на плоскость,**
- умение перевести условия задачи на графический язык.



# Пространственные тела можно разделить на две группы:

*удобные для  
пространственного  
изображения*

К первой группе относятся  
следующие многогранники:

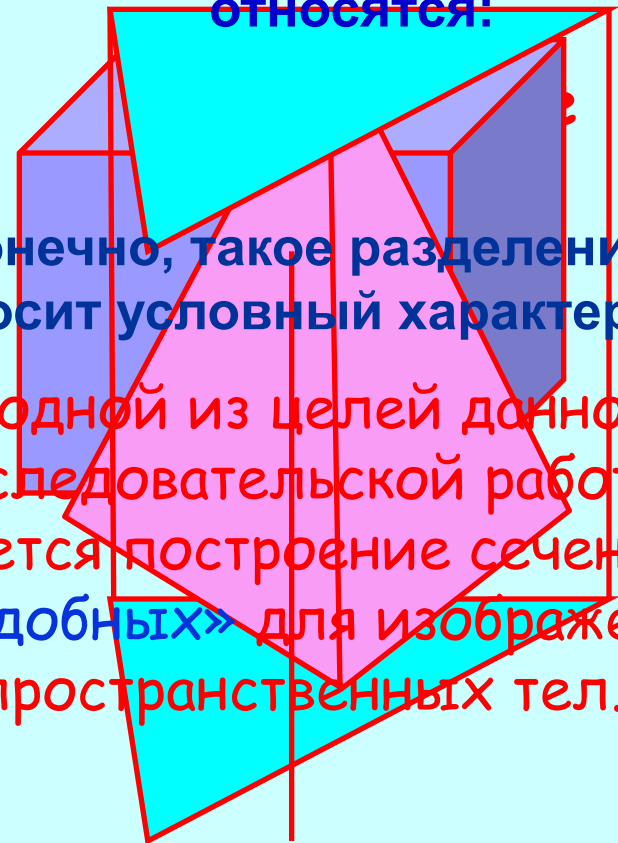
- параллелепипед (прежде  
всего прямоугольный),
- треугольная пирамида  
(тетраэдр)
- треугольная призма,
- четырехугольная  
пирамида.

*и неудобные.*

Ко второй группе  
относится:

Конечно, такое разделение  
носит условный характер.

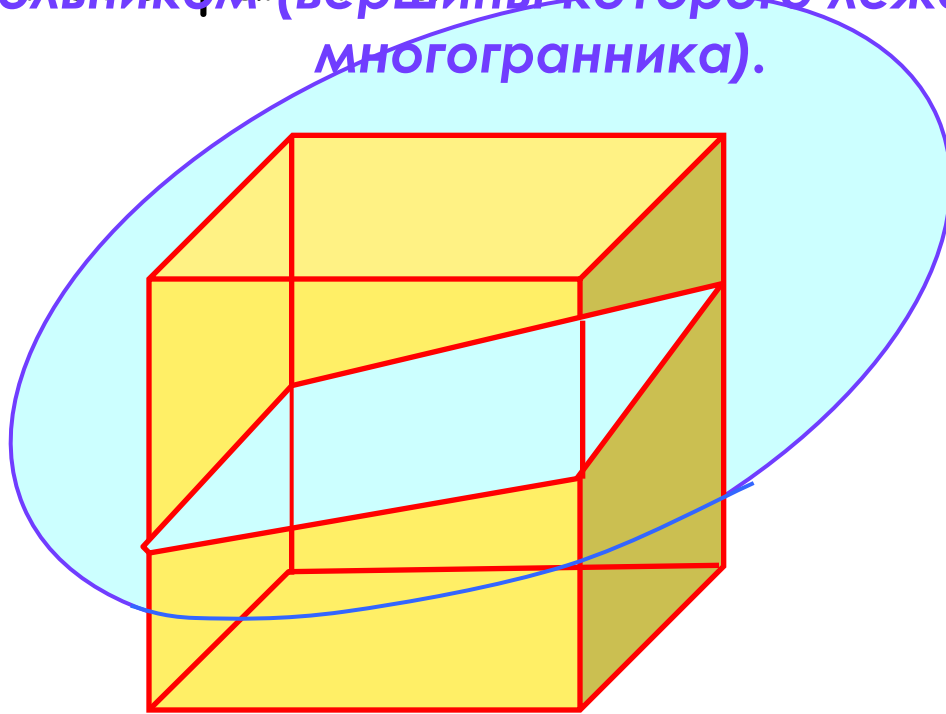
И одной из целей данной  
исследовательской работы  
является построение сечения в  
«неудобных» для изображения  
пространственных тел.



# Построение сечения многогранников



Суть задания состоит в том, что сечение многогранника зависит от способа построения и представляет собой множество точек (вершин многогранника), отрезком (ребро многогранника) или многоугольником (вершины которого лежат на ребрах многогранника).





## Построение следов плоскости на гранях можно вести по одному из следующих приемов:

- а) строить следы прямых, лежащих в плоскости сечения, и по ним находить следы самой плоскости;
- б) строить третий след трехгранного угла по двум найденным следам на плоскости сечения;
- в) применить внутреннее проектирование.

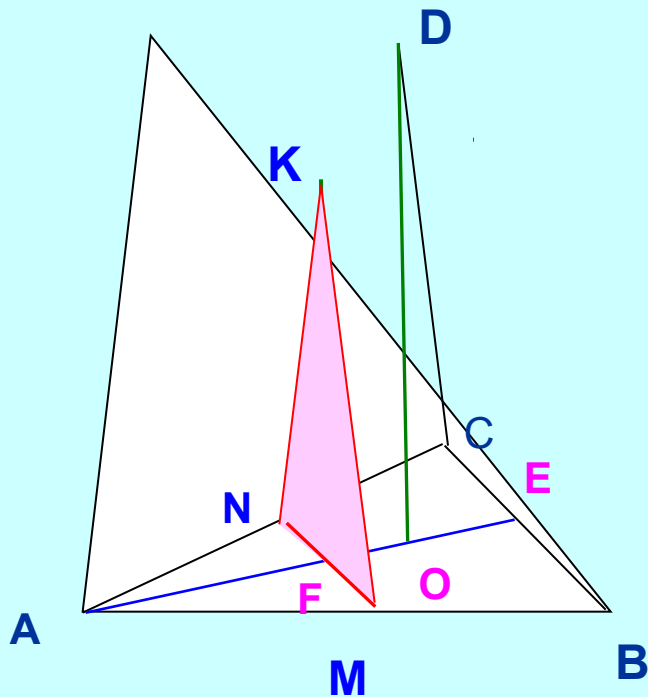
Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Эту линию называют следом секущей плоскости.

Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

# Задача на построение сечения 1

Постройте сечение треугольной пирамиды  $ABCD$ , так чтобы плоскость сечения была перпендикулярна основанию и делила пополам стороны основания треугольной пирамиды.

## Построение:



## Решение:

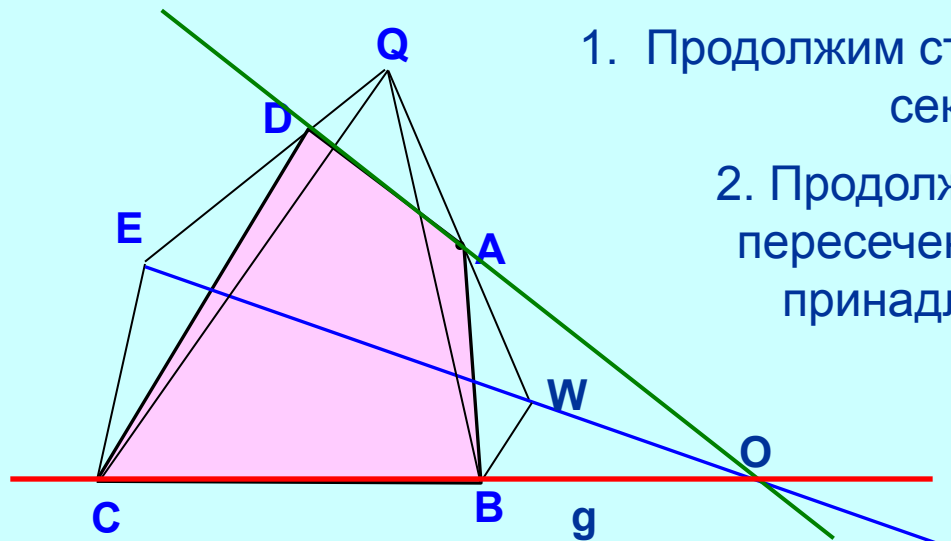
1. Проведем среднюю линию  $MN$  основания  $ABC$  (соединим середины двух сторон основания).
  2. Проведем в основании  $ABC$  медиану  $AE$ , она пройдет через середину отрезка  $MN$ , которую обозначим  $F$ .
  3. Из вершины  $D$  построим высоту  $DO$  к медиане  $AE$ .
  4. Из  $F$  проведем линию параллельно высоте  $OD$  до пересечения с ребром  $AD$ , обозначим точку  $K$ .
- Соединим точки  $N$ ,  $M$  и  $K$ .

Искомое сечение  $NMK$ .

## Задача на построение сечения 2

Построить сечение четырехугольной пирамиды  $QWBCSE$  плоскостью, проходящей через сторону основания  $CB$  и точку  $A$  на одном из ее боковых ребер  $QW$ .

Построение:



Решение:

1. Продолжим сторону  $CB$  – это будет  $g$  - след секущей плоскости.

2. Продолжим сторону основания  $EW$  до пересечения с  $g$ . Точка пересечения  $O$  принадлежит секущей плоскости и

плоскости проходящей через боковую грань пирамиды, где лежит ребро  $QW$ .

3. Проведем вспомогательную прямую через точку  $A$  и точку пересечения  $O$ . Эта прямая пересечет ребро  $EQ$  в точке  $D$ .

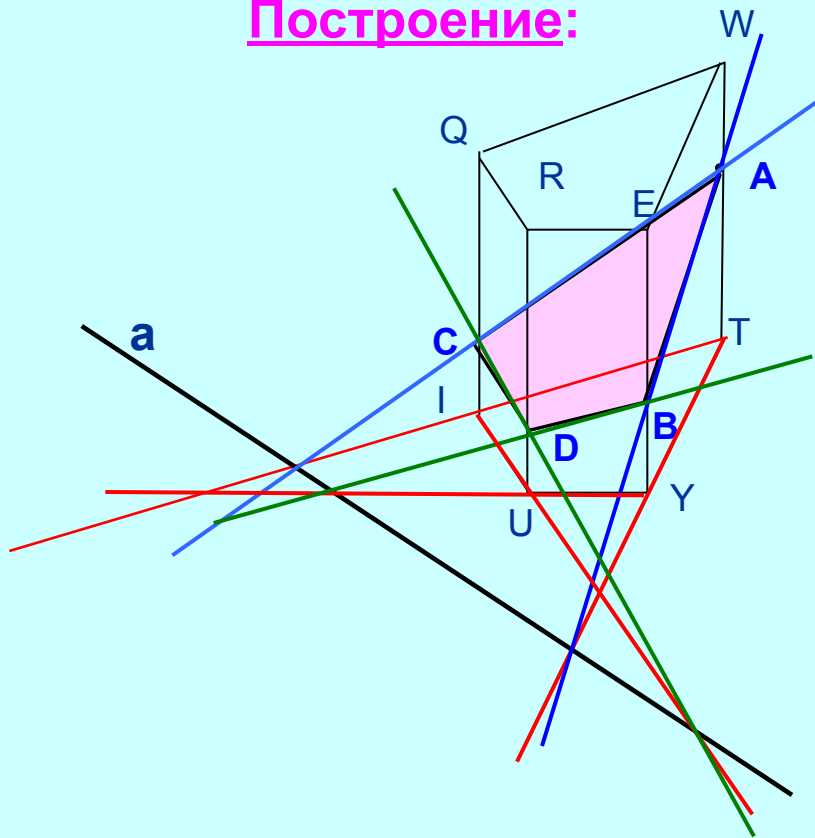
4. Соединим точки  $A, B, C$  и  $D$ .

Искомое сечение  $ABCD$ .

# Задача на построение сечения 3

Построить сечение призмы QWERUYTI, так чтобы плоскость сечения проходила через прямую  $a$  в плоскости нижнего основания призмы и точку  $A$  на одном из боковых ребер  $WT$ .

Построение:



Решение:

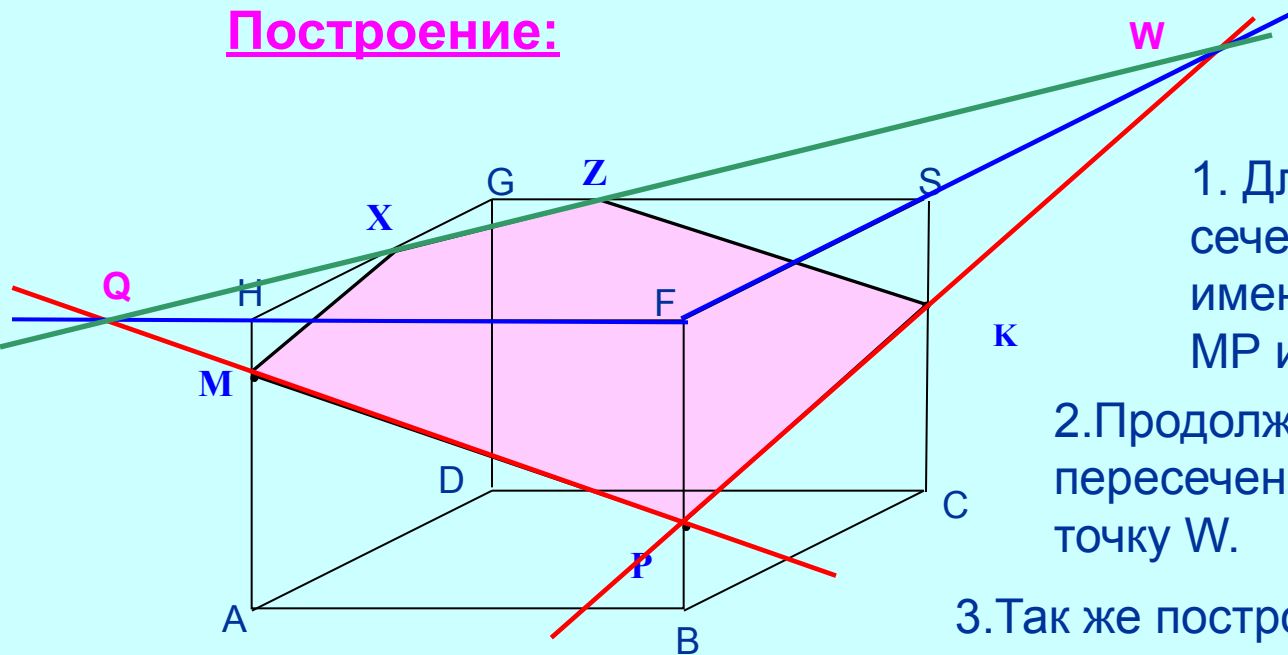
1. Продолжим стороны основания призмы до пересечения с прямой  $a$ , они все лежат в одной плоскости (плоскость основания призмы). Точки пересечения продолжения сторон основания с прямой  $a$  принадлежат и прямой  $a$  и плоскостям, проходящим через боковые грани призмы.
2. Проведем прямые через точку  $A$  и точки пересечения продолжения сторон основания с прямой  $a$ , эти прямые пересекут боковые грани в точках  $B$  и  $C$ .
3. Через точки  $B$  и  $C$  проведем прямые, которые пройдут через точки пересечения продолжения соответствующих сторон основания и прямой  $a$ , пересечение этих прямых должно лежать на ребре  $RU$ , получим точку  $D$ .

Искомое сечение  $ABDC$ .

# Задача на построение сечения 4

Изобразите сечение параллелепипеда  $ABCDHGSF$ , проходящее через точки  $M$ ,  $K$ ,  $P$  на его ребрах.

Построение:



Решение:

1. Для построения данного сечения соединим имеющиеся точки прямыми  $MP$  и  $PK$ .
2. Продолжим ребро  $FS$  до пересечения с прямой  $PK$ , получим точку  $W$ .
3. Так же построим точку  $Q$  пересечением прямой  $PM$  и продолжением ребра  $FH$ .
4. Через точки  $W$  и  $Q$  проведем прямую, которая пересечет ребра  $HG$  и  $GS$  в точках  $X$  и  $Z$ .

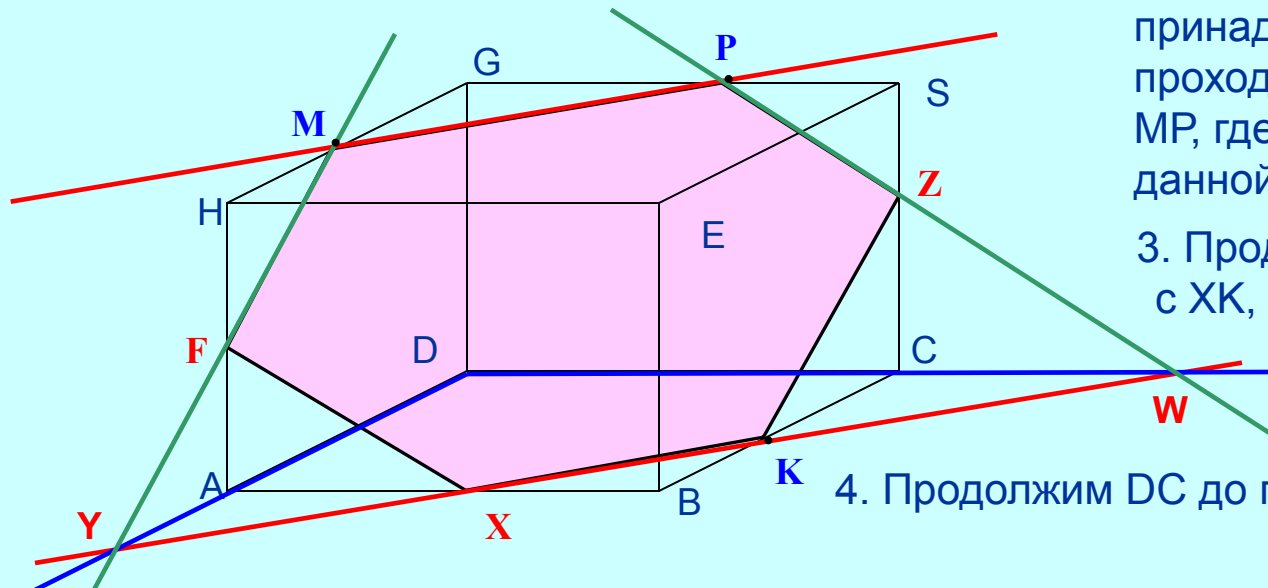
Получившаяся фигура  $MPKZX$  и есть искомое сечение.

# Задача на построение сечения 5

Изобразите сечение параллелепипеда, проходящее через точки М, К, Р на его ребрах.

Построение:

Решение:



1. Сначала соединим точки М и Р.
2. Построим прямую, которой принадлежит точка К и которая проходит параллельно прямой МР, где Х - точка пересечения данной прямой с ребром АВ.
3. Продолжим AD до пересечения с ХК, получим вспомогательную точку Y.
4. Продолжим DC до пересечения с ХК в точке W.

5. Затем проведем прямую, проходящую через точку Р и W, которая пересечет ребро SC в точке Z, и прямую через точки М и Y, которая пересечет ребро HA в точке F.

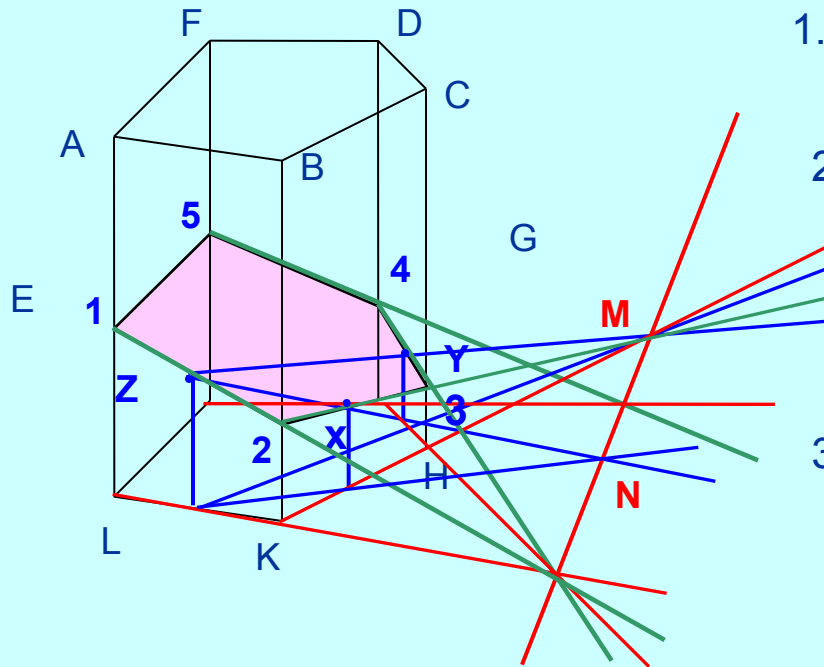
6. Соединим точки X и F, а также точки Z и K.

Данная фигура **MPZKXF** и является искомым сечением.

# Задача на построение сечения 6

Построить сечение призмы ABCDFEGHKL плоскостью, проходящей через три произвольные точки X, Y и Z на поверхности (не на ребрах) призмы.

Построение:



Решение:

1. Проведем прямые ZY и ZX, которые лежат в плоскости сечения.
2. На плоскости нижнего основания построим проекции прямых ZY и ZX, пересечение прямых со своими проекциями обозначим M и N.
3. Проведем прямую MN, являющуюся пересечением плоскости нижнего основания и секущей плоскости.
4. Построим продолжение ребра LK до пересечения с прямой MN, из точки пересечения проведем прямую через точку Z, которая пересечет ребра призмы в точках 1 и 2. Получим сторону сечения 12. Также найдем стороны сечения 23, 34 и 45.

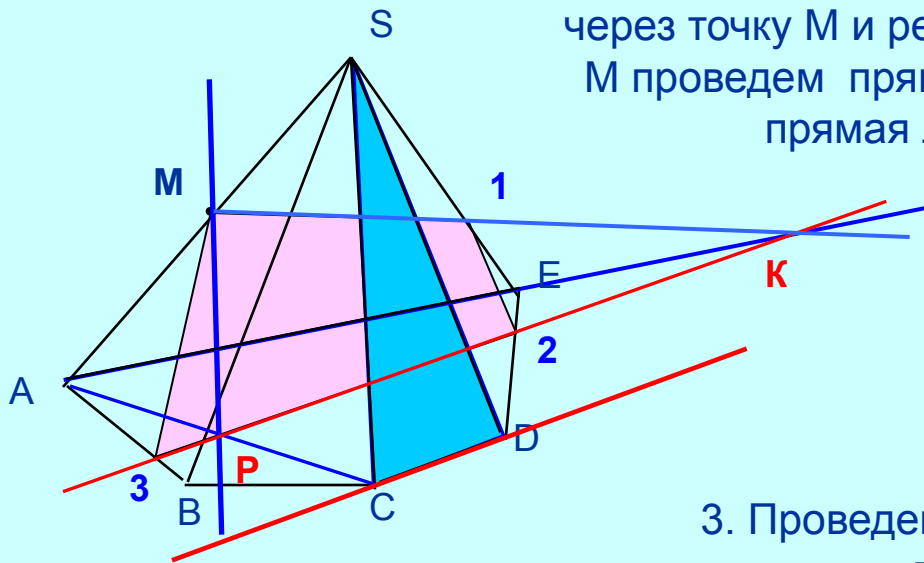
Получили искомое сечение 12345.



# Задача на построение сечения 7

Сечение пирамиды  $SABCDE$  плоскостью, проходящей через точку  $M$  ребра  $AS$  параллельно грани  $SCD$ .

## Построение:



## Решение:

1. Соединим вершины  $A$  и  $C$ . Плоскость  $ASC$  проходит через точку  $M$  и ребро  $SC$ . В этой плоскости через точку  $M$  проведем прямую  $MP$ , параллельно ребру  $SC$ . Эта прямая лежит в секущей плоскости.
2. След секущей плоскости на плоскости основания проходит через точку  $P$  параллельно  $CD$ . Обозначим  $K$  пересечение следа секущей плоскости с продолжением ребра  $AE$ .
3. Проведем прямую через точки  $M$  и  $K$ , которая пересечет ребро  $SE$  в точке  $1$ .
3. Обозначим  $2$  пересечение прямой  $PK$  и ребра  $ED$ . Соединим  $1$  и  $2$ . Обозначим  $3$  пересечение  $PK$  и ребра  $AB$ . Соединим  $3$  и точку  $M$ .

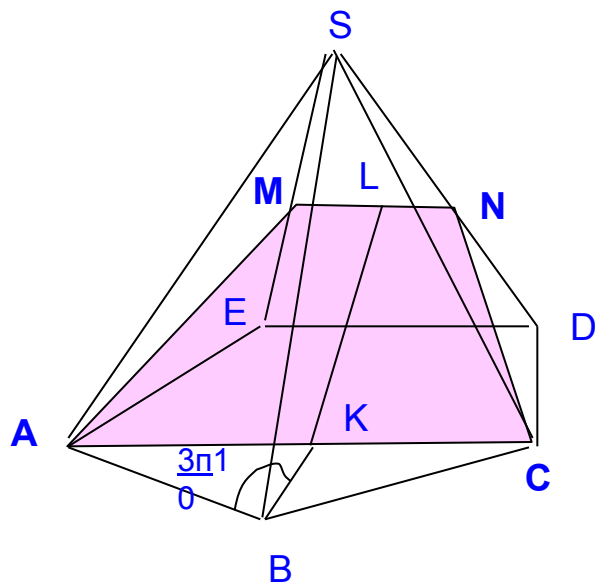
**Искомое сечение  $M123$ .**

# Нахождение площади сечения

## Задача на нахождение площади сечения

Дано: Правильная пятиугольная пирамида -  $SABCDE$ .  
Вычислить площадь сечения правильной пятиугольной пирамиды  $SABCDE$  плоскостью, которая проходит через вершины основания  $A$  и  $C$  и середины боковых ребер  $SE$  и  $SD$ .  
 $q$  - длина стороны основания пирамиды,  $b$  - длина бокового ребра.  
Найти:  $S_{сеч}$  - площадь сечения

Построение:



Решение:

Пусть  $M$  и  $N$  – середина ребер  $ES$  и  $DS$ ; легко видеть, что  $AMNC$  – трапеция,  $MN$  параллельно  $ED$ , а  $ED$  параллельно  $AC$ .  
Очевидно также, что  $MN = 1/2q$ , где  $q$  – длина стороны основания пирамиды.

Используя формулу для квадрата медианы треугольника (на основании теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма), получаем:

# Нахождение площади сечения

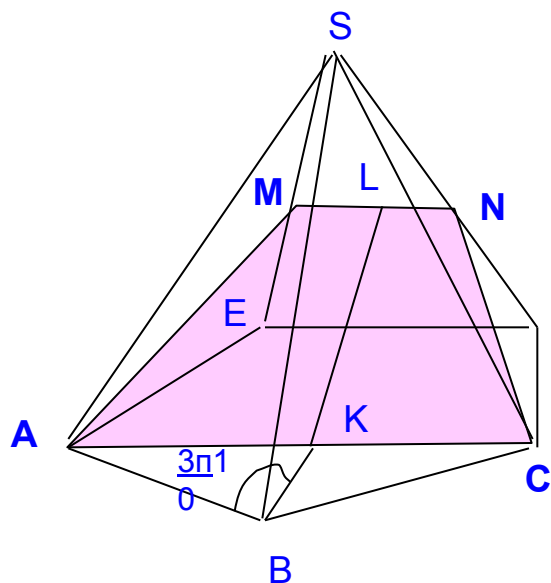
## Задача на нахождение площади сечения

Дано: Правильная пятиугольная пирамида - SABCDE ,  
сечение- AMNC,

$q$  - длина стороны основания пирамиды,  $b$  – длина бокового ребра.

Найти: Sсеч - площадь сечения

Построение:



Решение:

$$CN^2 = \frac{b^2 + 2q^2}{4} \quad CN = \sqrt{\frac{b^2 + 2q^2}{4}}$$

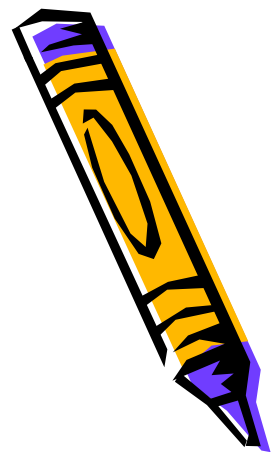
$$KC = \frac{AC}{2} = q \sin \frac{3\pi}{10}, \quad \angle ABK = \frac{3\pi}{10}$$

KL - отрезок соединяющий середину трапеции ACNM

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{CN^2 - (KC - q/4)^2} = \sqrt{\frac{b^2 + 2q^2}{4} - (q(\sqrt{5}+1)/4 - q/4)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + 2q^2}{4} - \frac{5q^2}{16}} = \frac{\sqrt{4b^2 + 3q^2}}{4}, \quad \text{при } \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{aligned}$$

Таким образом , искомая площадь  $S_{\text{сеч}} = 1/2 \cdot (MN + AC)KL = (2 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{4b^2 + 3q^2}$

# Исследовательская задача построения сечения в многограннике



Рассматривая тему сечения в

стереометрии, я выяснила  
какие бывают задачи на  
построение и вычисления  
площади сечения в  
сложной фигуре, например, в  
многоугольниках.  
додекаэдре,

и решила построить  
данное сечения сама.



## Задача: Построить сечение в додекаэдре.



### Построение:

1. Построим додекаэдр. На его гранях отметим три точки 1,2,3.

2. Через точки 1,2, которые находятся на ребрах одной грани, проведем прямую  $a$  и продолжим ребро той же грани до пересечения с прямой  $a$ . Точку пересечения обозначим  $X$ .

3. Через точки 2,3 проведем прямую  $b$  так, чтобы она пересекла продолжение другого ребра той же грани, где находятся ребра с точками 2 и 3. Получим точку  $Z$ .

4. Построив прямую, проходящую через точки  $Z$  и  $X$ , получим точки пересечения с ребрами додекаэдра 4,5.

5. Соединим точки 4 и 3, 5 и 1.

Получили искомое сечение 12345.



# Заключение

Задачи по геометрии и особенно по стереометрии часто трудны для понимания школьников по причине сложности изображения пространственных фигур на плоском чертеже. Не всегда школьникам хватает воображения и пространственного видения геометрических тел для правильного построения заданных фигур. **А чертить на бумаге приходится с помощью только линейки и карандаша.** Не получился чертеж, выбран неудачный ракурс, не вышли параллельные линии, и начинай всё сначала!

**И здесь на помощь приходят современные компьютерные технологии.**

**Стереометрия развивает логику, пространственное воображение.**

**Я убедилась, что с помощью компьютера можно наглядней**

**изучить эту науку,**

**лучше научилась рассуждать и**

**понимать условия задач, анализировать и**

**творчески подходить к решению**

**поставленных задач.**



# *Изучение сечений в стереометрии с помощью компьютера*

