

# Как найти корни квадратного уравнения?

Авторы: *учащиеся 8 класса*

Руководитель: *Родина Алевтина  
Карловна*

МОУ «Блюментальская основная  
общеобразовательная школа»

# Привет, восьмиклассник!

Твоему вниманию предоставляется проект, который поможет тебе научиться находить корни, квадратных уравнений.

Здесь ты найдёшь и общий алгоритм решения квадратных уравнений, и теоретические сведения и различные интересные задачи и многое другое.

Так что – дерзай!

Сядь поудобнее, засучи рукава и ...ВПЕРЁД!

# Цель проекта

- Цель данного проекта – привлечь внимание учащихся к исследовательской деятельности, вызвать интерес к изучению математики, а именно к решению квадратных уравнений. Данный проект предназначен для развития творческих способностей учащихся: предполагает развитие математического и логического мышления при решении поставленных проблем, нацеливает на самостоятельную исследовательскую деятельность, формирует навыки решения квадратных уравнений, активизирует учащихся к работе в предполагаемых проектах и созданию собственных творческих работ.
- *Основной вопрос, на который должны ответить участники проекта:*

**Как найти корни квадратного уравнения?**

# Дидактические цели проекта

- Совершенствование прикладных навыков работы с персональным компьютером в аспекте алгебраических исследований.
- Теоретическое и практическое владение основами решения квадратных уравнений.
- Дальнейшее формирование навыков самостоятельной работы в познавательной деятельности.

# Методические цели проекта

- Научить школьников проводить исследования в области математики.
- Научить учащихся понимать структуру формулы и алгоритм вычисления корней.
- Научить школьников оформлять информацию, собранную им самим.

# Этапы и ход работы

1 этап. Класс разбивается на группы 5-6 человек.

2 этап. Перед группой ставится проблемный вопрос.

3 этап. Распределение работ внутри группы.

4 этап. Каждая группа должна выполнить:

- поиск материала;
- анализ материала;
- оформить презентацию и буклет.



# Этапы и ход работы

- Над проектом мы будем работать в течении 3-х недель.

*За это время мы...*

*Должны решить, что будем делать и зачем.*

*Как разделиться — кто и с кем.*

*Теорию отлично изучить.*

*Задачи подобрать.*

*И алгоритмы получше осветить.*

*И вам, друзьям об этом рассказать!*



# Подробнее о проекте



- Проект *"Как найти корни квадратного уравнения?"* посвящен изучению темы «Квадратные уравнения». В рамках проекта школьники знакомятся с учебным материалом по данной теме. После чего разбиваются на группы. Перед каждой группой ставится проблемный вопрос. Группа проводит поиск и анализ информации с целью проверки собственных гипотез по сформировавшимся вопросам. По итогам проекта каждая группа подготавливает отчет в виде мультимедийных презентаций, буклетов. В рамках проекта предусматривается выступление перед классом по разрабатываемой теме.



# Темы исследования учащихся

- 1. «Квадратное уравнение и его корни»
- 2. «Неполные квадратные уравнения»
- 3. «Метод выделения полного квадрата»
- 4. «Решение квадратных уравнений»
- 5. «Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета.»



# Немного истории

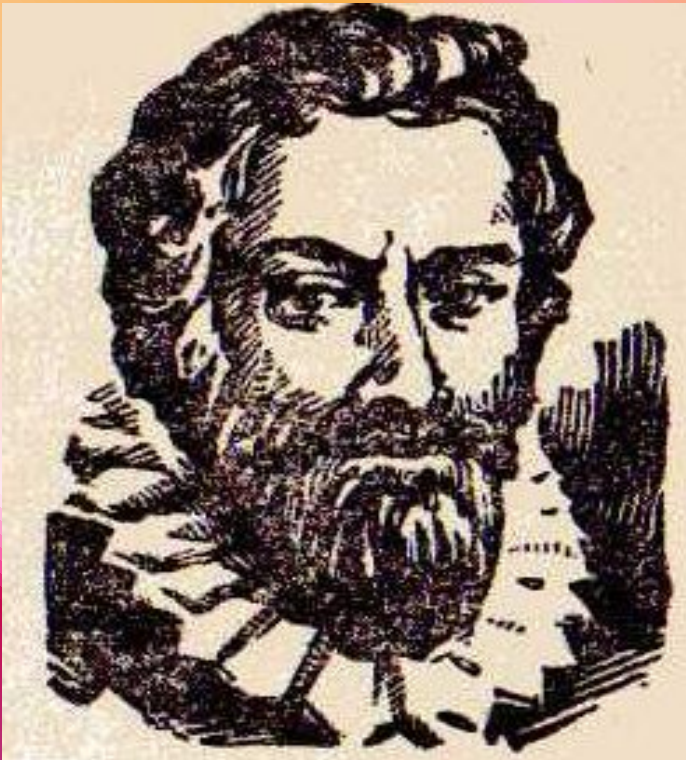
Уравнение 2 – й степени умели решать ещё в Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до н.э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях.

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактатах.

Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.).

Средне –азиатский учёный аль - Хорезми ( 10 век) в трактате «Китаб аль - джебр валь - мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата

# Немного истории



Франсуа Виет  
(1540 – 1603)

- французский математик, ввёл систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

# Неполные квадратные уравнения

- Квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  называют неполным, если хотя бы один из коэффициентов  $b$  или  $c$  равен 0.
- Таким образом, неполное квадратное уравнение есть уравнение одного из следующих видов:

$$ax^2 = 0,$$

$$ax^2 + c = 0, \quad c \neq 0$$

$$ax^2 + bx = 0, \quad b \neq 0.$$

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения

# Решение неполных квадратных уравнений

Решим уравнение

$$5x^2 = 0.$$

Разделив обе части этого  
уравнения на 5,

получим:

$$x^2 = 0,$$

откуда

$$x = 0.$$

Ответ : 0

Решим уравнение

$$-3x^2 + 5x = 0.$$

Разложим левую часть  
уравнения на множители,  
получим:

$$x(-3x + 5) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, x_2 = 5/3.$$

Ответ : 0, 5/3.

# Решение неполных квадратных уравнений

❖ Решить уравнение  
 $2x^2 + 7 = 0$ .

Уравнение можно записать так:  
 $x^2 = -7/2$ .

Это уравнение действительных  
корней не имеет,  
так как  $x^2 \geq 0$  для любого  
действительного числа  $x$ .

❖ Решить уравнение  
 $3x^2 - 27 = 0$ . Разделим обе части  
уравнения на 3:  $x^2 - 9 = 0$ .

Это уравнение можно  
записать так:  $x^2 = 9$ , откуда  
 $x_{1,2} = \pm 3$ .

## Проверь себя!

Решите уравнения.

- 1)  $x^2 = 0$ ;
- 2)  $9x^2 = 81$ ;
- 3)  $4x^2 - 64 = 0$ ;
- 4)  $9x^2 + 1 = 0$ ;
- 5)  $3x^2 = 1/3$ ;
- 6)  $(x^2 - 1)/3 = 5$

# Квадратное уравнение и его корни

Квадратным называют алгебраическое уравнение 2-й степени, т.е. уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ .

Выражение  $D = b^2 - 4ac$  называют дискриминантом трёхчлена  $ax^2 + bx + c$

Уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ , имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

при этом если  $D > 0$ , то корни действительные и различные,

при  $D = 0$  корни совпадают (говорят, что уравнение имеет корень кратности два),

при  $D < 0$  уравнение не имеет корней.

# Метод выделения полного квадрата

Для решения  
квадратных уравнений  
применяется  
метод выделения полного  
квадрата.

Поясним этот метод на  
примерах.

**Задача1.**

**Решить квадратное уравнение**

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

**Преобразуем это уравнение так:**

$$x^2 + 2x = 3,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1,$$

$$(x + 1)^2 = 4.$$

**Следовательно**

$$x + 1 = 2 \text{ или } x + 1 = -2,$$

**откуда**

$$x_1 = 1, x_2 = -3.$$

**Ответ : 1, - 3.**



# Метод выделения полного квадрата

## Задача 2.

Решить уравнение

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$4x^2 - 8x = -3,$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x = -3,$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x + 4 = -3 + 4,$$

$$(2x - 2)^2 = 1,$$

$$2x - 2 = 1 \quad \text{или} \quad 2x - 2 = -1,$$

$$2x = 3 \qquad \qquad \qquad 2x = 1$$

$$x_1 = 3/2, \qquad \qquad \qquad x_2 = 1/2$$

Ответ:  $3/2, 1/2$ .

## Задача 3.

Решить уравнение

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

$$x^2 + 5x = 14.$$

$$x^2 + 2 \cdot 5/2x + 25/4 = 14 + 25/4,$$

$$(x + 5/2)^2 = 81/4,$$

$$x + 5/2 = \pm 9/2.$$

$$x_1 = 9/2 - 5/2 = 2,$$

$$x_2 = -9/2 - 5/2 = -7.$$

Ответ:  $2, -7$ .

# Решение квадратных уравнений

■ Задача 1.

Решить уравнение

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

Здесь  $a = 6$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2$ .

По формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

находим:

$$x_{1,2} = (-1 \pm 7)/12,$$

откуда

$$x_1 = (-1 + 7)/12 = 1/2,$$

$$x_2 = (-1 - 7)/12 = -2/3.$$

Ответ:  $1/2$ ,  $-2/3$

# Решение квадратных уравнений

## ■ Задача 2.

Решить уравнение

$$4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Здесь  $a = 4$ ,  $b = -4$ ,  $c = 1$ .

По формуле  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  находим:

$$x_{1,2} = (4 \pm 0)/8 = 1/2.$$

Ответ:  $1/2$ .

# Решение квадратных уравнений

Если  $b^2 - 4ac < 0$ , уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет действительных корней.

## Задача 3.

Доказать, что уравнение  $x^2 - 4x + 5 = 0$  не имеет действительных корней.

$$\begin{aligned} \text{Здесь } a &= 1, b = -4, c = 5, \\ b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно данное уравнение не имеет действительных корней

# Приведённое квадратное уравнение

- Квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  называется приведенным.

В этом уравнении старший коэффициент равен единице.

Например, уравнение  $x^2 + 3x - 4 = 0$  является приведенным.

Всякое квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  может быть приведено к виду  $x^2 + px + q = 0$  делением обеих частей уравнения на  $a \neq 0$ .

Для приведенного квадратного уравнения

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

формула корней приведенного квадратного уравнения

Этой формулой удобно пользоваться когда  $p$  – чётное число.

Например, решим уравнение  $x^2 - 14x - 15 = 0$ .

По формуле находим:  $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{(49 + 15)} = 7 \pm 8$

$$x_1 = 7 + 8, \quad x_2 = 7 - 8$$

$$x_1 = 15, \quad x_2 = -1$$

Ответ: 15, -1.

**Для приведенного квадратного уравнения справедлива следующая теорема**

# Теорема Виета



Если  $x_1, x_2$  – корни уравнения  
 $x^2 + px + q = 0$   
то справедливы формулы

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q.$$

*т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

# Теорема Виета

- Например уравнение

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

имеет корни  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 3$ ; сумма его корней  $x_1 + x_2 = 13$ , а их произведение  $x_1 x_2 = 30$ .

Отметим, что теорема Виета справедлива и в случае, когда квадратное уравнение имеет два равных корня:  $x_1 = x_2 = -p/2$ .

Например, уравнение

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

имеет равные корни:  $x_1 = x_2 = 3$ ; их сумма  $x_1 + x_2 = 6$ , произведение  $x_1 x_2 = 9$

- Задача1.

Один из корней уравнения

$$x^2 + px - 12 = 0$$

равен  $X_1 = 4$ .

Найти коэффициент  $p$  и второй корень  $x_2$  этого уравнения.

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = -12,$$

Так как  $X_1 = 4$ , то  $4 x_2 = -12$ ,

откуда  $x_2 = -3$ ,

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - 3) = -1$$

Ответ: 3, -1.

# Теорема Виета

- **Задача 2.** Составить приведённое квадратное уравнение корни которого

$$x_1 = 3, x_2 = 4.$$

Так как  $x_1 = 3, x_2 = 4$  – корни уравнения

$$x^2 + px + g = 0,$$

то по теореме Виета

$$p = -(x_1 + x_2) = -7,$$

$$g = x_1 x_2 = 12.$$

Ответ:  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

- **Задача 3.** Один из корней уравнения  $3x^2 + 8x - 4 = 0$  положителен. Не решая уравнения, определить знак второго корня.

Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$$x^2 + (8/3)x - 4/3 = 0.$$

По теореме Виета  $x_1 x_2 = -4/3 < 0$ .

По условию  $x_1 > 0$ ,  
следовательно,  $x_2 < 0$



# Обратная теорема Виета

При решении некоторых задач применяется следующая теорема. Обратная теореме Виета:

Если число  $p, g, x_1, x_2$  таковы, что

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = g,$$

то  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения

$$x^2 + px + g = 0$$

Используя теорему, обратную теореме Виета, иногда можно подбором найти корни квадратного уравнения

Задача.

Подбором найти корни уравнения

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Здесь  $p = -5, g = 6$ .

Подберём два числа  $x_1$  и  $x_2$

так, чтобы

$$x_1 + x_2 = 5,$$

$$x_1 x_2 = 6,$$

Заметим, что  $6 = 2 \cdot 3$ , а  $2 + 3 = 5$ , по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что

$x_1 = 2, x_2 = 3$  – корни уравнения

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

# Участники проекта

## ■ Группа теоретиков:

- ❖ учит основы теории решения квадратных уравнений
- ❖ выступает на семинаре **первыми!**

## ■ Группа практиков:

- ❖ Учит алгоритм решения квадратных уравнений
- ❖ выступает на семинаре **вторыми!**

# Используемые ресурсы

- Учебник «Алгебра 8» Ш.А. Алимов. И др.
- «История математики в школе.» Г.И.Глейзер.



60-1-10.