Как найти корни квадратного уравнения?

Авторы: ***учащиеся 8 класса***
Руководитель: ***Родина Алевтина Карловна***
МОУ «Блюментальская основная общеобразовательная школа»

Привет, восьмиклассник!

Твоему вниманию предоставляется проект, который поможет тебе научиться находить корни, квадратных уравнений.

Здесь ты найдёшь и общий алгоритм решения квадратных уравнений, и теоретические сведения и различные интересные задачи и многое другое.

Так что – дерзай!

Сядь поудобнее, засучи рукава и …ВПЕРЁД!

Цель проекта

- Цель данного проекта – привлечь внимание учащихся к исследовательской деятельности, вызвать интерес к изучению математики, а именно к решению квадратных уравнений. Данный проект предназначен для развития творческих способностей учащихся: предполагает развитие математического и логического мышления при решении поставленных проблем, нацеливает на самостоятельную исследовательскую деятельность, формирует навыки решения квадратных уравнений, активизирует учащихся к работе в предполагаемых проектах и созданию собственных творческих работ.
- ***Основной вопрос, на который должны ответить участники проекта:***

Как найти корни квадратного уравнения?

Дидактические цели проекта

- Совершенствование прикладных навыков работы с персональным компьютером в аспекте алгебраических исследований.
- Теоретическое и практическое владение основами решения квадратных уравнений.
- Дальнейшее формирование навыков самостоятельной работы в познавательной деятельности.

Методические цели проекта

- Научить школьников проводить исследования в области математики.
- Научить учащихся понимать структуру формулы и алгоритм вычисления корней.
- Научить школьников оформлять информацию, собранную им самим.

Этапы
и ход работы

1 этап. Класс разбивается на группы 5-6 человек.

2 этап. Перед группой ставиться проблемный вопрос.

3 этап. Распределение работ внутри группы.

4 этап. Каждая группа должна выполнить:

- поиск материала;
- анализ материала;
- оформить презентацию и буклет.

Этапы и ход работы

- Над проектом мы будем работать в течении 3-х недель.

За это время мы…
Должны решить, что будем делать и зачем.
Как разделиться—кто и с кем.
Теорию отлично изучить.
Задачи подобрать.
И алгоритмы получше осветить.
И вам, друзьям об этом рассказать!

Подробнее о проекте

- Проект *"Как найти корни квадратного уравнения?»* посвящен изучению темы «Квадратные уравнения» В рамках проекта школьники знакомятся с учебным материалом по данной теме. После чего разбиваются на группы. Перед каждой группой ставится проблемный вопрос. Группа проводит поиск и анализ информации с целью проверки собственных гипотез по сформировавшимся вопросам. По итогам проекта каждая группа подготавливает отчет в виде мультимедийных презентаций, буклетов. В рамках проекта предусматривается выступление перед классом по разрабатываемой теме.

Темы исследования учащихся

- 1. «Квадратное уравнение и его корни»
- 2. «Неполные квадратные уравнения»
- 3. «Метод выделения полного квадрата»
- 4. «Решение квадратных уравнений»
- 5. «Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета.»

Немного истории

Уравнение 2 – й степени умели решать ещё в Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до н.э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях.

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактатах.

Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.).

Средне –азиатский учёный аль - Хорезми (19 век) в трактате «Китаб аль - джебр валь - мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата

Немного истории

Франсуа Виет

(1540 – 1603)

- французский математик, ввёл систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых , кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Неполные квадратные уравнения

- Квадратное уравнение $a\ x^2 + в\ x + c = 0$ называют неполным, если хотя бы один из коэффициентов *в* или *с* равен 0 .
- Таким образом, неполное квадратное уравнение есть уравнение одного из следующих видов:

$$a\ x^2 = 0,$$

$$a\,x^2 + c = 0, \quad c \neq 0$$

$$a\,x^2 + b\,x = 0, \quad b \neq 0.$$

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения

Решение неполных квадратных уравнений

Решим уравнение

$5x^2 = 0.$

Разделив обе части этого уравнения на 5, получим:

$x^2 = 0,$

откуда

$x = 0.$

Ответ : 0

Решим уравнение

$-3x^2 + 5x = 0.$

Разложим левую часть уравнения на множители, получим:

$x(-3x + 5) = 0,$

откуда

$x_1 = 0, x_2 = 5/3.$

Ответ : 0, 5/3.

Решение неполных квадратных уравнений

- Решить уравнение

$2x^2 + 7 = 0.$

Уравнение можно записать так:

$x^2 = -7/2.$

Это уравнение действительных корней не имеет,

так как $x^2 \geq 0$ для любого действительного числа x.

- Решить уравнение

$3x^2 - 27 = 0$. Разделим обе части уравнения на 3: $x^2 - 9 = 0$.

Это уравнение можно записать так: $x^2 = 9$, откуда

$x_{1,2} = \pm 3.$

Проверь себя!

Решите уравнения.

1) $x^2 = 0;$
2) $9x^2 = 81;$
3) $4x^2 - 64 = 0;$
4) $9x^2 + 1 = 0;$
5) $3x^2 = 1/3;$
6) $(x^2 - 1)/3 = 5$

Квадратное уравнение и его корни

Квадратным называют алгебраическое уравнение 2-й степени, т.е. уравнение вида

$a\,x^2 + в\,x + c = 0$, где $a \neq 0$.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом трёхчлена

$a\,x^2 + в\,x + c$

Уравнение

$a\,x^2 + в\,x + c = 0$, где $a \neq 0$.

имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$$

при этом если D > 0, то корни действительные и различные,

при D = 0 корни совпадают (говорят, что уравнение имеет корень кратности два),

при D < 0 уравнение не имеет корней.

Метод выделения полного квадрата

Для решения квадратных уравнений применяется метод выделения полного квадрата.

<u>Поясним этот метод на примерах.</u>

Задача1.

Решить квадратное уравнение

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Преобразуем это уравнение так:

$$x^2 + 2x = 3,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1,$$

$$(x + 1)^2 = 4.$$

Следовательно

$$x + 1 = 2 \text{ или } x + 1 = -2,$$

откуда

$$x_1 = 1, x_2 = -3.$$

Ответ : 1, - 3.

Метод выделения полного квадрата

Задача **2.**

Решить уравнение

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$4x^2 - 8x = -3,$

$(2x)^2 - 2*2*2x = -3,$

$(2x)^2 - 2*2*2x + 4 = -3 + 4,$

$(2x - 2)^2 = 1,$

$2x - 2 = 1$ или $2x - 2 = -1,$

$2x = 3$ $\quad$ $2x = 1$

$X_1 = 3/2,$ $\quad$ $x_2 = ½$

Ответ: **3/2, ½.**

Задача 3.

Решить уравнение

$x^2 + 5x - 14 = 0.$

$x^2 + 5x = 14.$

$X^2 + 2*5/2x + 25/4 = 14 + 25/4,$

$(x + 5/2)^2 = 81/4,$

$x + 5/2 = \pm 9/2.$

$x_1 = 9/2 - 5/2 = 2,$

$x_2 = -9/2 - 5/2 = -7.$

Ответ: **2, - 7.**

Решение квадратных уравнений

- Задача 1.

Решить уравнение

$6x^2 + x – 2 = 0$.

Здесь а = 6, в = 1, с = -2 .

По формуле

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$$

находим:

$x_{1,2} = (-1 \pm 7)/12$,

откуда

$x_1 = (-1 + 7)/12 = ½$,

$x_2 = (-1 – 7)/12 = -2/3$.

Ответ: ½, -2/3

Решение квадратных уравнений

- Задача 2.

Решить уравнение

$4x^2 – 4x +1 = 0.$

Здесь а = 4, в = -4, с = 1 .

По формуле $x_{1,2} = \dfrac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$ находим:

$x_{1, 2} = (4 \pm 0)/8 = ½.$

Ответ: ½.

Решение квадратных уравнений

Если $b^2 - 4ac < 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.

Задача 3.

Доказать, что уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.

Здесь $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$,

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$.

Следовательно данное уравнение не имеет действительных корней

Приведённое квадратное уравнение

- Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ называется приведенным.

В этом уравнении старший коэффициент равен единице.
Например, уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$ является приведённым.
Всякое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ может быть приведено к виду $x^2 + px + q = 0$ делением обеих частей уравнения на $a \neq 0$.
Для приведённого квадратного уравнения

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

формула корней приведенного квадратного уравнения
Этой формулой удобно пользоваться когда p – чётное число.
Например, решим уравнение $x^2 - 14x - 15 = 0$.
По формуле находим: $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{(49 + 15)} = 7 \pm 8$

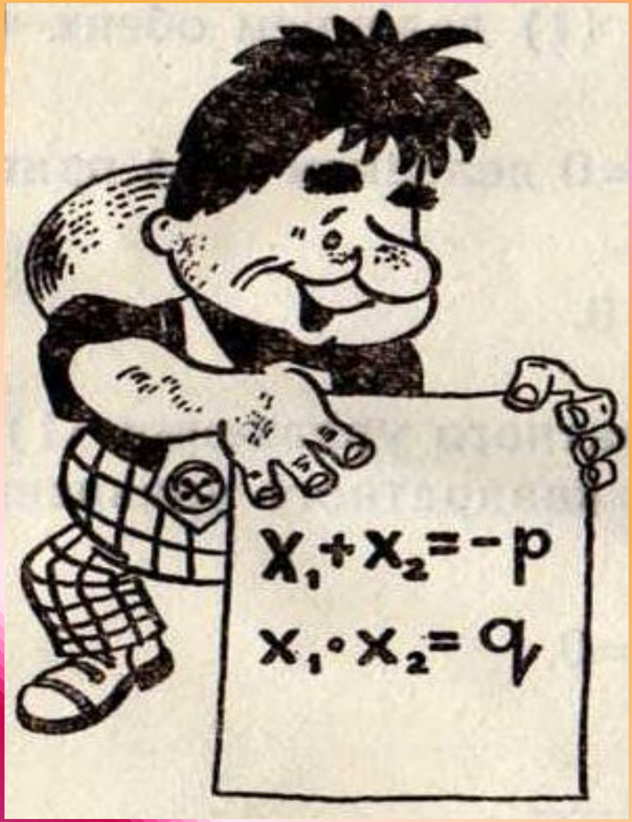
$X_1 = 7 + 8$, $x_2 = 7 - 8$

$X_1 = 15$, $x_2 = -1$

Ответ: 15, -1.

<u>Для приведённого квадратного уравнения справедлива следующая теорема</u>

Теорема Виета



Если x_1, x_2 – корни уравнения

$$x^2 + px + g = 0$$

то справедливы формулы

$$x_1+x_2 = - p,$$

$$x_1x_2 = g.$$

т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Теорема Виета

- **Например уравнение**

$x^2 - 13x + 30 = 0$

имеет корни $x_1 = 10$, $x_2 = 3$; сумма его корней $x_1 + x_2 = 13$, а их произведение $x_1 x_2 = 30$.

Отметим, что теорема Виета справедлива и в случае, когда квадратное уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -p/2$.

Например, уравнение

$x^2 - 6x + 9 = 0$

имеет равные корни: $x_1 = x_2 = 3$; их сумма $x_1 + x_2 = 6$,

произведение $x_1 x_2 = 9$

- Задача1.

Один из корней уравнения

$x^2 + px - 12 = 0$

равен $X_1 = 4$.

Найти коэффициент p и второй корень x_2 этого уравнения.

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = -12,$$

Так как $X_1 = 4$, то $4x_2 = -12$,

откуда $x_2 = -3$,

$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - 3) = -1$

Ответ: 3, - 1.

Теорема Виета

- Задача 2. Составить приведённое квадратное уравнение корни которого

$x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Так как $x_1=3$, $x_2=4$ – корни уравнения

$x^2 + px + g = 0$,

то по теореме Виета

$p = -(x_1 + x_2) = -7$,

$g = x_1x_2 = 12$.

Ответ: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

- Задача 3. Один из корней уравнения $3x^2 + 8x - 4 = 0$ положителен. Не решая уравнения, определить знак второго корня.

Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$x^2 + (8/3)x - 4/3 = 0$.

По теореме Виета $x_1x_2 = -4/3 < 0$. По условию $x_1 > 0$, следовательно, $x_2 < 0$

Обратная теорема Виета

При решении некоторых задач применяется следующая теорема. Обратная теореме Виета:

Если число *p, g,* x_1, x_2 таковы, что

$$x_1+x_2 = -p,$$

$$x_1x_2 = g,$$

то x_1 и x_2 – корни уравнения

$$x^2 + px + g = 0$$

Используя теорему, обратную теореме Виета, иногда можно подбором найти корни квадратного уравнения

Задача.

Подбором найти корни уравнения

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Здесь p = - 5, g = 6.

Подберём два числа x_1 и x_2 так, чтобы

$$x_1+x_2 = 5,$$

$$x_1x_2 = 6,$$

Заметим, что 6 = 2*3, а 2 + 3 = 5, по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$ – корни уравнения

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Участники проекта

- **Группа теоретиков:**
  - учит основы теории решения квадратных уравнений
  - выступает на семинаре первыми!
- **Группа практиков:**
  - Учит алгоритм решения квадратных уравнений
  - выступает на семинаре вторыми!

Используемые ресурсы

- Учебник «Алгебра 8» Ш.А. Алимов. И др.
- «История математики в школе.» Г.И.Глейзер.

60-1-10.