

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

# Дипломная работа

## КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ОПЕРАТОРОВ ЛОКЕТТА

Студентка группы 52: **Гончарова К. Н.**

Руководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент: **Залеская Е.Н.**

Витебск, 2016

# Цель

Данная дипломная работа направлена на изучение классов Фиттинга с заданными свойствами операторов Локетта и описание новых классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта.



# Напомним, что

Классом Фиттинга называется класс групп  $\mathbf{F}$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- ? каждая нормальная подгруппа любой группы из  $\mathbf{F}$  также принадлежит  $\mathbf{F}$ ;
- ? из того, что нормальные подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  принадлежат , всегда следует, что их произведение  $AB$  принадлежит  $\mathbf{F}$ .

# Напомним, что

Если  $F$  – произвольный непустой класс Фиттинга. Тогда  $F^*$  – наименьший из классов Фиттинга, содержащий  $F$ , такой, что  $(G \times H) F^* = GF^* \times HF^*$  для всех групп  $G$  и  $H$ , а класс  $F^*$  – пересечение всех таких классов Фиттинга  $X$ , для которых  $X^* = F^*$  для класса Фиттинга  $X$ . Операторы «\*» и «\*» называются **операторами Локетта**.

# Введение

Классы Фиттинга конечных групп впервые рассматриваются в статье Фишера, Гашюца, Хартли. Центральное место среди проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга, занимает общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием "**гипотеза Локетта**". Ее возникновение обусловлено результатами Блессеноля-Гашюца и Локетта, которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта.

# Напомним, что

Нормальный класс Фиттинга – такой класс Фиттинга  $\mathbf{F}$ , у которого в любой группе  $G$  ее  $\mathbf{F}$ -радикал  $G_{\mathbf{F}}$  является  $\mathbf{F}$ -максимальной подгруппой.

$\mathbf{F}$ -максимальная подгруппа группы  $G$  – такая  $\mathbf{F}$ -подгруппа  $H$  из  $G$ , которая не содержится ни в какой большей  $\mathbf{F}$ -подгруппе.

# Напомним, что

Класс Локетта – такой класс Фиттинга  $\mathbf{F}$ , что имеет место  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$ , где  $\mathbf{F}^*$  наименьший из классов Фиттинга, содержащий класс Фиттинга  $\mathbf{F}$ , такой, что  $(G \times H) \mathbf{F}^* = G \mathbf{F}^* \times H \mathbf{F}^*$  для всех групп  $G$  и  $H$ , а класс  $\mathbf{F}^*$  - пересечение всех таких классов Фиттинга  $X$ , для которых  $X^* = \mathbf{F}^*$  для класса Фиттинга .

# Гипотеза Локетта

Каждый класс Фиттинга определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного **F**?



Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для отдельных случаев локального класса Фиттинга. Для произвольных локальных классов Фиттинга указанная гипотеза подтверждена в разрешимом случае в 1988 году Н.Т.Воробьевым и в произвольном случае в 1996 году Галледжи. Для отдельных случаев частично локальных классов Фиттинга гипотеза Локетта была подтверждена Н.Т. Воробьевым, Е.Н. Залесской и Н.Н. Воробьевым в 2007 году, Е.Н. Залесской и Ж.П. Макаровой в 2012 году. Вместе с тем Бергер и Косси установили, что это предположение неверно для нелокальных классов Фиттинга

# Напомним, что

Локальная функция Хартли или  $H$ -функция – функция вида

$$f : P \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Локальный класс Фиттинга  $\mathbf{F}$  – такой класс Фиттинга, для которого существует  $H$ -функция  $f$  такая, что  $\mathbf{F} = LR(f)$ .

Таким образом, проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается по-прежнему актуальной.

В данной работе гипотеза Локетта подтверждена для отдельных случаев произведений классов Фиттинга. Основным результатом является теорема 4.1.

Напомним некоторые основные определения.

# Основные определения

**Гомоморф** – такой класс групп  $\mathbf{F}$ , у которого каждая фактор-группа любой группы из  $\mathbf{F}$  также принадлежит  $\mathbf{F}$ .

**Формация** – гомоморф  $\mathbf{F}$ , замкнутый относительно конечных подпрямых произведений.

**Радикальный гомоморф** – гомоморф  $\mathbf{F}$ , который является классом Фиттинга.

Гомоморф  $\mathbf{F}$  называется **насыщенным**, если из того, что  $G/\Phi(G) \in \mathbf{F}$ , следует  $G \in \mathbf{F}$ .

# Основные определения

Формацию  $\mathbf{F}$  называют **насыщенной** или локальной, если  $\mathbf{F}$  замкнута относительно фраттиниевых расширений, т.е. из того, что  $G/\Phi(G) \in \mathbf{F}$  всегда следует  $G \in \mathbf{F}$ .  $\Phi(G)$  – подгруппа Фраттини группы  $G$ , т.е. пересечение всех максимальных подгрупп  $G$ .

# Теорема(4.1)

Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_* \mathfrak{Y}$ , где  $\mathfrak{X}$  – класс Локетта, удовлетворяющий гипотезе Локетта и являющийся формацией,  $\mathfrak{Y}$  – насыщенная радикальная формация такая, что  $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = (1)$ , а  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  удовлетворяет гипотезе Локетта. Тогда, если  $\mathfrak{X} \notin \mathfrak{S}_*$ , то  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет гипотезе Локетта и не является классом Локетта.

# Схема доказательства

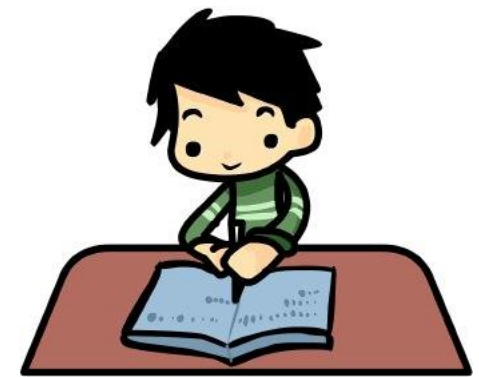
- ❖ По лемме 3.7 докажем, что  $X * Y$  является L-классом.
- ❖ Докажем, что  $F \neq F^*$ . Пойдем от противного.
- ❖ По леммам 3.1 и 3.2 докажем равенство
$$X * Y = (X * Y)^*.$$
- ❖ Докажем равенство  $(X \cap S * ) Y = X Y \cap S * Y$  по лемме 1.2(b).

# Схема доказательства

- ❖ Из леммы 1.2(a) и условия следует равенство  $S * Y \cap S * X = S * (Y \cap X) = [(Y \cap X) - (1)] = S *$
- ❖ Получаем противоречие условию. Значит наше предположение не верно и класс **F** не является классом Локетта.



Полученные результаты можно использовать при изучении классов Фиттинга, а также при написании курсовых и дипломных проектов, чтении курсов по теории групп для студентов математических специальностей.



- Данная работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция» подпрограмма «Математические методы» 2011-2015 гг.
- Работа внедрена в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики.
- Результаты исследований представлены и приняты к печати в материалах «XII Белорусской математической конференции БМ К-2016».



Спасибо за внимание!!!

