МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Дипломная работа

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ОПЕРАТОРОВ ЛОКЕТТА

Студентка группы 52: **Гончарова К. Н.**
Руководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент: **Залесская Е.Н.**

Витебск, 2016

Цель

Данная дипломная работа направлена на изучение классов Фиттинга с заданными свойствами операторов Локетта и описание новых классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта.

!

Напомним, что

Классом Фиттинга называется класс групп **F**, удовлетворяющий следующим условиям:

- каждая нормальная подгруппа любой группы из **F** также принадлежит **F**;
- из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат , всегда следует, что их произведение AB принадлежит **F**.

Напомним, что

Если $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}^*$ - наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$,, такой, что $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H, а класс $\mathfrak{F}_*$ - пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$ для класса Фиттинга . Операторы «*» и «$_*$» называются операторами Локетта.

Введение

Классы Фиттинга конечных групп впервые рассматриваются в статье Фишера, Гашюца, Хартли. Центральное место среди проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга, занимает общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием "гипотеза Локетта". Ее возникновение обусловлено результатами Блессеноля-Гашюца и Локетта , которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта.

Напомним, что

Нормальный класс Фиттинга – такой класс Фиттинга $\mathbf{F}$, у которого в любой группе G ее $\mathbf{F}$ –радикал $G_{\mathbf{F}}$ является $\mathbf{F}$ -максимальной подгруппой .

$\mathbf{F}$ -максимальная подгруппа группы G – такая $\mathbf{F}$ -подгруппа H из G, которая не содержится ни в какой большей $\mathbf{F}$ -подгруппе.

Напомним, что

Класс Локетта – такой класс Фиттинга $\mathbf{F}$, что имеет место $\mathbf{F}= \mathbf{F}^*$, где $\mathbf{F}^*$ наименьший из классов Фиттинга, содержащий класс Фиттинга $\mathbf{F}$, такой, что $(G\times H)_{\mathbf{F}^*}=G_{\mathbf{F}^*}\times H_{\mathbf{F}^*}$ для всех групп G и H, а класс $\mathbf{F}_*$ - пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathbf{X}$, для которых $\mathbf{X}^*= \mathbf{F}^*$ для класса Фиттинга .

Гипотеза Локетта

Каждый класс Фиттинга определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного **F**?

Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для отдельных случаев локального класса Фиттинга. Для произвольных локальных классов Фиттинга указанная гипотеза подтверждена в разрешимом случае в 1988 году Н.Т.Воробьевым и в произвольном случае в 1996 году Галледжи. Для отдельных случаев частично локальных классов Фиттинга гипотеза Локетта была подтверждена Н.Т. Воробьевым, Е.Н. Залесской и Н.Н. Воробьевым в 2007 году, Е.Н. Залесской и Ж.П. Макаровой в 2012 году. Вместе с тем Бергер и Косси установили, что это предположение неверно для нелокальных классов Фиттинга

Напомним, что

Локальная функция Хартли или *H*-функция– функция вида

$$f : P \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Локальный класс Фиттинга $\mathbf{F}$ – такой класс Фиттинга, для которого существует *H*-функция f такая, что $\mathbf{F} = LR(f)$.

Таким образом, проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается по-прежнему актуальной.

В данной работе гипотеза Локетта подтверждена для отдельных случаев произведений классов Фиттинга. Основным результатом является теорема 4.1.

Напомним некоторые основные определения.

Основные определения

Гомоморф– такой класс групп **F**, у которого каждая фактор-группа любой группы из **F** также принадлежит **F**.

Формация – гомоморф **F**, замкнутый относительно конечных подпрямых произведений.

Радикальный гомоморф – гомоморф **F**, который является классом Фиттинга.

Гомоморф **F** называется насыщенным, если из того, что $G/\Phi(G) \in$ **F**, следует $G \in$ F..

Основные определения

Формацию **F** называют насыщенной или локальной, если **F** замкнута относительно франттиниевых расширений, т.е. из того, что $G/\Phi(G) \in$ **F** всегда следует $G \in$ **F** .$\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп G.

Теорема(4.1)

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{X}$ – класс Локетта, удовлетворяющий гипотезе Локетта и являющийся формацией, $\mathfrak{Y}$ - насыщенная радикальная формация такая, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = (1)$, а $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ удовлетворяет гипотезе Локетта. Тогда, если $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{S}_*$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта и не является классом Локетта.

Схема доказательства

- По лемме 3.7 докажем, что $X_* Y$ является L -классом.
- Докажем, что **F≠F***. Пойдем от противного.
- По леммам 3.1 и 3.2 докажем равенство

$$X_* Y = (X_* Y)^*.$$

- Докажем равенство $(X \cap S_*) Y = X Y \cap S_* Y$ по лемме 1.2(b).

Схема доказательства

- Из леммы 1.2(a) и условия следует равенство $S_* Y \cap S_* X = S_*(Y \cap X) = [(Y \cap X) - (_1)] = S^*$
- Получаем противоречие условию. Значит наше предположение не верно и класс **F** не является классом Локетта.

Полученные результаты можно использовать при изучении классов Фиттинга, а также при написании курсовых и дипломных проектов, чтении курсов по теории групп для студентов математических специальностей.

- Данная работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция» подпрограмма «Математические методы» 2011-2015 гг.

- Работа внедрена в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики.

- Результаты исследований представлены и приняты к печати в материалах «XII Белорусской математической конференции БМ К-2016».

Спасибо за внимание!!!