«Клавдий Птолемей» (90-160)

Выполнил кадет 11 класса
Жарков Дмитрий

Клавдий Птолемей (ок. 90 — ок. 160), древнегреческий учёный, жил в Александрии. Разработал математическую теорию движения планет вокруг неподвижной Земли, позволявшую вычислить их положение на небе. Вместе с теорией движения Солнца и Луны она составила Птолемееву систему мира. Система Птолемея изложена в его главном труде «Алмагест» — энциклопедии астрономических знаний древних. В «Алмагесте» приведены также сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии, впервые дано решение ряда математических задач. В области оптики исследовал преломление и рефракцию света. В труде «География» дал свод географических сведений античного мира.

Клавдий Птолемей жил в Александрии в первой половине II века нашей эры. Следует отметить, что история довольно странным образом обошлась с личностью и трудами Птолемея. О его жизни и деятельности нет никаких упоминаний у историков той эпохи, когда он жил… Даже приблизительные даты жизни и смерти Птолемея неизвестны, как неизвестны и какие – нибудь факты его биографии. Наиболее надёжные сведения, касающиеся жизни учёного, содержатся в его собственных трудах. Важнейшим из учёно – литературных произведений было его «Великое собрание», более известное под названием «Алмагест». Традиционно считается, что этот труд был создан во время правления римского императора Антонина Пия (138 – 161 г.г. н.э.). Пытаясь оценить пределы жизни Птолемея, необходимо также иметь в виду, что после «Алмагеста» им было написано ещё несколько больших произведений, различных по тематике. Два из них («География» и «Оптика») носят энциклопедический характер, что по самым скромным меркам должно было занять не меньше 20 лет. Следовательно, можно полагать, что Птолемей был жив ещё при Марке Аврелии (161 - 180 годы н.э.), как об этом сообщают более поздние источники. Согласно Олимпиадору, александрийскому философу VI века н.э., Птолемей работал как астроном в городе Канопе (ныне Абикур), расположенном в западной части дельты Нила, на протяжении 40 лет. Этому сообщению, однако, противоречит тот факт, что все наблюдения Птолемея, приведенные в «Алмагесте», выполнены в Александрии. Само по себе имя Птолемей свидетельствует о египетском происхождении его обладателя, который, вероятно, принадлежал к числу греков, приверженцев эллинистической культуры в Египте, или же происходил из эллинизированных местных жителей. Латинское имя «Клавдий» заставляет предположить, что у него имелось римское гражданство. В античных и средневековых источниках содержится немало достоверных свидетельств о жизни Птолемея, которые нельзя ни подтвердить, ни опровергнуть. Феодор Милетинский (XIV век н.э.) сообщает, например, что Птолемей родился в Гермиевой Птолемиаде, расположенной в Верхнем Египте, и что этим объясняется его имя "Птолемей"; согласно другой версии, он был родом из Пелузия, пограничного города к востоку от дельты Нила, но это утверждение, скорее всего, результат ошибочного прочтения имени «Клавдий» в арабских источниках. В поздней античности и в средние века Птолемею приписывали также царское происхождение. «Алмагест» и ряд других его произведений (кроме «Географии» и «Гармоник») посвящён некоему Сиру. Это имя было достаточно распространено в эллинистическом Египте в рассматриваемый период.

Птолемей использует также планетные наблюдения некоего Теона, выполненные в период 127-132 годы н.э. Он сообщает, что эти наблюдения «оставлены» ему «математиком Теоном», что, по-видимому, предполагает личный контакт. Возможно, Теон был учителем Птолемея. Некоторые учёные отождествляют его с Теоном Смирнским (первая половина II века н.э.), философом - платоником, уделявшим внимание астрономии. У Птолемея, несомненно, были сотрудники, помогавшие ему при проведении наблюдений и расчете таблиц. Объём вычислений, которые требовалось произвести для построения астрономических таблиц в «Алмагесте», поистине огромен. Во времена Птолемея Александрия ещё оставалась крупным научным центром. В ней действовало несколько библиотек, из которых самая крупная располагалась в александрийском Мусейоне. Между сотрудниками библиотеки и Птолемеем существовали, по-видимому, личные контакты, как это нередко бывает и теперь при научной работе. Кто-то помогал Птолемею в подборе литературы по интересующим его вопросам, приносил рукописи ли подводил к стеллажам и нишам, где хранились свитки. До недавнего времени предполагалось, что «Алмагест» - самая ранняя из дошедших до нас астрономических работ Птолемея. Однако недавние исследования показали, что «Канопская надпись» предшествовала «Алмагесту». Упоминания об «Алмагесте» содержатся в «Планетных гипотезах», «Подручных таблицах», «Четверокнижии» и «Географии», что делает несомненным более позднее их написание. Об этом же свидетельствует анализ содержания этих произведений. В «Подручных таблицах» многие таблицы упрощены и улучшены по сравнению с аналогичными таблицами в «Алмагесте». В «Планетных гипотезах» используется другая система параметров для описания движения планет и по - новому решен ряд вопросов, например, проблема планетных расстояний. В «Географии» нулевой меридиан перенесён на Канарские острова вместо Александрии, как это принято в «Алмагесте». «Оптика» создана также, по-видимому, позднее «Алмагеста»; в ней рассмотрена астрономическая рефракция, которая не играет заметной роли в «Алмагесте». Поскольку «География» и «Гармоники» не содержат посвящения Сиру, то с известной долей риска можно утверждать, что эти произведения написаны позднее других работ Птолемея.

Работы Птолемея

Кроме «Алмагеста» Птолемею принадлежит также ряд других сочинений по астрономии, астрологии, географии, пользовавшиеся большой известностью в античности и средневековье, в том числе:

«Канопская надпись»
«Подручные таблицы»
«Планетные гипотезы»
«Фазы неподвижных звёзд»
«Аналемма»
«Планисферий»
«Четверокнижие»

«География»

«Канопская надпись»

«Канопская надпись» представляет собой список параметров астрономической системы Птолемея, который был высечен на стелле, посвящённой Спасителю Богу (возможно, Серапису), в городе Канопе в 10-й год правления Антонина (147/148 год н.э.). Сама стелла не сохранилась, но её содержание известно из трёх греческих рукописей. Большинство параметров, принятых в этом списке, совпадает с используемыми в «Алмагесте». Однако имеются расхождения, не связанные с ошибками переписчиков. Исследование текста «Канопской надписи» показало, что она восходит ко времени более раннему, чем время создания «Алмагеста».

«Подручные таблицы»

«Подручные таблицы», вторая по величине после «Алмагеста» астрономическая работа Птолемея, представляет собой сборник таблиц для расчёта положений светил на сфере в произвольный момент времени и для предвычисления некоторых астрономических явлений, прежде всего затмений. Таблицам предшествует «Введение» Птолемея, в котором поясняются основные принципы их использования. «Подручные таблицы» дошли до нас в переложении Теона Александрийского, однако известно, что Теон немногое изменил в них. Он написал к ним также два комментария – «Большой комментарий» в пяти книгах и «Малый комментарий», которые должны были заменить «Введение» Птолемея. «Подручные таблицы» тесно связаны с «Алмагестом», но содержат также целый ряд нововведений, имеющих как теоретический, так и практический характер. Например, в них приняты другие методы для вычисления широт планет, изменён ряд параметров кинематических моделей. За начальную эпоху таблиц принята эра Филиппа (324 год до н.э.). Таблицы содержат звёздный каталог, включающий около 180 звёзд в окрестности эклиптики, в котором долготы измеряются сидерически, причём Регул принят за начало отсчёта сидерической долготы. Имеется также список около 400 «Важнейших городов» с указанием географических координат. В «Подручных таблицах» содержится также «Царский канон» - основа хронологических вычислений Птолемея. В большинстве таблиц значения функций приводятся с точностью до минут, правила их использования упрощены. Эти таблицы имели, несомненно, астрологическое предназначение.

«Планетные гипотезы»

«Планетные гипотезы» - небольшая, но имеющая важное значение в истории астрономии работа Птолемея, состоящая из двух книг. Только часть первой книги сохранилась на греческом языке; однако до нас дошёл полный арабский перевод этого произведения, принадлежащий Сабиту ибн Корре (836-901 годы н.э.), а также перевод на еврейский язык XV века н.э. Книга посвящена описанию астрономической системы как целого. «Планетные гипотезы» отличаются от «Алмагеста» в трёх отношениях:

1) В них используется другая система параметров для описания движения светил;

2) Упрощены кинематические модели, в частности модель для описания движения планет по широте;

3) Изменён подход к самим моделям, которые считаются не геометрическими абстракциями, призванными «спасти явления», а частями единого механизма, реализуемого физически.

Детали этого механизма построены из эфира, пятого элемента аристотелевой физики. Механизм, управляющий движениями светил, представляет собой соединение гомоцентрической модели мира с моделями, построенными на основе эксцентров и эпициклов. Движение каждого светила (Солнца, Луны, планет и звёзд) происходит внутри особого сферического кольца определённой толщины. Эти кольца последовательно вложены друг в друга таким образом, чтобы не осталось места для пустоты. Центры всех колец совпадают с центром неподвижной Земли. Внутри сферического кольца светило движется согласно той кинематической модели, которая

принята в «Алмагесте» (с небольшими изменениями).

В «Алмагесте» Птолемей определяет абсолютные расстояния (в единицах радиуса Земли) только до Солнца и Луны. Для планет этого нельзя сделать вследствие отсутствия у них заметного параллакса. В «Планетных гипотезах», однако, он находит абсолютные расстояния также и для планет, исходя из предположения, что максимальное расстояние одной планеты равняется минимальному расстоянию планеты, следующей за ней. Принятая последовательность расположения светил: Луна, Меркурий , Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн, неподвижные звёзды. В «Алмагесте» определяются максимальное расстояние до Луны и минимальное расстояние до Солнца от центра сфер. Их разность близко соответствует суммарной величине сфер Меркурия и Венеры, полученной независимо. Это совпадение в глазах Птолемея и его последователей подтверждало правильность расположения Меркурия и Венеры в промежутке между Луной и Солнцем и свидетельствовало о достоверности системы в целом. В заключение трактата приводятся результаты определения Гиппархом видимых диаметров планет, на основании которых вычисляются их объёмы. «Планетные гипотезы» пользовались большой известностью в поздней античности и в средние века. Разработанный в них планетный механизм нередко изображали графически. Эти изображения (арабские и латинские) служили наглядным выражением астрономической системы, которую

обычно определяли как «система Птолемея».

«Фазы неподвижных звёзд»

«Фазы неподвижных звёзд» - небольшая работа Птолемея в двух книгах, посвящённая погодным предсказаниям на основе наблюдений дат синодических явлений звёзд. До нас дошла только книга II, содержащая календарь, в котором на каждый день года приводится погодное предсказание в предположении, что именно в этот день произошло одно из четырёх возможных синодических явлений (гелиакический восход или заход акронический восход, космический заход) Например:

Тот 1 14+1/2 часов:

[звезда] в хвосте Льва восходит; согласно Гиппарху, северные ветры заканчиваются; согласно Евдоксу, дождь, гроза, северные ветры заканчиваются. Птолемей использует всего около 30 звёзд первой и второй величины и приводит предсказания для пяти географических климатов, для которых максимальная продолжительность дня изменяется от 13+1/2h до 15+1/2h через 1/2 часа. Даты приводятся в александрийском календаре. У казаны также даты равноденствий и солнцестояний (I, 28; IV, 26; VII, 26; XI, 1), что позволяет приближенно датировать время написания работы как 137-138 гг. н.э. Предсказания погоды на основе наблюдений восходов отражают, очевидно, донаучную стадию в развитии античной астрономии. Однако, Птолемей вносит и в эту не вполне

астрономическую область элемент научности.

«Аналемма»

«Аналемма» - трактат, в котором описан метод нахождения геометрическим построением в плоскости дуг и углов, фиксирующих положение точки на сфере относительно избранных больших кругов. Сохранились фрагменты греческого текста и полный латинский перевод этого произведения, выполненный Виллемом из Мербеке (XIII в. н.э.). В нём Птолемей решает следующую задачу: определить сферические координаты Солнца (его высоту и азимут), если известны географическая широта места, долгота Солнца и время дня h. Чтобы фиксировать положение Солнца на сфере, он использует систему из трёх ортогональных осей, образующих октант. Относительно этих осей отсчитываются углы на сфере, которые затем определяются в плоскости построением. Применяемый метод близок используемым в настоящее время в начертательной геометрии. Основная область его применения в античной астрономии - конструирование солнечных часов. Изложение содержания «Аналеммы» содержится в трудах Витрувия (Об архитектуре IX, 8) и Герона Александрийского (Диоптра 35), живших на полстолетия раньше Птолемея. Но хотя основная идея метода была известна задолго до Птолемея, его решение отличает законченность

и красота, которой мы не находим ни у кого из его предшественников.

«Планисферий»

«Планисферий» - небольшая работа Птолемея, посвящённая использованию теории стереографической проекции при решении астрономических задач. Сохранилась только на арабском; испано-арабская версия этого произведения, принадлежащая Масламу ал-Маджирити (X-XI вв. н.э.). Была переведена на латинский язык Германом из Каринтии в 1143 г. Идея стереографической проекции заключается в следующем: точки шара проецируются из какой-либо точки его поверхности на касательную к нему плоскость, при этом окружности, проведённые на поверхности шара, переходят в окружности на плоскости и углы сохраняют свою величину. Основные свойства стереографической проекции были известны уже, по - видимому, за два столетия до Птолемея. В «Планисферии» Птолемей решает две задачи:

- построить в плоскости методом стереографической проекции отображения основных кругов н ебесной сферы;
- определить времена восхода дуг эклиптики в прямой и наклонных с ферах (т.е. при (phi)=0 и (phi)/=0 соответственно) чисто геометрически.

Это сочинение также примыкает по своему содержанию к задачам, решаемым в настоящее время начертательной геометрией. Развитые в нём методы послужили основой при создании астролябии - инструмента, сыгравшего

немаловажную роль в истории античной и средневековой астрономии.

«Четверокнижие»

«Четверокнижие» - основное астрологическое произведение Птолемея, известное под латинизированным названием «Квадрипартитум». Оно состоит из четырёх книг. Во времена Птолемея вера в астрологию была повсеместно распространена. Птолемей не был исключением в этом отношении. Он рассматривает астрологию как необходимое дополнение к астрономии. Астрология предсказывает земные события, учитывая влияние небесных светил; астрономия же предоставляет информацию о положениях светил, необходимую для составления предсказаний. Птолемей, однако, не был фаталистом; влияние небесных светил он считает лишь одним из факторов, определяющих события на Земле. В работах по истории астрологии выделяют обычно четыре вида астрологии, распространённых в эллинистический период, - мировая (или общая), генетлиалогия, катархен и интеррогативная. В сочинении Птолемея рассмотрены только первые два вида. В книге I даны общие определения астрологических понятий. Книга II целиком посвящена мировой астрологии, т.е. методам предсказаний событий, касающихся больших земных регионов, стран, народов, городов, больших социальных групп и т.д. Здесь рассмотрены вопросы так называемой «астрологической географии» и погодные предсказания. Книги III и IV посвящены методам предсказания индивидуальных человеческих судеб. Работу Птолемея характеризует высокий математический уровень, что выгодно отличает её от других астрологических произведений того же периода. Вероятно, поэтому «Четверокнижие» пользовалось огромным авторитетом среди астрологов, несмотря на то, что в нём отсутствовала катархен - астрология, т.е. Методы определения благоприятности или не благоприятности избранного момента для какого-либо дела.

«География»

Огромной популярностью пользовалась «География», или «Географическое руководство» Птолемея в восьми книгах. По своему объёму это произведение ненамного уступает «Алмагесту». Оно содержит описание известной во времена Птолемея части мира. Однако, работа Птолемея существенно отличается от аналогичных сочинений его предшественников. Собственно описания занимают в нём немного места, основное внимание уделяется проблемам математической географии и картографированию. Птолемей сообщает, что весь фактический материал он заимствовал из географического сочинения Марина Тирского (датируемого приблизительно 110 годом н. э.), представлявшего собой, по - видимому, топографическое о писание регионов с указаниями направлений и расстояний между пунктами. Основная задача картографирования - это отображение сферической поверхности Земли на плоскую поверхность карты с минимальными искажениями. В книге I Птолемей критически анализирует метод проецирования, используемый Марином Тирским, так называемую цилиндрическую проекцию, и отвергает его. Он предлагает два других метода - равнопромежуточную коническую и псевдоконическую проекции. Размеры мира по долготе он принимает равными 180 градусов, отсчитывая долготу от нулевого меридиана, проходящего через Острова Блаженных (Канарские острова), с запада на восток, по широте - от 63 градуса к северу до 16 градусов 25' к югу от экватора (что соответствует параллелям через Фуле и через точку, расположенную симметрично Мероэ относительно экватора).

В книгах II-VII приводится список городов с указанием географических долготы и широты и краткие описания.

При его составлении, по - видимому, использовались списки мест, имеющих одну и ту же продолжительность дня, или мест, находящихся на определённом расстоянии от нулевого меридиана, входившие, возможно, в состав работы Марина Тирского. Аналогичного вида списки содержатся в книге VIII, где дано также разбиение карты мира на 26 региональных карт. В состав работы Птолемея входили также сами карты, которые, однако, до нас не дошли. Картографический материал, который обычно связывают с «Географией» Птолемея, имеет на самом деле более позднее происхождение. «География» Птолемея сыграла выдающуюся роль в истории математической географии, ничуть не меньшую, чем «Алмагест» в истории астрономии.

Теорема Птолемея

Одной из самых знаменитых (и полезных) теорем элементарной геометрии, несомненно, является теорема Птолемея. По непонятной причине эта теорема не входит в стандартный курс школьной математики. Можно выдвинуть такую гипотезу: известные доказательства этой теоремы слишком сложные. Правда, с этим трудно согласиться (на наш взгляд, простые доказательства есть), но если это все же так, то положение может исправить нижеприведённое доказательство.

ТЕОРЕМА (Птолемея) Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Найдём площадь S четырёхугольника $ABCD$ двумя способами.

Способ I. Как известно, площадь выпуклого четырёхугольника (не обязательно вписанного) равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \tfrac{1}{2}\, e\, f \sin\varphi$$

где φ — угол между диагоналями.

Способ II. Рассмотрим на дуге *ABC* точку *B′* такую, что *AB* =■ *CB′.* Поскольку треугольники *ABC* и *CB′A* равны, равны и их площади, а тогда равны и площади четырехугольников *ABCD u AB′CD.* Разобьём вновь полученный четырехугольник *AB′CD* на два треугольника диагональю *DB′.* Площадь треугольника *AB′D* равна — ½ b d sin <*DAB′,* площадь треугольника *CB′D* равна — arcsin< *DCB′.* Так как четырёхугольник *AB′CD* вписанный, углы *DAB′* и *DC B′ в* сумме дают 180° и поэтому синусы этих углов совпадают. Остаётся заметить, что

<DAB′ = <DAC + <CAB′ = <DAC + <ADB = ф

по теореме об угле между пересекающимися хордами. Складывая площади треугольников и приравнивая результат к площади четырёхугольника, получаем

*½ e f sin*ф = *½* arcsinф + *½* b d sinф,

откуда

ef = ac + bd, что и требовалось д оказать.

Для сравнения приведём другой способ доказательства теоремы Птолемея, известный из литературы. По теореме косинусов имеем:

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$.

Избавляясь от косинусов и раскладывая на множители, получаем:

$e^2(cd + ab) = (ad + bc)(bd + ac)$. Аналогично,

$f^2(ad + bc) = (cd + ab)(bd + ac)$.

Перемножая полученные равенства и сокращая на общие ненулевые множители, получаем:

$e^2 f^2 = (bd + ac)^2$, откуда и следует утверждение теоремы Птолемея.

В заключение приведём задачу, которую можно решить с помощью теоремы Птолемея. Эта задача предлагалась на вступительных экзаменах в МИРЭА в 1994 году.

Задача. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность, причём

L ACD = 90°, *L ACB* = *L BAD*,

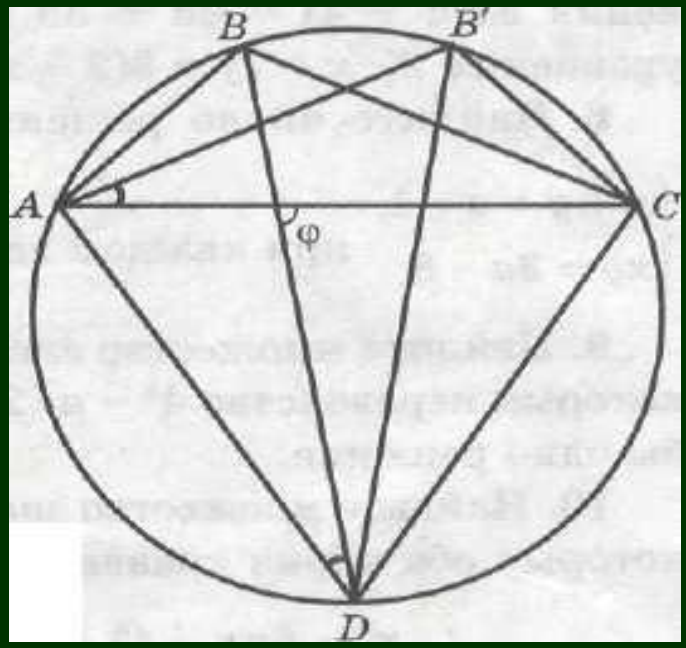
AD = 2, *CD* = 6/5

Найдите *BC*.

Решение. Из условия следует, что *AD* — диаметр, *L ABD* = 90°, *AB* = *BD*. Следовательно, треугольник *ABD* — равнобедренный прямоугольный, откуда

AB =*BD* =√2.

Далее, из прямоугольного треугольника *ACD* находим катет *AC*: *AC* = 8/5. Осталось применить теорему Птолемея:

2 • *BC*+ √2 • 6/5 = 8/5 • √2

Ответ: √2 / 5