«Число, положение и комбинаторика – три взаимно пересекающиеся, но различные сферы мысли, к которым можно отнести все математические идеи»

Джозеф Сильвестр (1844 г.)

КОМБИНАТОРИКА

КОМБИНАТОРИКА

- это раздел математики, в котором изучаются различного рода соединения элементов:

- перестановки,
- размещения,
- сочетания.

Термин «**комбинаторика**» происходит от латинского слова ***«combina»,*** что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».


алгебра
геометрия
Математика
теория вероятностей
комбинаторика

Готфрид Вильгельм Лейбниц

(1646 - 1716)

Лейбниц впервые ввёл термин ***«комбинаторика»*** и стал рассматривать комбинаторику как самостоятельный раздел математики.

Основное правило комбинаторики (правило умножения)

Если некоторый выбор А можно осуществить **m** различными способами, а для каждого из этих способов другой выбор В можно осуществить **n** способами, то выбор А и В можно осуществить **mn** способами.

Пример 1

К площади с неким памятником ведёт 6 улиц. По четырём из них разрешено двустороннее движение, а по двум одностороннее – к площади. Водитель собирается приехать на площадь, посмотреть на памятник, а затем покинуть площадь. Каким числом способов он может это сделать?

6 способов попасть на площадь и 4 способа уехать с площади. Значит, всего 6 х 4 = **24 способа**.

Основное правило комбинаторики в общем виде

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k –го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

<u>Пример 2</u>

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5 , если:

а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;

б) цифры могут повторяться.

а) Для первой цифры 5 вариантов – 1,2,3,4,5 (0 не может быть).
Для второй цифры 5 вариантов, для третьей 4 варианта, для четвёртой 3 варианта.

5х5х4х3 = **300 чисел**.

б) 5 возможностей для первой цифры, 6 вариантов для других:

5х6х6х6 = **1080 чисел**.

Сочетания

Сочетание из n элементов по k - произвольное k-элементное подмножество n-элементного множества (комбинация). Порядок элементов в подмножестве не имеет значения.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Термин "***сочетание***" впервые встречается у **Блеза Паскаля** в 1665 году.
С – первая буква французского слова combinasion – сочетание.

(1623-1662)

Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

N!

n! (n-факториал) – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

n! = 1 x 2 x 3 x ….. x n

0!=1

1! = 1

Термин «***факториал***» ввел в 1800 году французский математик Аргобаст Луи Франсуа Антуан (1759-1803).

Обозначение **n!** придумал чуть позже французский математик Кристиан Крамп (1760-1826) в 1808 году.

Сочетания

Пример 3

Сколькими способами читатель может выбрать 3 книжки из 5?

Число способов равно числу трёхэлементных подмножеств из 5 элементов:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 120 : 12 = 10$$

Пример 4

Сколькими способами из 7 судей можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Перестановки

Множество называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, где n – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

Перестановки – различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Термин "***перестановка***" употребил впервые Якоб Бернулли в книге «Искусство предположений».
P – первая буква французского слова *permutation* – перестановка.

(1654-1705)

Перестановки

Пример 5

Перестановки множества A={a, b, c} из трёх элементов имеют вид:

(a, b, c); (b, c, a); (c, a, b);

(a, c, b); (b, a, c); (c, b, a),

т. е. $P_3 = 3! = 1x2x3 = 6$ перестановок.

Пример 6

Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?

$P_4 = 4! = 1x2x3x4 = 24$ способа.

Размещения

Размещения из n элементов по k – упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов.
Различные размещения отличаются количеством элементов или их порядком.
A – первая буква французского слова *arrangement* - размещение.

Число всех k-элементных подмножеств множества A равно C_n^k

Каждое такое подмножество можно упорядочить k! способами.
Значит, число размещений из n по k равно

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$$

<u>Пример 7</u>
Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 мест?

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

Сочетания с повторениями

Сочетаниями с повторениями называются такие сочетания, в которых некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми.

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$$

<u>Пример 8</u>

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеется 4 сорта пирожных?

$$\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что **n** элементов различны.
Если среди **n** элементов есть **n1** элемент одного вида, **n2** элементов другого вида и т.д., **nk** элементов k-го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\overline{P}_n(n_1,..,n_k) = \frac{n!}{n_1!.....n_k!}, \text{где} \quad n_1 + ... + n_k = n$$

<u>Пример 9</u>
Сколько различных «слов» можно составить из букв слова ДЕД?
n=3, k=2, n_1=2, n_2=1

$$\overline{P}_3(2,1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

Размещения с повторениями

Размещения из **n** элементов, в каждое из которых входит **m** элементов, причём один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более **m** называются **размещениями из n элементов по m с повторениями.**

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

<u>Пример 10</u>

Телефонные номера одной фирмы состоят только из цифр 2,3,5,7. Сколько всего может быть телефонных номеров, если каждый номер семизначный?

$$\overline{A}_4^7 = 4^7 = 16384$$