



«Число, положение и комбинаторика – три
взаимно пересекающиеся, но различные
сферы мысли, к которым можно
отнести все математические идеи»

Джозеф Сильвестр (1844 г.)

КОМБИНАТОРИКА

КОМБИНАТОРИКА

- это раздел математики, в котором изучаются различного рода соединения элементов:

- перестановки,
- размещения,
- сочетания.

Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова «*combinā*», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять».



алгебра

геометрия

М
а
т
е
м
а
т
и
к
а

теория
вероятностей

комбинаторика

ей

Готфрид Вильгельм Лейбниц



Лейбниц впервые ввёл термин **«комбинаторика»** и стал рассматривать комбинаторику как самостоятельный раздел математики.

(1646 - 1716)

Основное правило комбинаторики (правило умножения)

Если некоторый выбор A можно осуществить m различными способами, а для каждого из этих способов другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B можно осуществить mn способами.

Пример 1

К площади с неким памятником ведёт 6 улиц. По четырём из них разрешено двустороннее движение, а по двум одностороннее – к площади. Водитель собирается приехать на площадь, посмотреть на памятник, а затем покинуть площадь. Каким числом способов он может это сделать?

6 способов попасть на площадь и 4 способа уехать с площади.
Значит, всего $6 \times 4 = \mathbf{24}$ способа.

Основное правило комбинаторики в общем виде

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

Пример 2

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, если:

- а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;
- б) цифры могут повторяться.

а) Для первой цифры 5 вариантов – 1,2,3,4,5 (0 не может быть).
Для второй цифры 5 вариантов, для третьей 4 варианта,
для четвёртой 3 варианта.

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = \mathbf{300 \text{ чисел.}}$$

б) 5 возможностей для первой цифры, 6 вариантов для других:

$$5 \times 6 \times 6 \times 6 = \mathbf{1080 \text{ чисел.}}$$

Сочетания

Сочетание из n элементов по k - произвольное k -элементное подмножество n -элементного множества (комбинация).
Порядок элементов в подмножестве не имеет значения.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Термин “**сочетание**” впервые встречается у **Блеза Паскаля** в 1665 году.

C – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание.



(1623-1662)

Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n .

N!

$n!$ (n -факториал) – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Термин «**факториал**»
ввел в 1800 году
французский математик
Аргобаст Луи Франсуа
Антуан (1759-1803).

Обозначение $n!$
придумал чуть позже
французский математик
Кристиан Крамп
(1760-1826) в 1808 году.

Сочетания

Пример 3

Сколькими способами читатель может выбрать 3 книжки из 5?

Число способов равно числу трёхэлементных подмножеств из 5 элементов:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 120 : 12 = 10$$

Пример 4

Сколькими способами из 7 судей можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Перестановки

Множество называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n , где n – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

Перестановки – различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов.

$$P_n = n!$$

Термин “**перестановка**” употребил впервые Якоб Бернулли в книге «Искусство предположений». Р – первая буква французского слова *permutation* – перестановка.



(1654-1705)

Перестановки

Пример 5

Перестановки множества $A=\{a, b, c\}$ из трёх элементов имеют вид:

(a, b, c); (b, c, a); (c, a, b);
(a, c, b); (b, a, c); (c, b, a),

т. е. $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ перестановок.

Пример 6

Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?

$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ способа.

Размещения

Размещения из n элементов по k – упорядоченные k -элементные подмножества множества из n элементов.

Различные размещения отличаются количеством элементов или их порядком.

A – первая буква французского слова *arrangement* - размещение.

Число всех k -элементных подмножеств множества A равно C_n^k

Каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами.

Значит, число размещений из n по k равно

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Пример 7

Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 мест?

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

Сочетания с повторениями

Сочетаниями с повторениями называются такие сочетания, в которых некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми.

$$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$$

Пример 8

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеется 4 сорта пирожных?

$$\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что n элементов различны.

Если среди n элементов есть n_1 элемент одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., n_k элементов k -го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\bar{P}_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}, \text{ где } n_1 + \dots + n_k = n$$

Пример 9

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова ДЕД?
 $n=3$, $k=2$, $n_1=2$, $n_2=1$

$$\bar{P}_3(2,1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

Размещения с повторениями

Размещения из n элементов, в каждое из которых входит m элементов, причём один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более m называются **размещениями из n элементов по m с повторениями**.

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример 10

Телефонные номера одной фирмы состоят только из цифр 2,3,5,7. Сколько всего может быть телефонных номеров, если каждый номер семизначный?

$$\overline{A}_4^7 = 4^7 = 16384$$