

# Теория вероятностей


математическая наука, изучающая  
закономерности случайных явлений

# Список литературы

- Е. С. Вентцель, Л.А. Овчаров, Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М: Высшая школа, 2000г.
- Е. С. Вентцель, Л.А. Овчаров, Задачи и упражнения по теории вероятностей. М: Высшая школа, 2000г.
- Гмурман, В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие — 12-е изд., перераб.-* М.: Высшее образование, 2006.
- Г.В. Горелова, И.А. Кацко, Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением EXCEL.- Ростов-на-Дону.: Феникс, 2001.
- Ю. Е. Шишмарев, Дискретная математика. Конспект лекций, Ч.2. ВГУЭС, 2002г.

# Исторические сведения

- Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам и связывают с первыми попытками математического анализа азартных игр (орлянка, кости, рулетка). Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся к XVII веку. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, *Блез Паскаль* и *Пьер Ферма* открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей. Решением тех же задач занимался и *Христиан Гюйгенс*. Его работа, в которой вводятся основные понятия теории вероятностей (понятие вероятности как величины шанса; математическое ожидание для дискретных случаев, в виде цены шанса), а также используются теоремы сложения и умножения вероятностей (не сформулированные явно), вышла в печатном виде на двадцать лет раньше (1657 год) издания писем Паскаля и Ферма (1679 год).
- Важный вклад в теорию вероятностей внёс *Якоб Бернулли* (доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний). В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений. *Лаплас* и *Пуассон* доказали первые предельные теоремы. Во второй половине XIX века основной вклад внесли русские учёные П. Л. Чебышев, А. А. Марков и А. М. Ляпунов. В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также разработана теория *цепей Маркова*.
- Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной Андреем Николаевичем Колмогоровым. В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики.



# Комбинаторика. Принципы сложения и умножения

# Комбинаторика

- *Комбинаторика* – раздел математики, посвященный подсчету количеств разных комбинаций элементов некоторого, обычно конечного, множества
- *Комбинаторика* возникла в XVI веке. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр. Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера.

# Принципы комбинаторики

## Принцип сложения

- Основные принципы комбинаторики:
- Принцип сложения.
- Принцип умножения.

### Принцип сложения

**Задача 1:** В классе 7 девочек и 8 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?

**Решение:** Для работы у доски мы можем выбрать девочку 7 способами **или** мальчика 8 способами.

Общее число способов равно  $7+8=15$ .

**Задача 2:** В классе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по истории, 4 человека имеют «5» и по математике и по истории. Сколько человек имеют пятерку по математике или по истории?

**Решение:** Так как 4 человека входят и в семерку отличников по математике и в девятку отличников по истории, то сложив «математиков» и «историков», мы дважды учтем этих четверых, поэтому вычтя их один раз из суммы, получим результат  $7+9-4=12$ .

Итак, 12 человек имеют пятерку по математике или по истории.

# Принцип сложения

- Принцип сложения 1: Если объект **a** можно получить **n** способами, объект **b** можно получить **m** способами и эти способы различны, то объект «**a или b**» можно получить **n+m**.
- Принцип сложения 2: Если объект **a** можно получить **n** способами, объект **b** можно получить **m** способами, то объект «**a или b**» можно получить **n+m-k** способами, где **k** – это количество повторяющихся способов.

# Принцип умножения

- **Задача**: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?
- **Решение**: Для каждого варианта подъема на гору существует 5 вариантов спуска с горы. Значит всего способов подняться на гору и спуститься с нее  $5 \cdot 5 = 25$ .
- **Принцип умножения**: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект «***a* и *b***» можно получить ***m \cdot n*** способами.

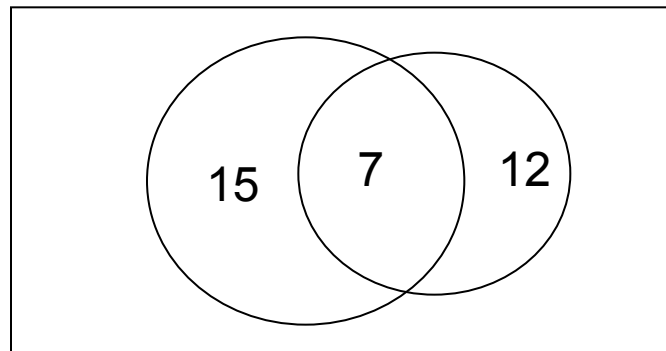


# Задачи

- 1) Из 10 коробок конфет, 8 плиток шоколада и 12 пачек печенья выбирают по одному предмету для новогоднего подарка. Сколькими способами это можно сделать?
- **Решение.** Коробку конфет можно выбрать 10 способами, шоколад – 8, печенье – 12 способами. Всего по принципу умножения получаем  $10 \cdot 8 \cdot 12 = 960$  способов.

# Задачи

- 2) В группе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?
- Решение. По принципу сложения 2 получим количество людей, изучающих английский или немецкий  $15+12-7=20$ . Из общего числа учеников класса вычтем полученное количество людей.  $24-20=4$ . 4 человека не изучает ни одного языка.



# Решение задач

A 3D grid of spheres on a dark blue background. The spheres are arranged in a regular, repeating pattern, creating a perspective view of a lattice structure. The spheres are light blue and have a slight shadow, giving them a three-dimensional appearance. The grid extends from the foreground towards the background, creating a sense of depth.

# Задачи

- 1) Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 20 боксеров каждое, надо выделить по одному боксеру для участия в состязаниях. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** По принципу умножения

$$20 \cdot 20 = 400$$

# Задачи

- 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву в слове «экзамен»?

**Решение.** В слове «экзамен» 3 гласные буквы и 4 согласные. По принципу умножения

$$3 \cdot 4 = 12$$

# Задачи

- 3) В классе 20 человек, из них 9 человек изучают язык программирования Бейсик, и 8 человек изучают Паскаль. Сколько человек не изучают языки программирования, если известно, что других языков в этом классе не изучают и каждый человек знает не более одного языка программирования?

**Решение.** По принципу сложения получим, что  $9+8=17$  человек изучают языки программирования.

$20-17=3$  человека не изучают языки программирования.

# Задачи

- 4) От дома до школы существует 6 маршрутов. Сколькими способами можно дойти до школы и вернуться, если дорога «туда» и «обратно» идет по разным маршрутам?

**Решение.** По принципу умножения

$$6 \cdot 5 = 30$$

# Задачи

- 5) Из 3 экземпляров учебника алгебры, 5 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника истории нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** По принципу умножения

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$



# Задачи

- 6) В корзине лежат 15 яблок и 10 апельсинов. Яша выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Полина берет яблоко и апельсин. В каком случае Полина имеет большую свободу выбора: если Яша взял яблоко или если он взял апельсин?

**Решение.** Если Яша взял яблоко, то по принципу умножения Полина может осуществить свой выбор  $14 \cdot 10 = 140$  способами. Если Яша взял апельсин, то -  $15 \cdot 9 = 135$  способами.

В первом случае у Полины свобода выбора большая.

# Задачи

- 7) В книжном магазине есть 7 экземпляров романа Ф. М. Достоевского «Идиот», 4 экземпляра его же романа «Братья Карамазовы» и 5 экземпляров «Преступление и наказание». Кроме того есть 5 томов, содержащих романы «Идиот» и «Преступление и наказание», и 7 томов, содержащих «Преступление и наказание» и «Братья Карамазовы». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из романов?

**Решение.** Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего. По принципу умножения и сложения получим

$$7 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 7 = 140 + 20 + 49 = 209$$