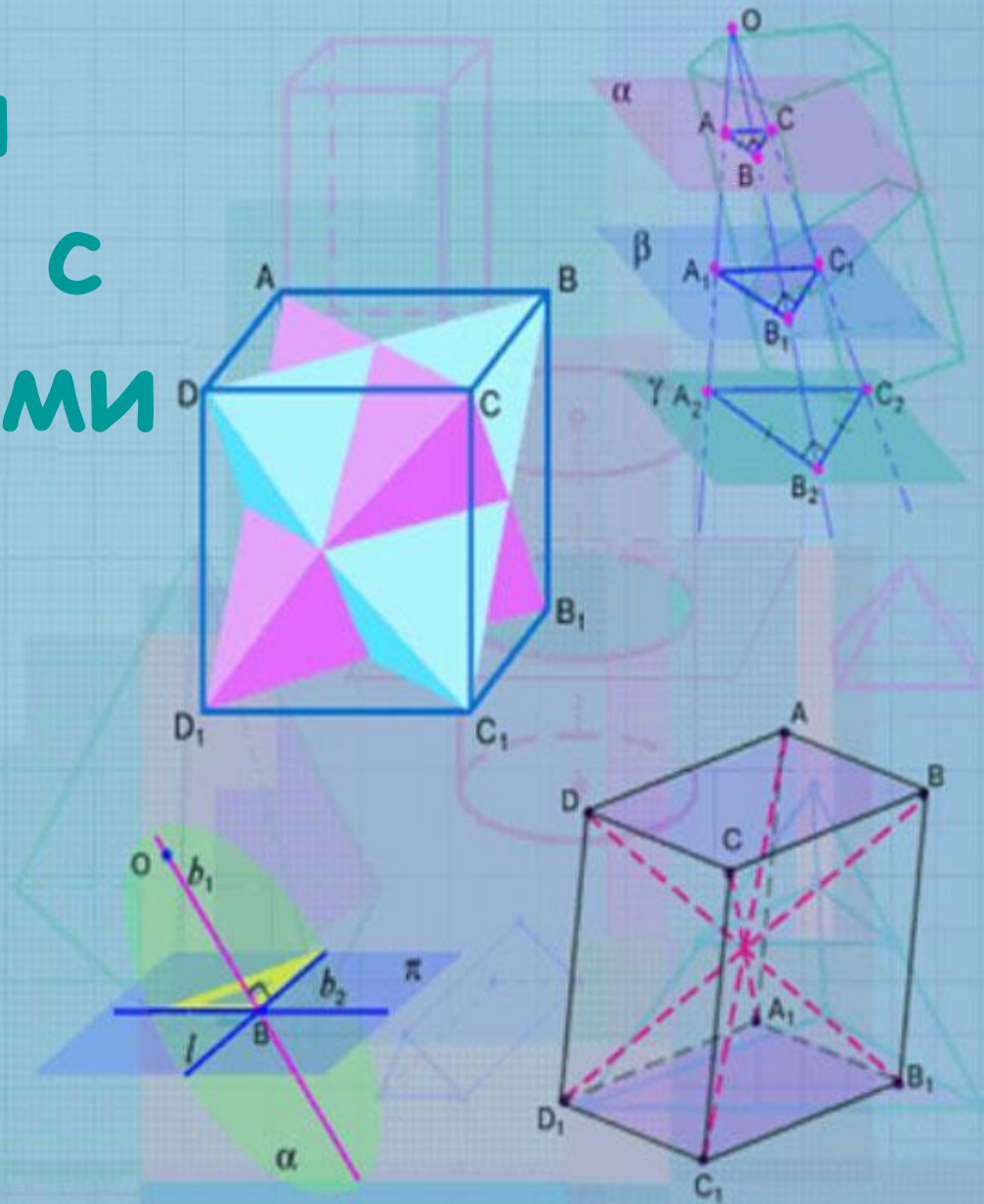
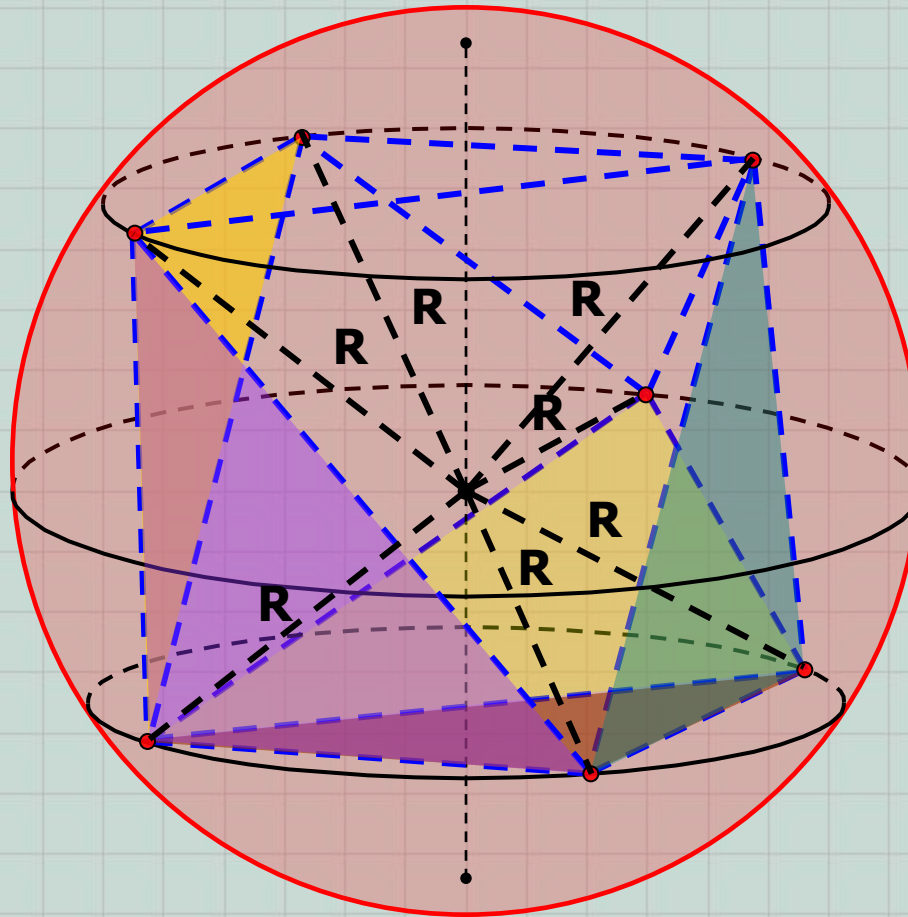


# Комбинации шара (сферы) с многогранниками и фигурами вращения.

Геометрия,  
11 класс.



Шар (сфера) называются описанными около многогранника, если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара (сфере).



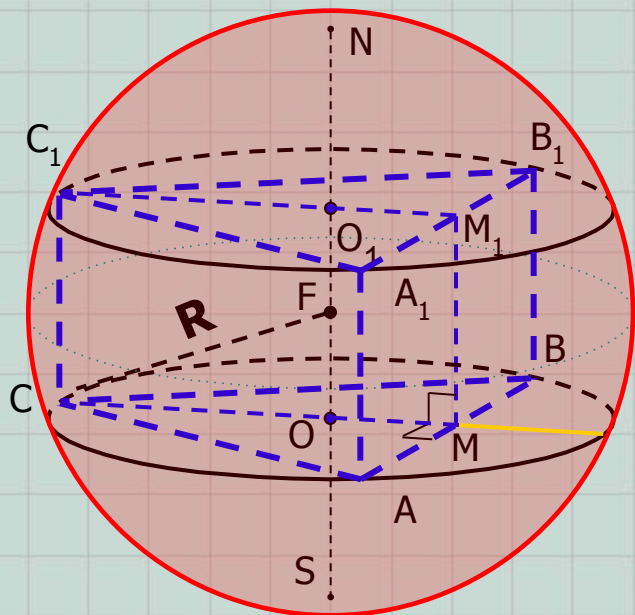
**R** – радиус шара (сферы), описанных около многогранника.

- **ПРИМЕЧАНИЕ 1.** Около любой **правильной** пирамиды можно описать сферу (шар). Центр этой сферы (шара) – точка пересечения прямой, содержащей высоту пирамиды и серединного перпендикуляра к боковому ребру, проведенному в плоскости, содержащей высоту и боковое ребро пирамиды.
- **ПРИМЕЧАНИЕ 2.** Около любой **правильной** призмы можно описать сферу (шар). Центр этой сферы (шара) – середина отрезка, соединяющего центры описанных около оснований призмы окружностей.
- **ПРИМЕЧАНИЕ 3.** Если около основания **прямой** призмы можно описать окружность, то около призмы можно описать сферу (шар). Центром описанной сферы (шара) является середина отрезка, соединяющего центры описанных около основания призмы окружностей.

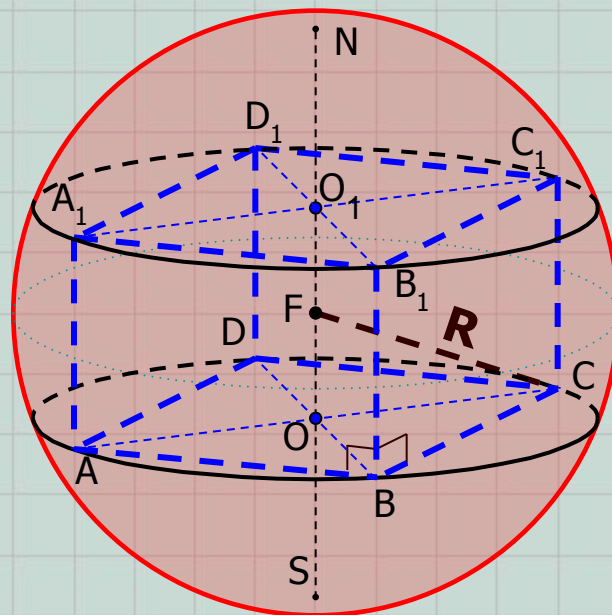
### Напомним, что:

- около любого треугольника можно описать окружность;
- около четырехугольника можно описать окружность, если суммы его противоположных углов равны  $180^{\circ}$  (прямоугольник, квадрат, равнобокая трапеция и т.д.);
- около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

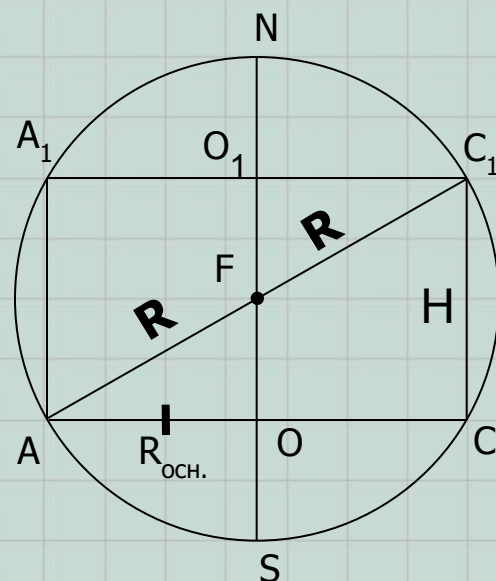
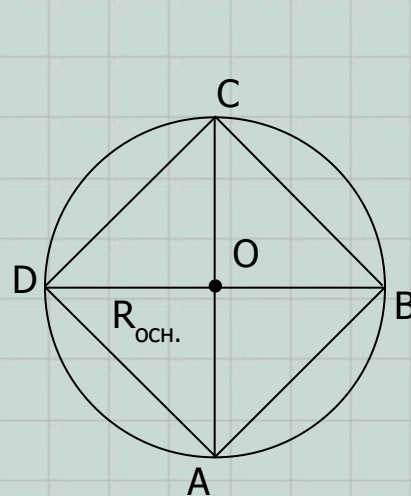
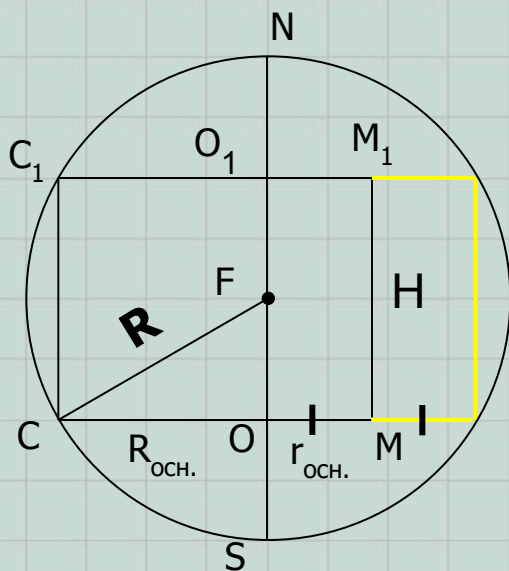
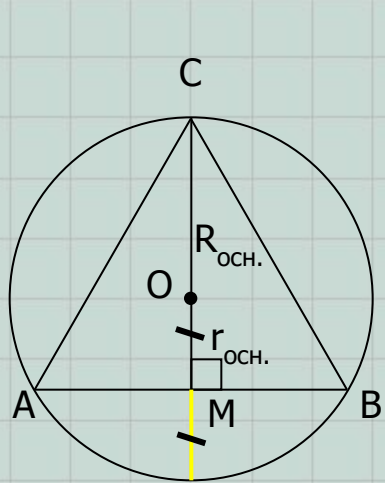
Шар (сфера), описанные около правильной треугольной призмы.



Шар (сфера), описанные около правильной четырехугольной призмы.



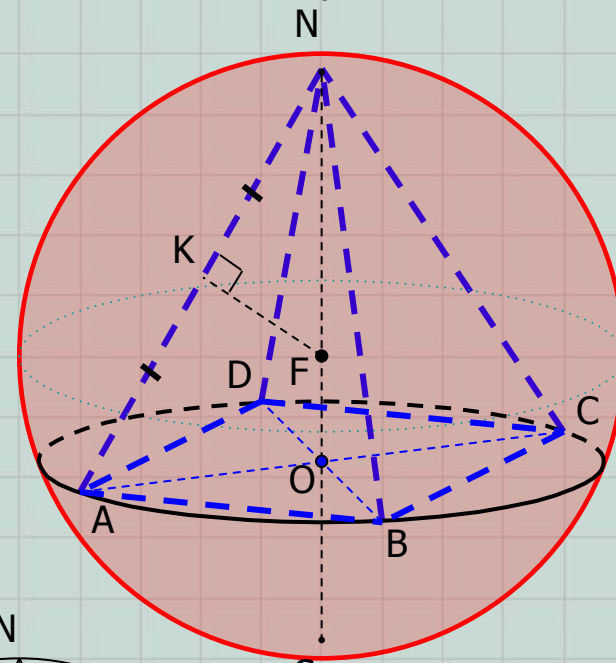
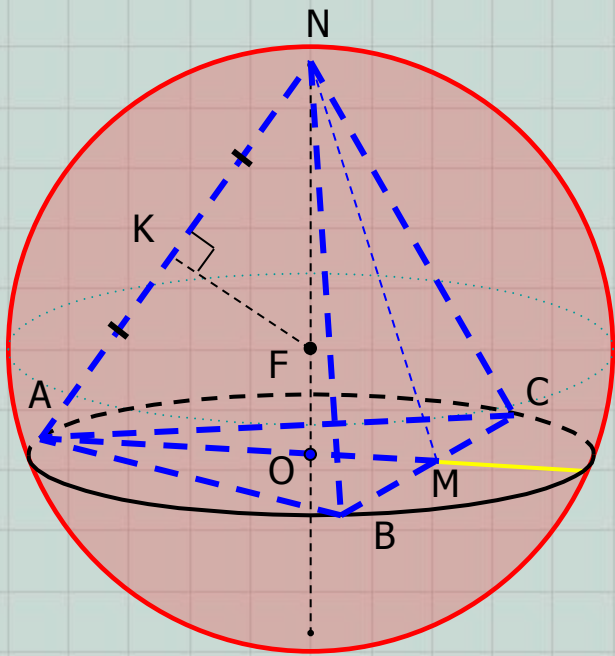
$$AA_1 = H$$



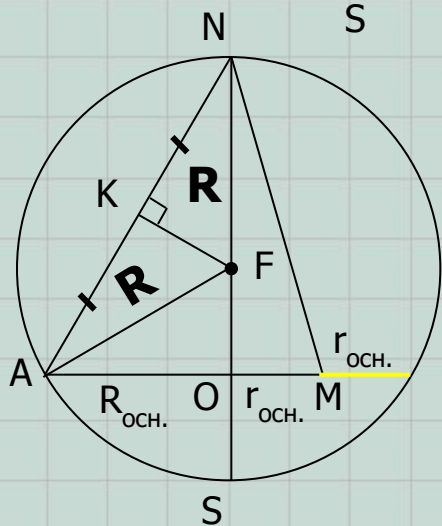
Выполните чертежи в тетради! Выведите соотношения между  $R$ ,  $R_{\text{оч.}}$ ,  $r_{\text{оч.}}$  и  $H$ .

Шар (сфера), описанные около правильной треугольной пирамиды.

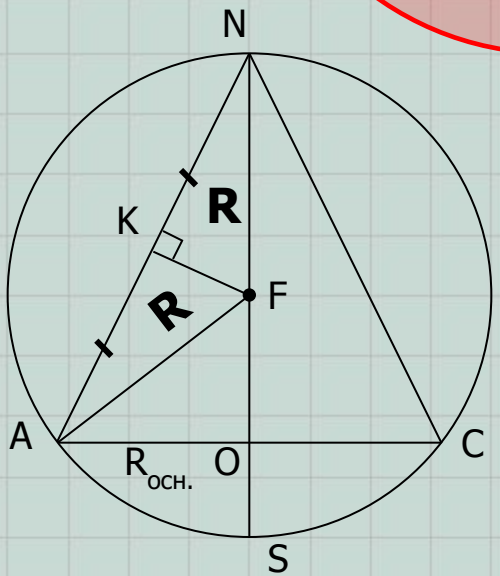
Шар (сфера), описанные около правильной четырехугольной пирамиды.



$ON=H$

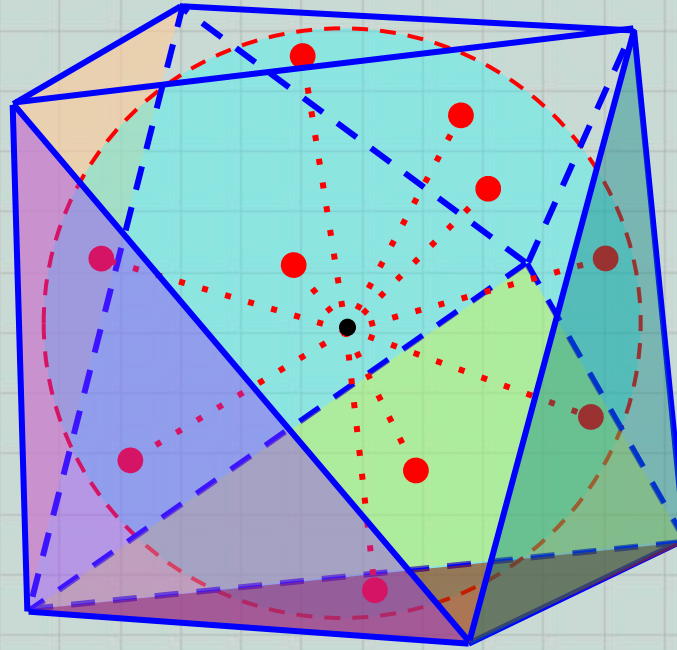


$\Delta NKF : \Delta NOA$



Выполните чертежи в тетради! Выведите соотношения между  $R$ ,  $R_{оч.}$ ,  $r_{оч.}$  и  $H$ .

Шар (сфера) называется вписанными в многогранник, если все грани многогранника касаются поверхности шара (сферы).



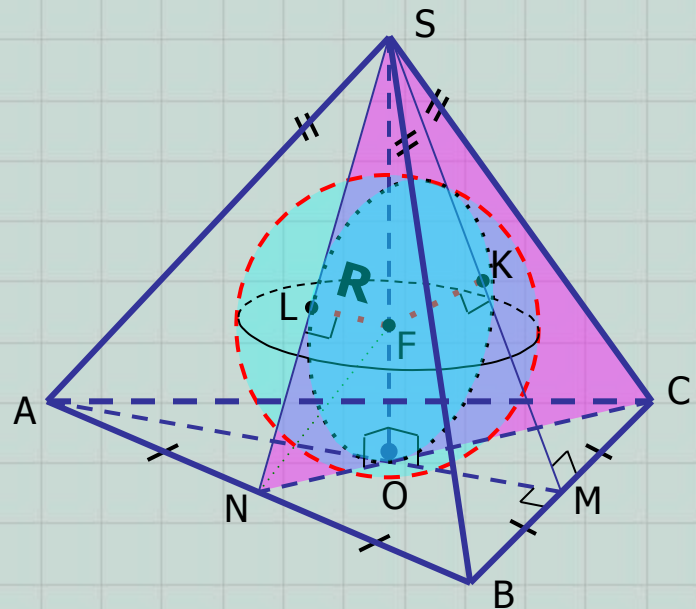
Напомним, что касательная плоскость перпендикулярна радиусу шара (сферы), проведенному к точке касания!

- **ПРИМЕЧАНИЕ 1.** В любую **правильную** пирамиду можно вписать сферу (шар). Центр этой сферы (шара) – точка пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.
- **ПРИМЕЧАНИЕ 2.** Если в основание пирамиды можно вписать окружность, а основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то в пирамиду можно вписать сферу (шар).
- **ПРИМЕЧАНИЕ 3.** Если в основание **прямой** призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности, то в призму можно вписать сферу (шар). Центром вписанной сферы (шара) является середина отрезка, соединяющего центры вписанных в основания призмы окружностей.

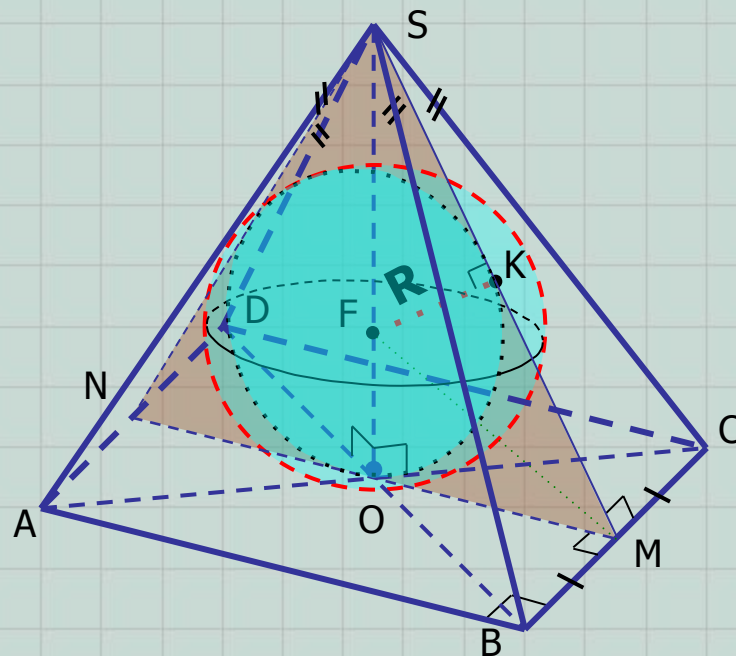
### Напомним, что:

- в любой треугольник можно вписать окружность;
- в четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны (квадрат, ромб и т.д.);
- в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Шар (сфера), вписанные в правильную треугольную пирамиду.

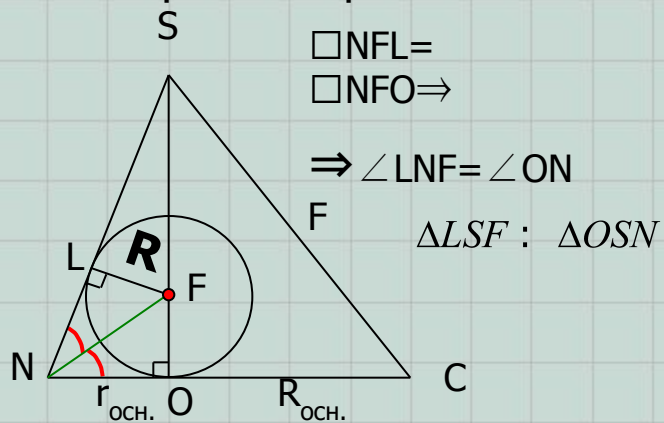


Шар (сфера), вписанные в правильную четырехугольную пирамиду.

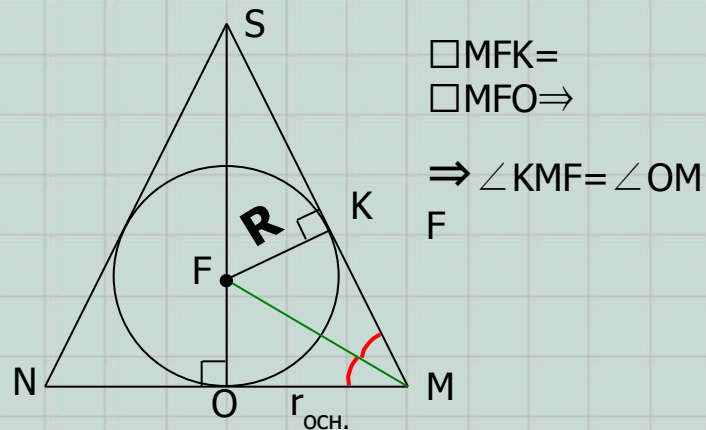


$OS=H$

Достаточно рассмотреть сечение  $\square NSC$ :



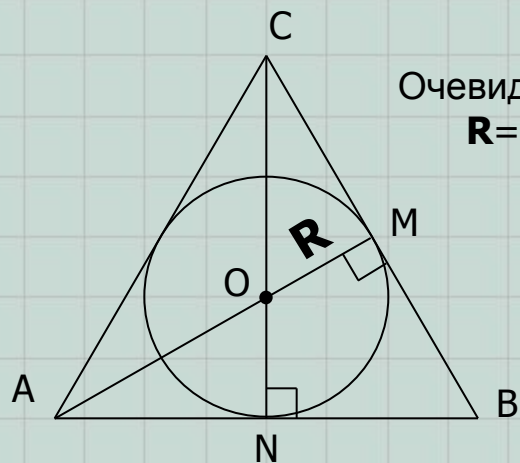
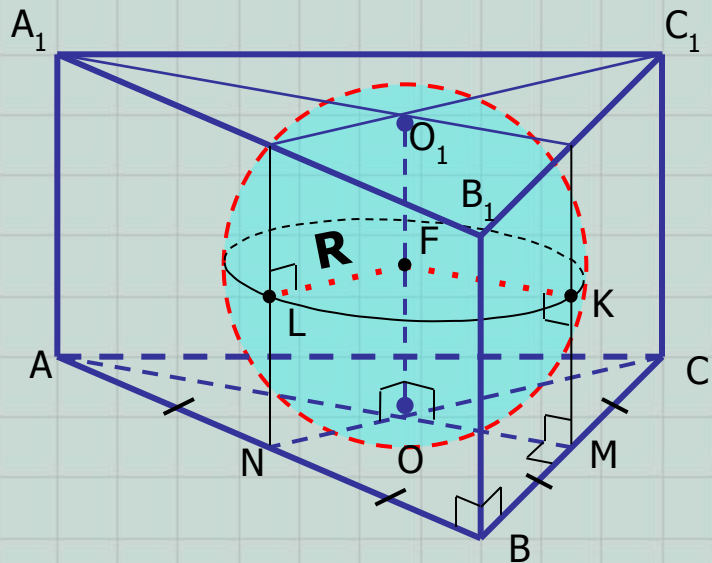
Достаточно рассмотреть сечение  $\square NSM$ :



Выполните чертежи в тетради! Выведите соотношения между  $R$ ,  $R_{\text{оч.}}$ ,  $r_{\text{оч.}}$  и  $H$ .

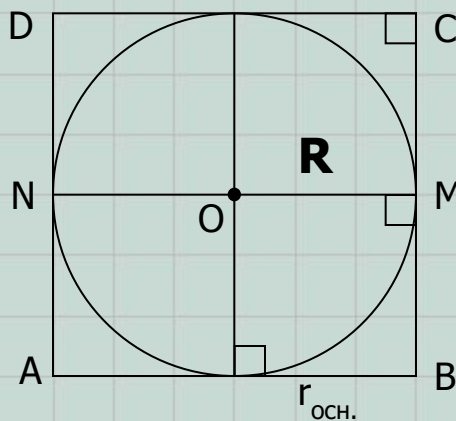
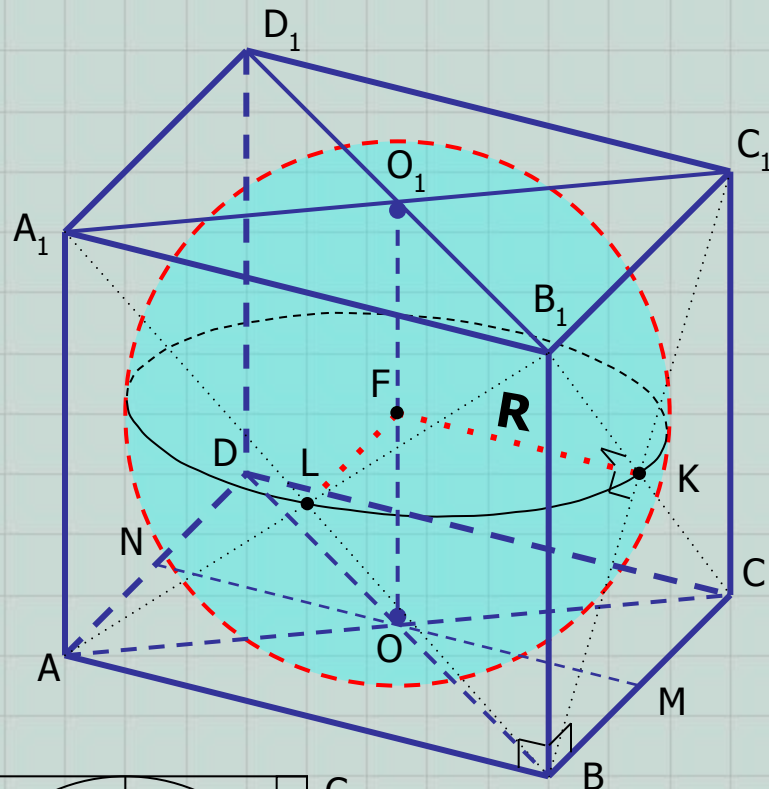


Шар (сфера), вписанные в правильную треугольную призму.



Очевидно, что  
 $R = r_{\text{осн.}}$

Шар (сфера), вписанные в правильную четырехугольную призму (куб).

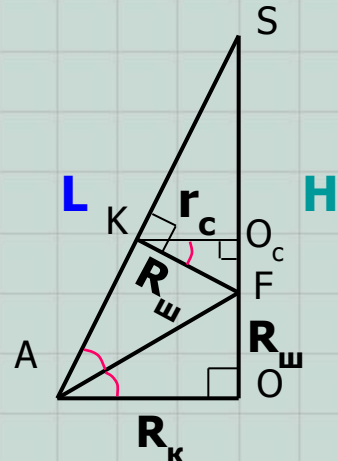
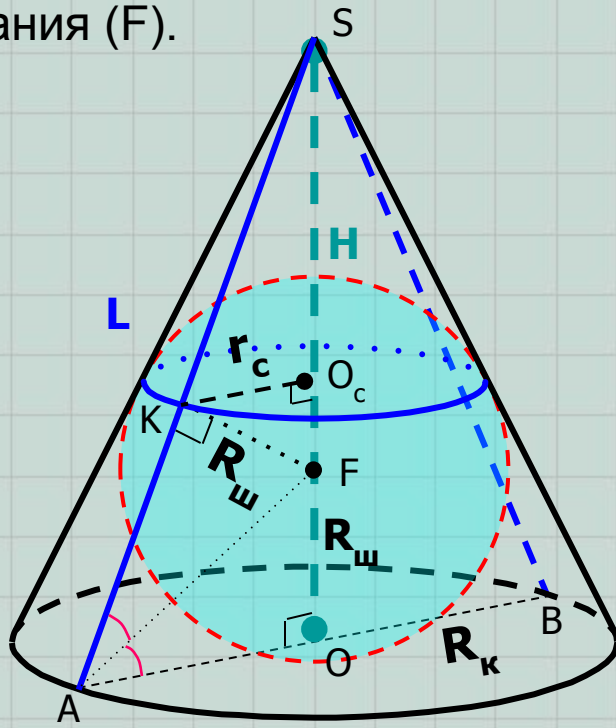


Очевидно, что  
 $R = r_{\text{осн.}}$

Выполните чертежи в тетради!

### Шар (сфера), вписанные в конус.

Центр – точка пересечения высоты конуса и биссектрисы угла между образующей конуса и плоскостью основания (F).



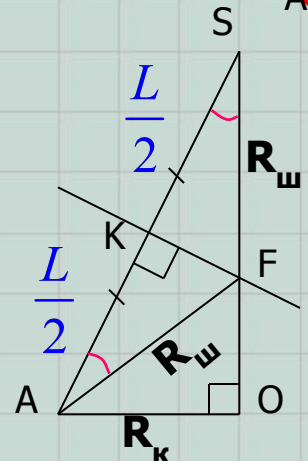
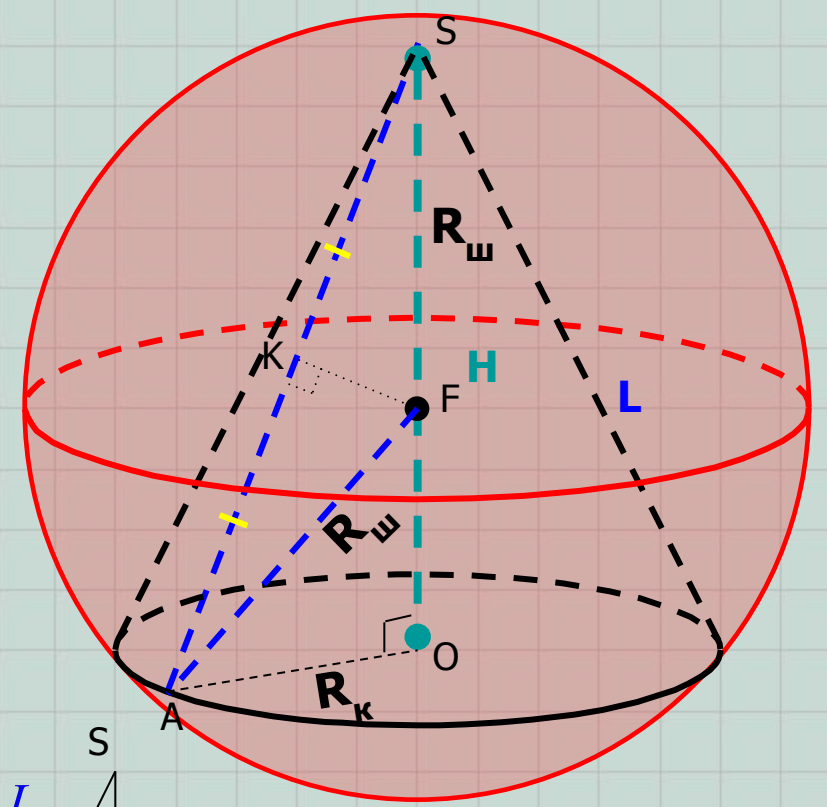
$$\Delta SKF : \Delta SOA$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_{\text{ш}}}{H - R_{\text{ш}}} = \frac{R_e}{L}$$

### Шар (сфера), описанные около конуса.

Центр – точка пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра к образующей конуса (F).

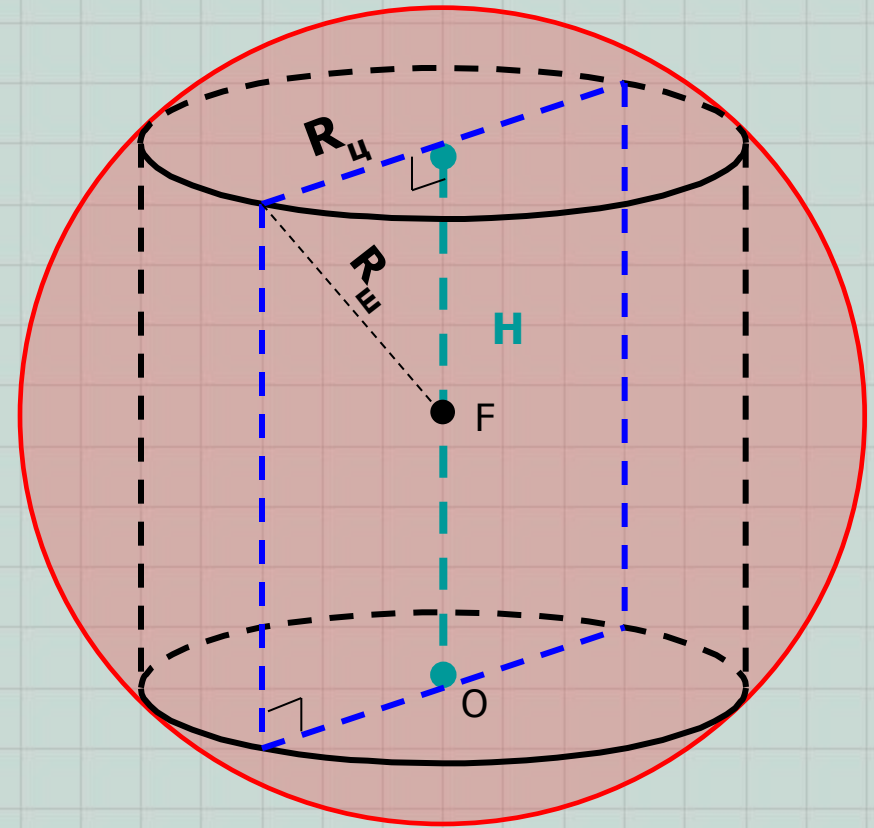
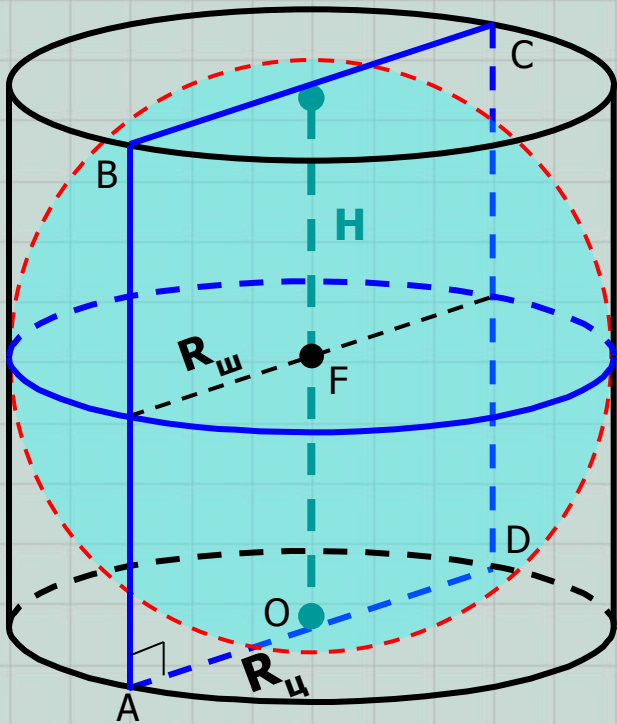


$$\Delta SKF : \Delta SOA$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_{\text{ш}}}{L} = \frac{L/2}{H} = \frac{KF}{R_e}$$

Шар (сфера), вписанные в цилиндр. Шар (сфера), описанные около цилиндра.  
 Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра. Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.



Осевое сечение ABCD – квадрат.  
 Цилиндр – *равносторонний*.

$$R_{\check{r}} = R_{\check{o}} = \frac{H}{2}$$

$$\frac{H^2}{4} + R_{\check{o}}^2 = R_{\check{r}}^2$$



