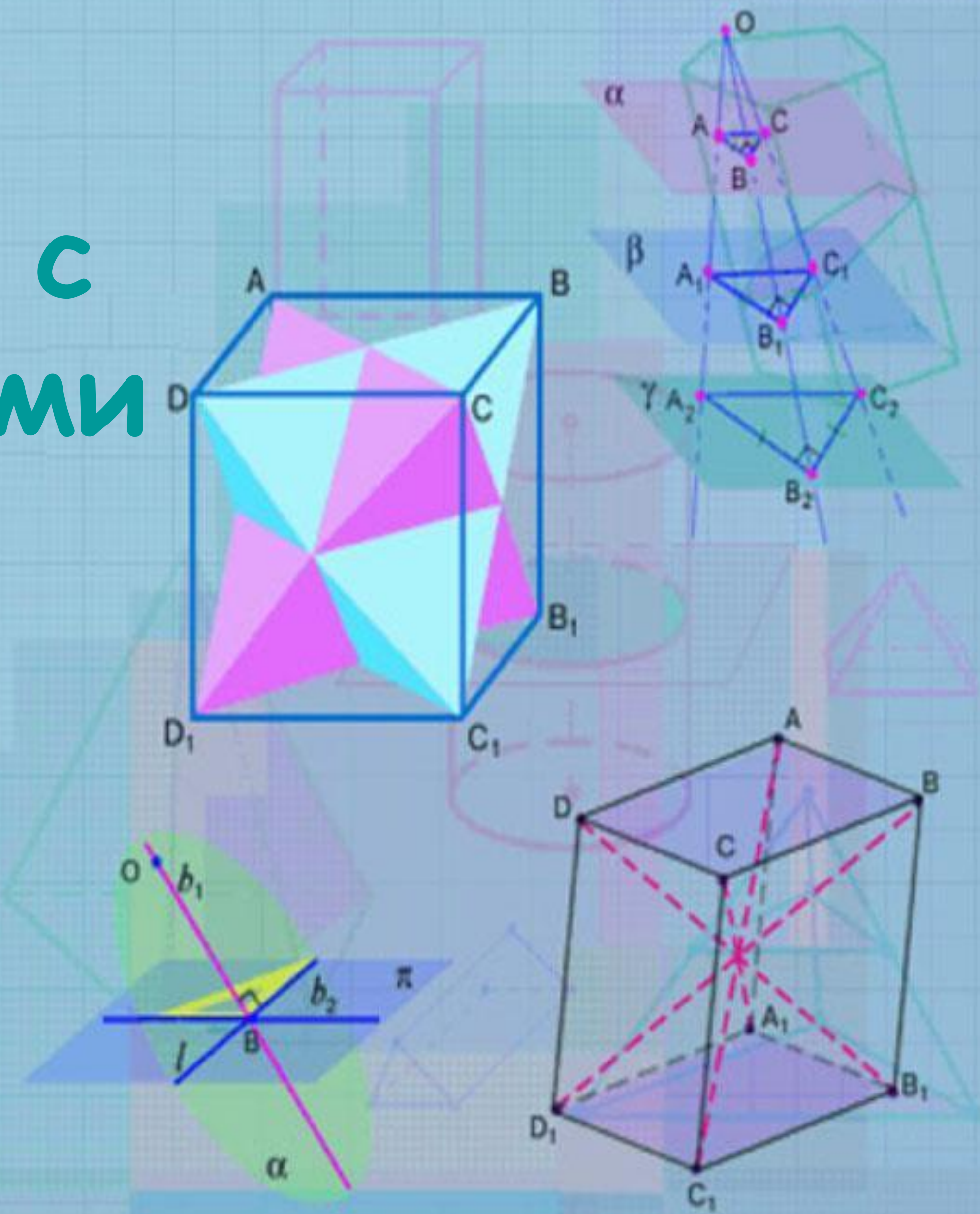
Комбинации шара (сферы) с многогранниками и фигурами вращения.

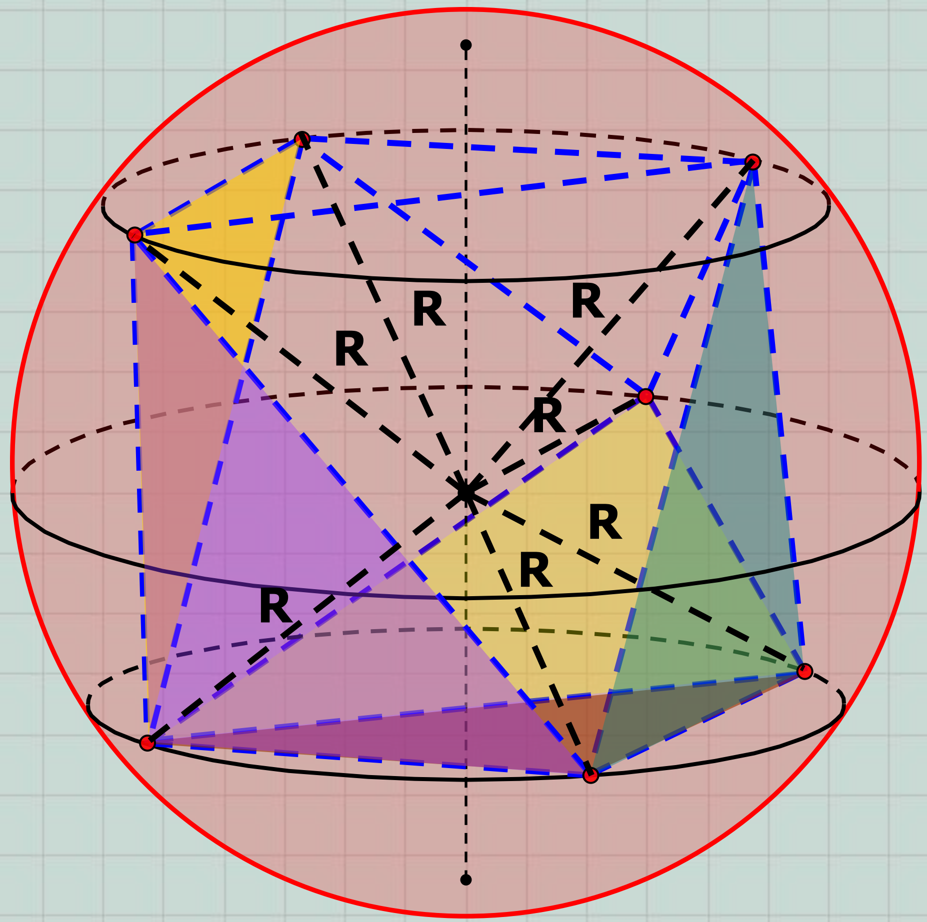


Геометрия,

11 класс.

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Шар (сфера) называются описанными около многогранника, если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара (сфере).



R – радиус шара (сферы), описанных около многогранника.

- ПРИМЕЧАНИЕ 1. Около любой **правильной** пирамиды можно описать сферу (шар). Центр этой сферы (шара) – точка пересечения прямой, содержащей высоту пирамиды и серединного перпендикуляра к боковому ребру, проведенному в плоскости, содержащей высоту и боковое ребро пирамиды.

- ПРИМЕЧАНИЕ 2. Около любой **правильной** призмы можно описать сферу (шар). Центр этой сферы (шара) – середина отрезка, соединяющего центры описанных около оснований призмы окружностей.

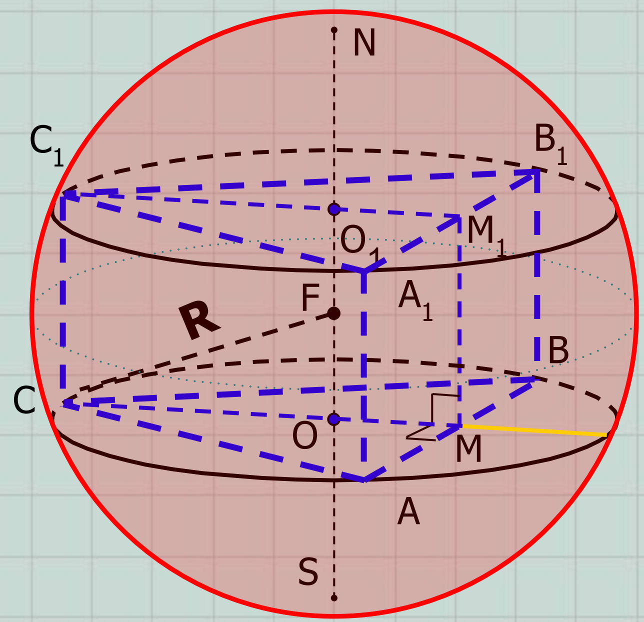
- ПРИМЕЧАНИЕ 3. Если около основания **прямой** призмы можно описать окружность, то около призмы можно описать сферу (шар). Центром описанной сферы (шара) является середина отрезка, соединяющего центры описанных около основания призмы окружностей.

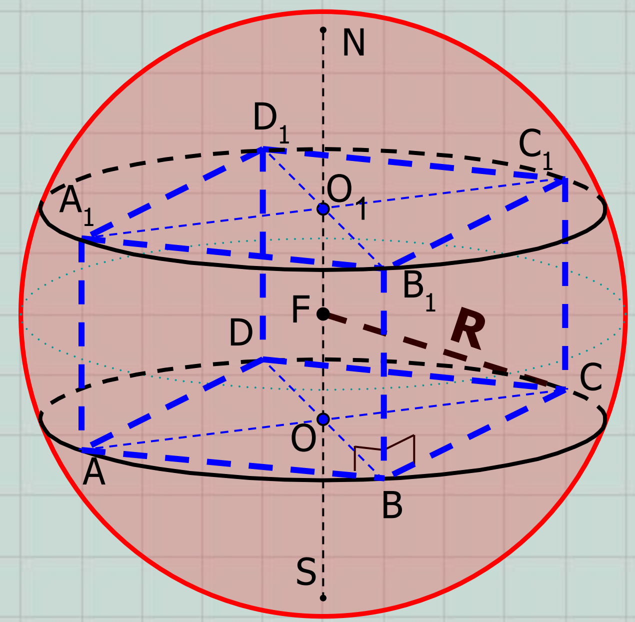
Напомним, что:

- около любого треугольника можно описать окружность;
- около четырехугольника можно описать окружность, если суммы его противоположных углов равны 180^0 (прямоугольник, квадрат, равнобокая трапеция и т.д.);
- около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

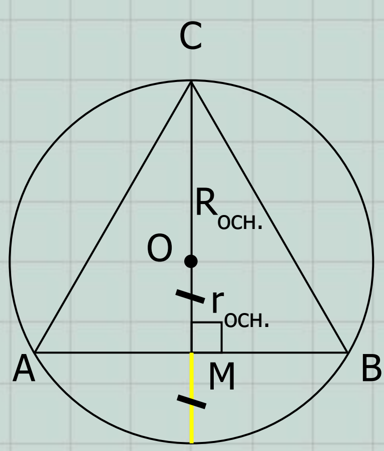
Шар (сфера), описанные около правильной треугольной призмы.

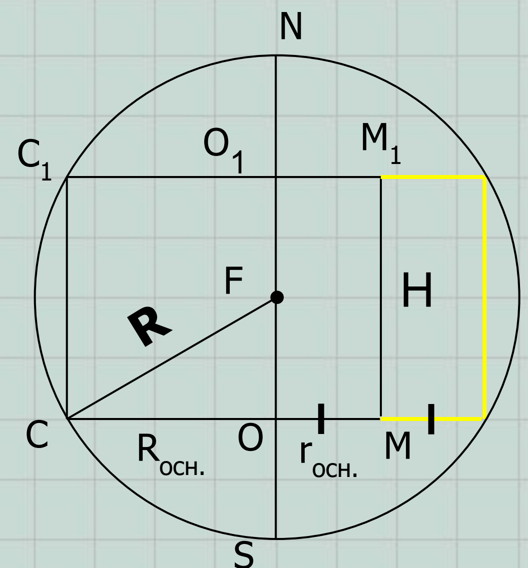
Шар (сфера), описанные около правильной четырехугольной призмы.

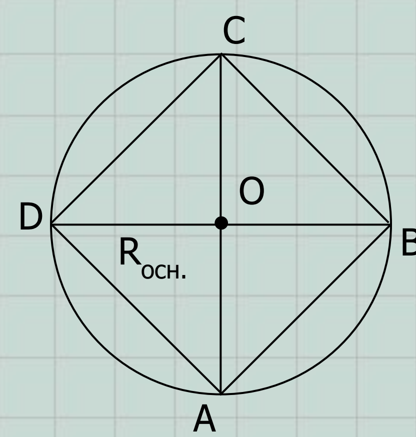


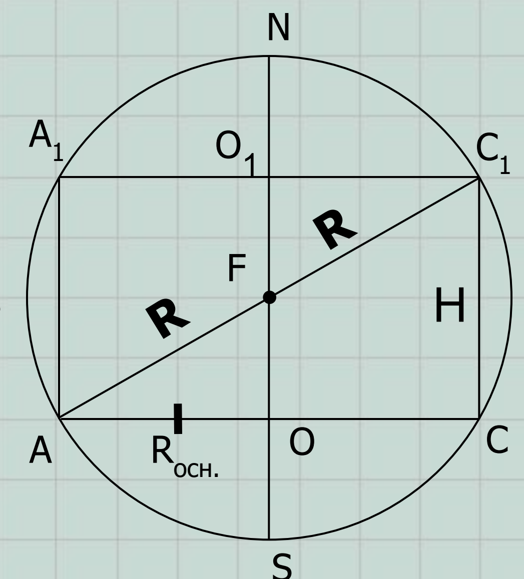


$AA_1=H$



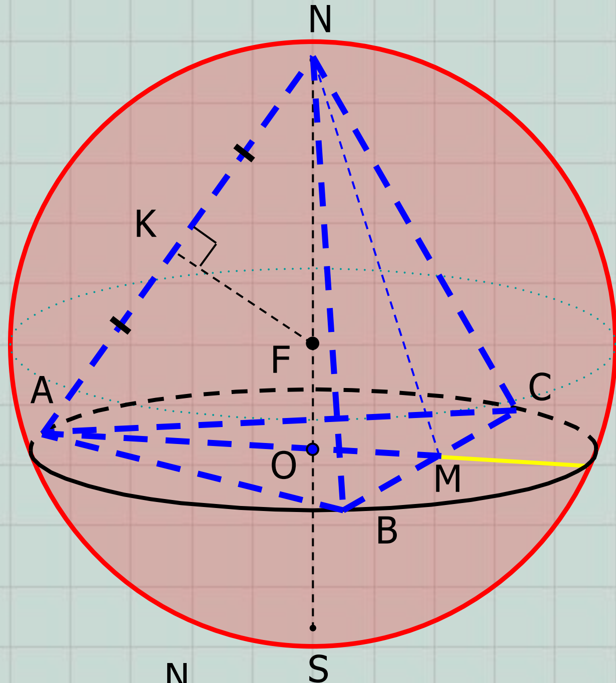




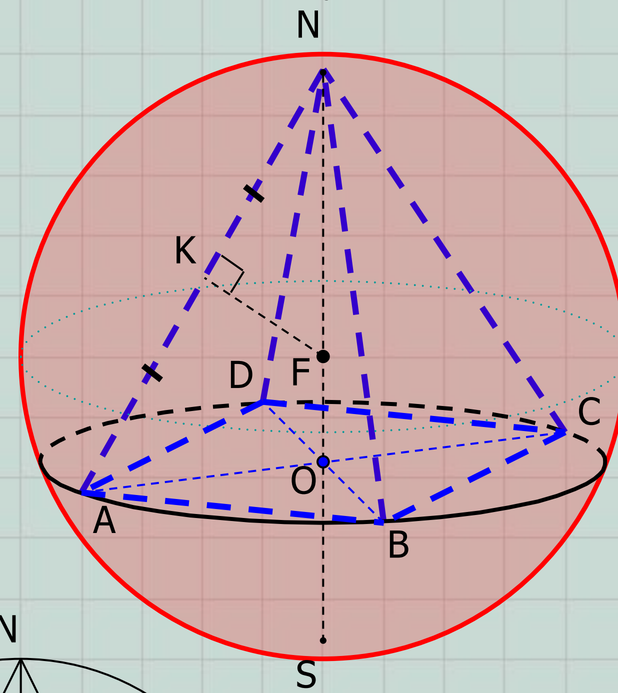


Выполните чертежи в тетради! Выведите соотношения между **R**, $R_{осн.}$, $r_{осн.}$ и H.

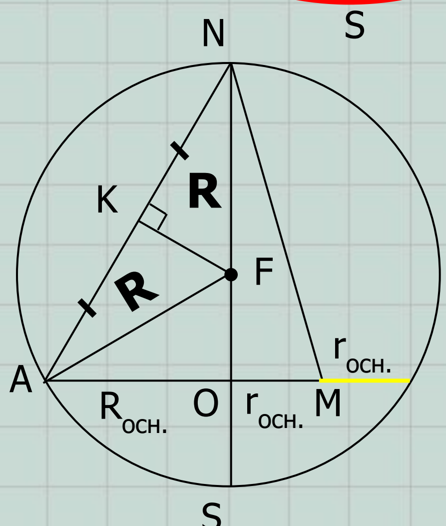
Шар (сфера), описанные около правильной треугольной пирамиды.



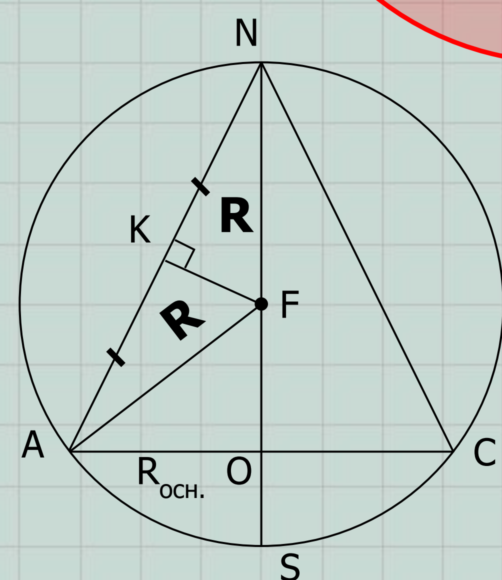
Шар (сфера), описанные около правильной четырехугольной пирамиды.



ON=H

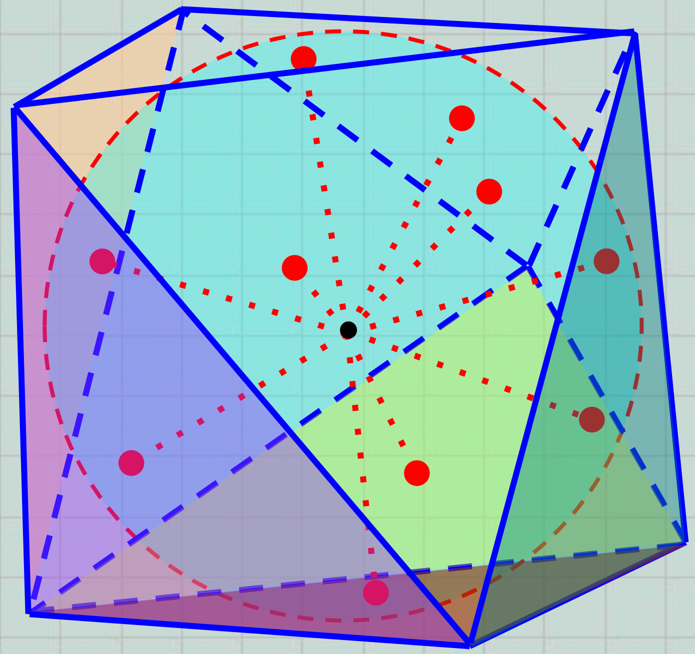


$\Delta NKF : \Delta NOA$



Выполните чертежи в тетради! Выведите соотношения между **R**, $R_{осн.}$, $r_{осн.}$ и H.

Шар (сфера) называются вписанными в многогранник, если все грани многогранника касаются поверхности шара (сферы).



Напомним, что касательная плоскость перпендикулярна радиусу шара (сферы), проведенному к точке касания!

- ПРИМЕЧАНИЕ 1. В любую **правильную** пирамиду можно вписать сферу (шар). Центр этой сферы (шара) – точка пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

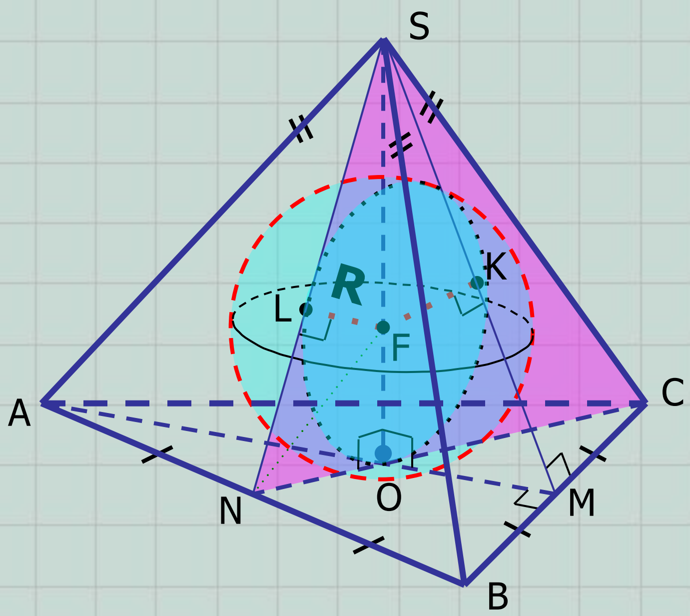
- ПРИМЕЧАНИЕ 2. Если в основание пирамиды можно вписать окружность, а основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то в пирамиду можно вписать сферу (шар).

- ПРИМЕЧАНИЕ 3. Если в основание **прямой** призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности, то в призму можно вписать сферу (шар). Центром вписанной сферы (шара) является середина отрезка, соединяющего центры вписанных в основания призмы окружностей.

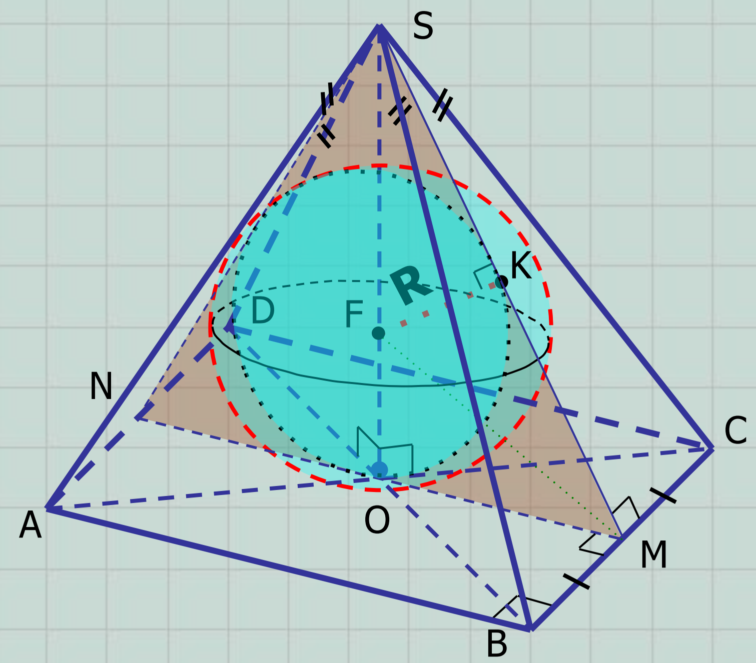
Напомним, что:

- в любой треугольник можно вписать окружность;
- в четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны (квадрат, ромб и т.д.);
- в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Шар (сфера), вписанные в правильную треугольную пирамиду.

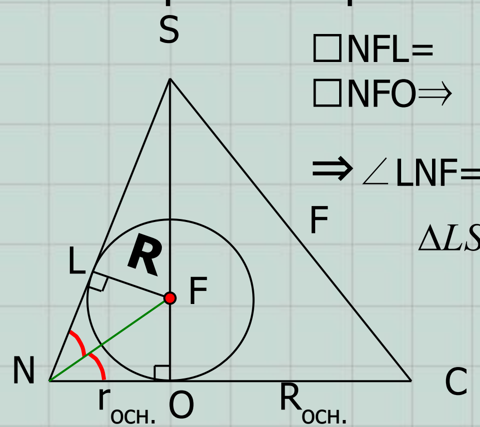


Шар (сфера), вписанные в правильную четырехугольную пирамиду.



OS=H

Достаточно рассмотреть сечение □NSC:

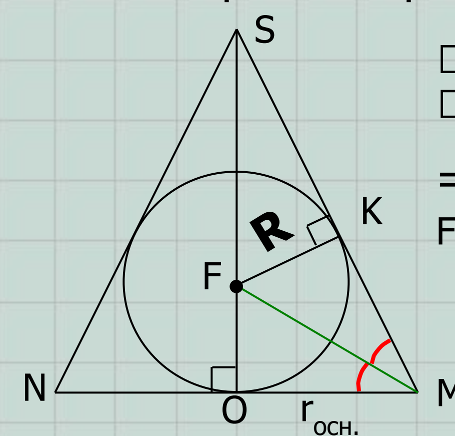


□NFL=
□NFO⇒

⇒∠LNF=∠ON
F

ΔLSF : ΔOSN

Достаточно рассмотреть сечение □NSM:

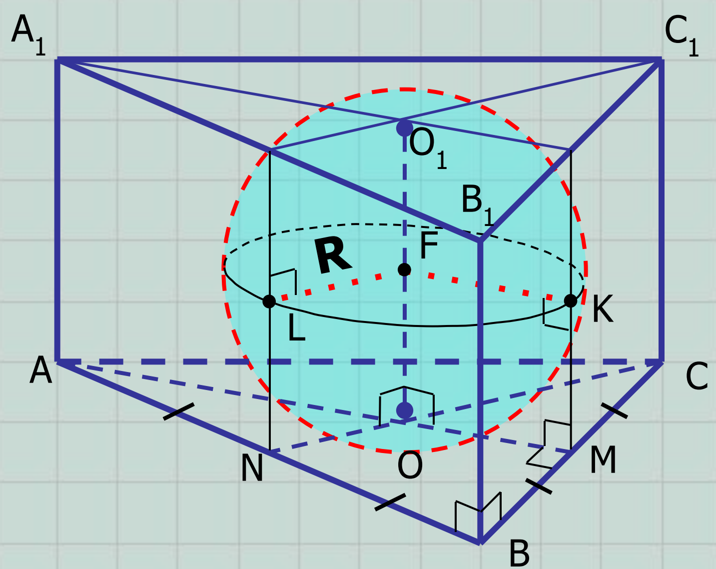


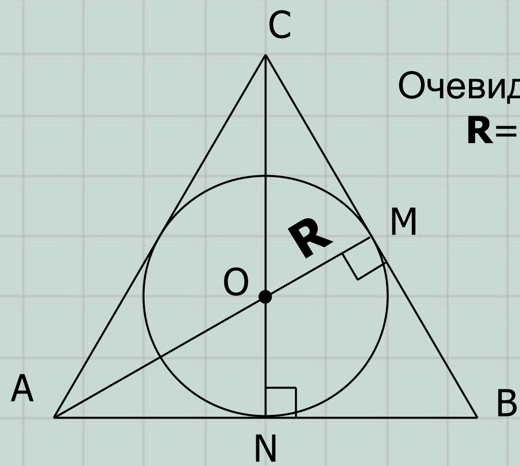
□MFK=
□MFO⇒

⇒∠KMF=∠OM
F

Выполните чертежи в тетради! Выведите соотношения между **R**, $R_{осн.}$, $r_{осн.}$ и H.

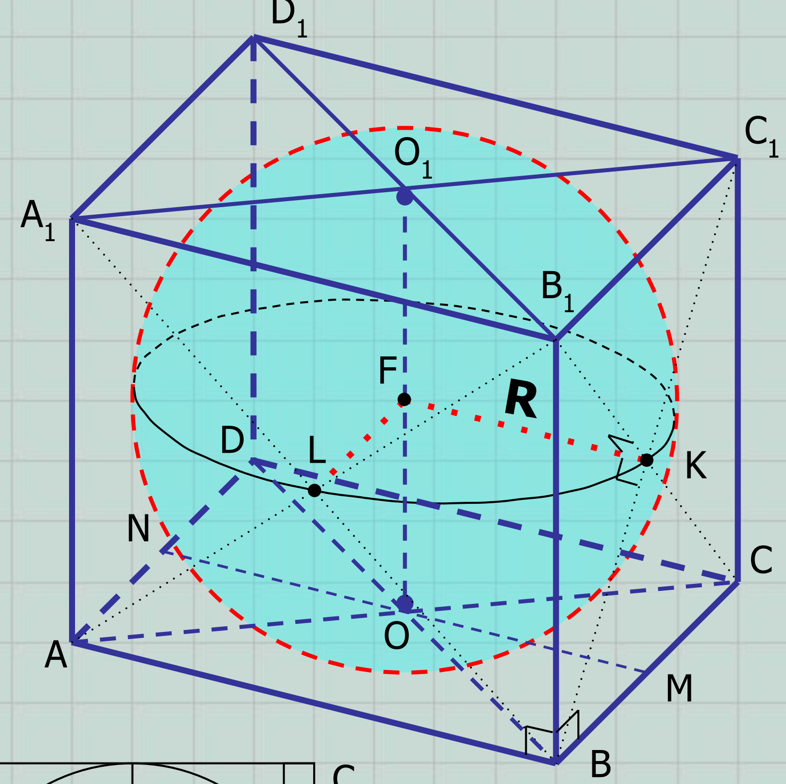
Шар (сфера), вписанные в правильную треугольную призму.

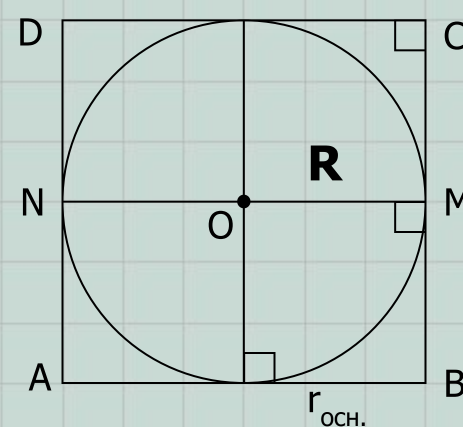




Очевидно, что
R=$r_{осн.}$

Шар (сфера), вписанные в правильную четырехугольную призму (куб).

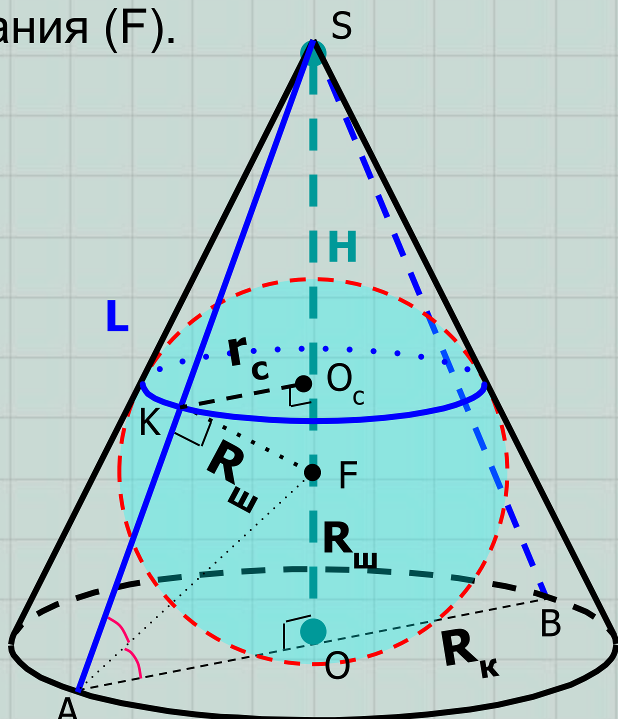


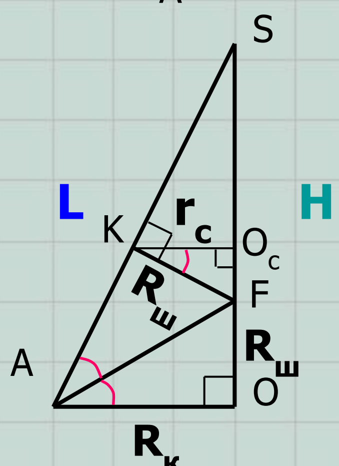


Очевидно, что
R=$r_{осн.}$

Выполните чертежи в тетради!

Шар (сфера), вписанные в конус. Центр – точка пересечения высоты конуса и биссектрисы угла между образующей конуса и плоскостью основания (F).



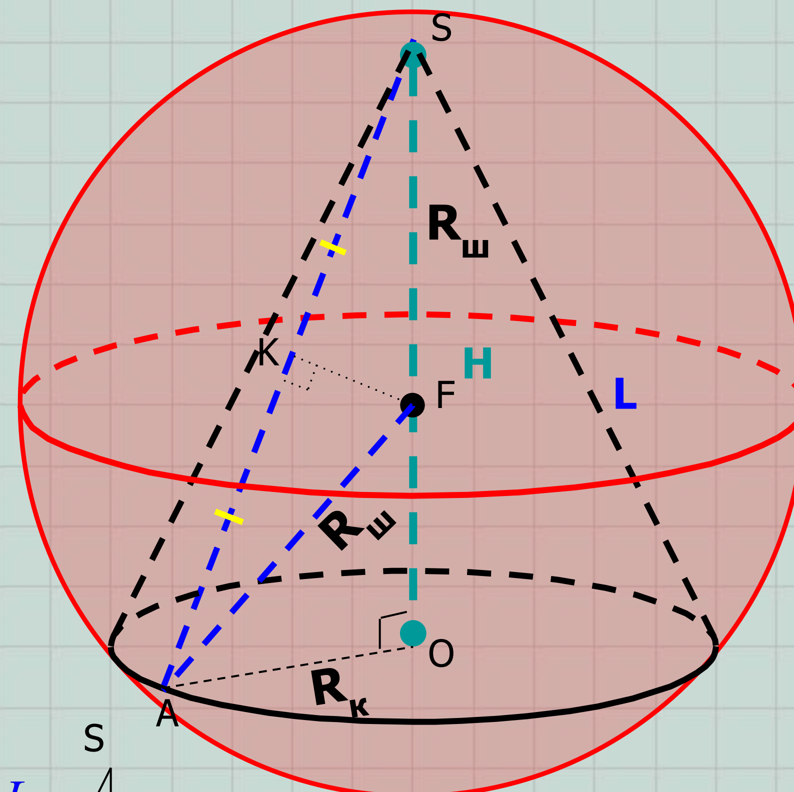


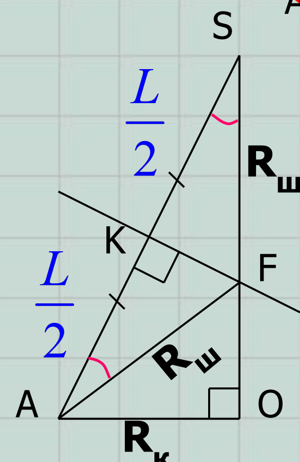
$$\Delta SKF \sim \Delta SOA$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_ш}{H - R_ш} = \frac{R_к}{L}$$

Шар (сфера), описанные около конуса. Центр – точка пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра к образующей конуса (F).





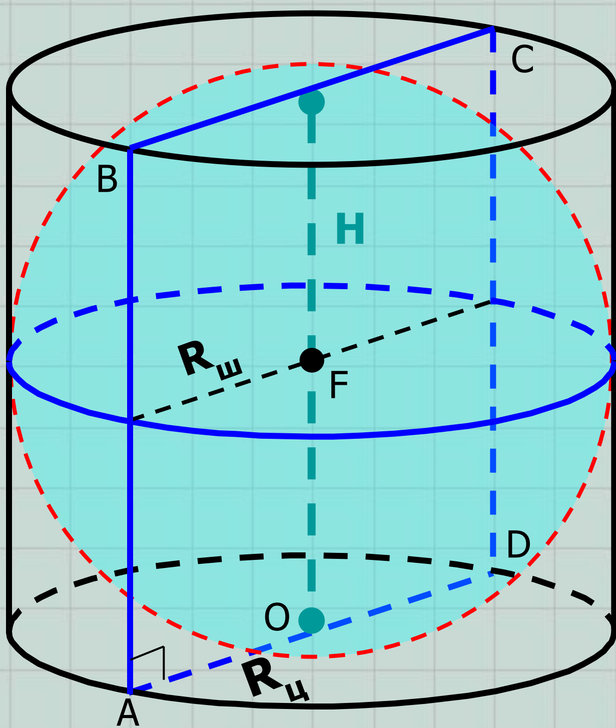
$$\Delta SKF \sim \Delta SOA$$

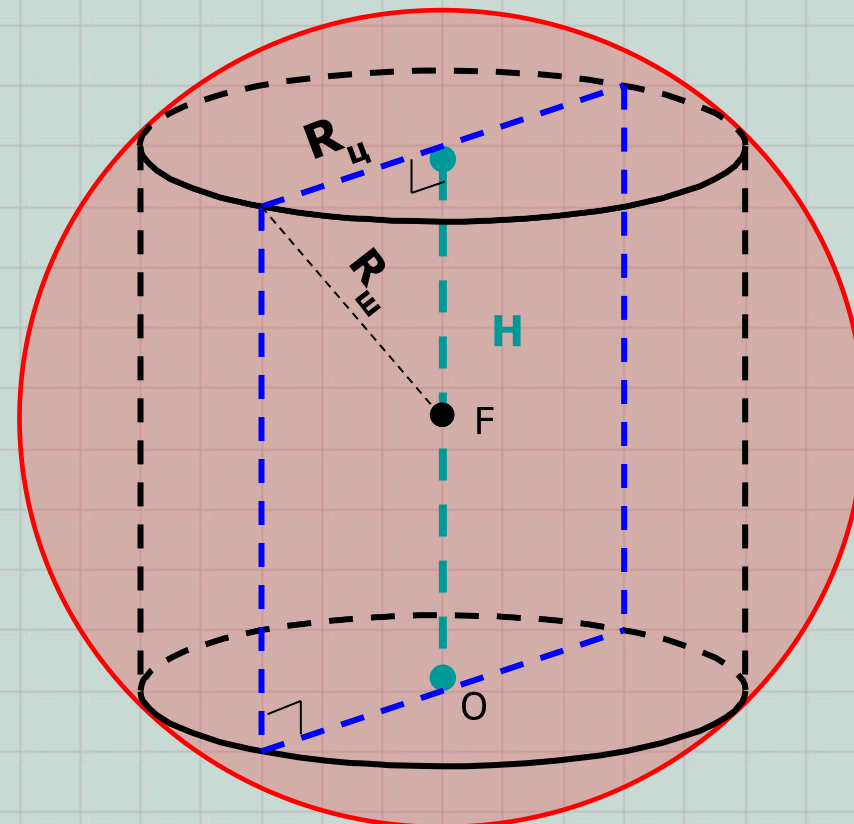
$$\Downarrow$$

$$\frac{R_ш}{L} = \frac{L/2}{H} = \frac{KF}{R_к}$$

Шар (сфера), вписанные в цилиндр. Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.

Шар (сфера), описанные около цилиндра. Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.





Осевое сечение ABCD – квадрат.
Цилиндр – *равносторонний*.

$$R_{ř} = R_{ö} = \frac{H}{2}$$

$$\frac{H^2}{4} + R_{ö}^2 = R_{ř}^2$$