



22. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



22.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

*Комплексным числом называется
выражение вида*

$$z = x + i \cdot y$$

где x и y – действительные числа,

i – мнимая единица: $i^2 = -1$



*Число x называется действительной
частью числа z :*

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

*Число y называется мнимой
частью числа z :*

$$y = \operatorname{Im}(z)$$



Действительное число x является частным случаем комплексного числа

$$z = x + i \cdot y$$

при $y=0$.

Комплексные числа вида $z = x + i \cdot y$ не являющиеся действительными, т.е. при

$$y \neq 0$$

называются мнимыми, а при

$$x = 0, \quad y \neq 0$$

называются чисто мнимыми.



Комплексные числа

$$z = x + i \cdot y \quad z = x - i \cdot y$$

называются сопряженными

Комплексные числа

$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1 \quad z_2 = x_2 + i \cdot y_2$$

называются равными, если равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

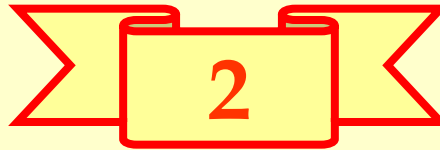


*Арифметические действия
над множеством
комплексных чисел*



Сумма (разность) комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i \cdot (y_1 \pm y_2)$$



Произведение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

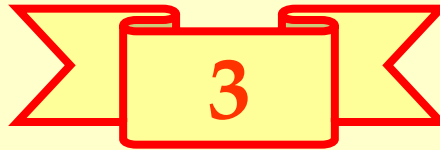


Поскольку

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + x_2 \cdot i \cdot y_1 - y_1 \cdot y_2 = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

Например:

$$\begin{aligned} i^2 &= i \cdot i = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = \\ &= (0 - 1) + i \cdot (0 + 0) = -1 \end{aligned}$$



Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$



Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} = \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} \cdot \frac{x_2 - i \cdot y_2}{x_2 - i \cdot y_2} = \\ &= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$



Пример.

*Найти сумму, разность, произведение
и частное комплексных чисел:*

$$z_1 = 12 + 5 \cdot i$$

$$z_2 = 3 - 4 \cdot i$$



Решение



$$z_1 + z_2 = 12 + 5 \cdot i + 3 - 4 \cdot i = 15 + i$$

$$z_1 - z_2 = 12 + 5 \cdot i - (3 - 4 \cdot i) = 9 + 9 \cdot i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (12 + 5 \cdot i) \cdot (3 - 4 \cdot i) = 36 + 15 \cdot i - 48 \cdot i + 20 = \\ &= 56 - 33 \cdot i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{12 + 5 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} = \frac{12 + 5 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} \cdot \frac{3 + 4 \cdot i}{3 + 4 \cdot i} = \\ &= \frac{36 + 15 \cdot i + 48 \cdot i - 20}{9 + 16} = \frac{16 + 63 \cdot i}{25} = 0.64 + 2.52 \cdot i \end{aligned}$$



Если для изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости XOY .

Плоскость называется комплексной, если любому комплексному числу

$$z = x + i \cdot y$$

ставятся в соответствие точки плоскости XOY , причем это соответствие взаимно однозначное.



По оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа $Re z$, а по оси ординат – мнимая $Im z$, поэтому ось x называется действительной осью, а ось y – мнимой.

