КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ВВЕДЕНИЕ

Комплексные числа

Глава 16. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексные числа необходимы в различных приложениях математики. В частности, теория функций комплексной переменной является действенным инструментом при использовании математических методов в различных областях науки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, i — мнимая единица.

Число x называется *действительной частью* числа z и обозначается $\mathrm{Re}(z)$ (от франц. *reele* — "действительный"), а число y — мнимой частью числа z и обозначается $\mathrm{Im}(z)$ (от франц. *imaginaire* — "мнимый"), т.е. $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными, т.е. при $y = 0$, называются *мнимыми*, а при $x = 0$ $y \neq 0$, т.е. числа вида $z = iy$ — *чисто мнимыми*.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$, если $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. В частности $z = 0$, если $\mathrm{Re}(z) = 0$ и $\mathrm{Im}(z) = 0$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Комплексные числа

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \tag{16.1}$$

2. Произведение комплексных чисел

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{16.2}$$

В частности

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

т.е. *мнимая единица есть число, квадрат которого равен* -1.

3. Деление двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \tag{16.3}$$

Нетрудно убедиться в том, что все арифметические операции (16.1) – (16.3) над комплексными числами определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, если считать $i^2 = -1$. Например, произведение комплексных чисел (16.2) есть

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

ПРИМЕР

▷**Пример 16.1.** Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2.

Р е ш е н и е. $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i$,

$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i.$$

$$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 + 15i - 48i - 20i^2 = 56 - 33i$$

(учли, что $i^2 = -1$).

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12+5i}{3-4i}$. Умножая числитель и знаменатель на сопряженное делителю комплексное число $3 + 4i$, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(12+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{36+15i+48i+20_i^2}{9-16_i^2} =$$

$$= \frac{16 + 63i}{25} = 0{,}64 + 2{,}52i. ▶$$

Комплексные числа

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

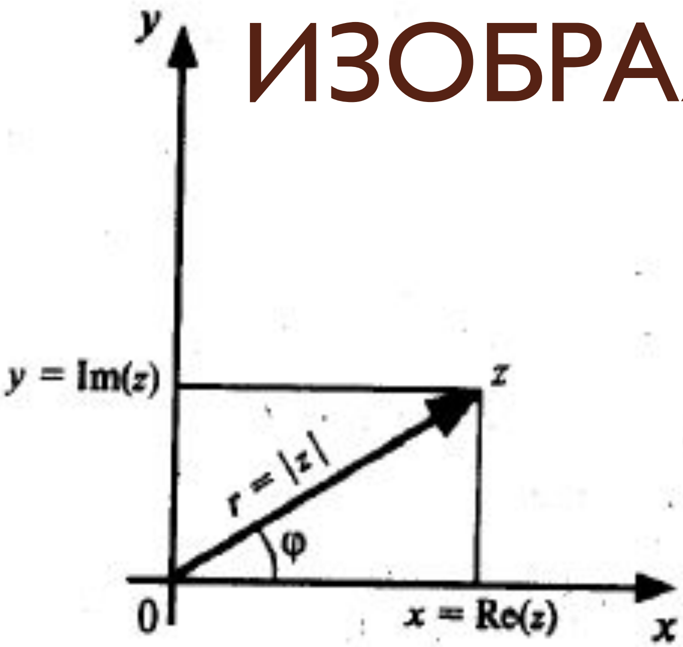

Рис. 16.1

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат точки координатной плоскости Oxy.

Плоскость называется *комплексной*, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(xy)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 16.1).

Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной и мнимой осями.*

Комплексные числа

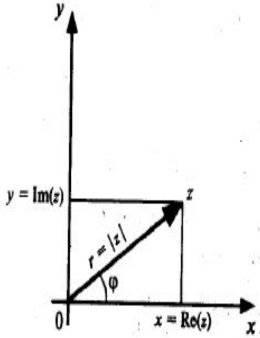

Рис. 16.1

16.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой $z\,(x,y)$ комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки $\vec{Oz}$, длина которого r называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$ (см. рис. 16.1):

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (16.4)$$

Угол φ, образованный радиусом-вектором $\vec{Oz}$ с осью Ox, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Из значений $\varphi = \operatorname{Arg} z$ выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \le \pi$. Например, $\arg 5 = 0$, $\arg(-3i) = -\pi/2$, $\arg(1-i) = -\pi/4$.

Очевидно (см. рис. 16.1), что

$$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi. \qquad (16.5)$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (16.6)$$

Представление комплексного числа в виде (16.6), где $r = |z| \ge 0$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называется *тригонометрической формой комплексного числа.*

Комплексные числа

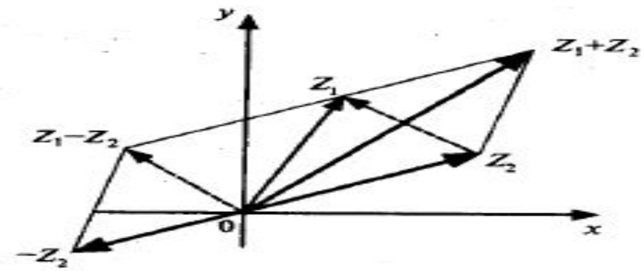

Рис. 16.2

1. *При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.*

На рис. 16.2 показаны радиусы-векторы комплексных чисел z_1 и z_2, их суммы $z_1 + z_2$ и разности $z_1 - z_2$.

2. *Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент — сумме (разности) аргументов этих чисел*, т.е.

если $z = z_1 z_2$, то $|z| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2; \qquad \textbf{(16.7)}$$

если $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$, то $|z| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(r_2 = |z_2| \neq 0)$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \qquad \textbf{(16.8)}$$

Геометрически умножение числа z_1 на z_2 означает изменение длины радиуса-вектора r_1 (или r_2) в r_2 (или r_1) раз и его поворот вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ_2 (или φ_1).

Комплексные числа

▷**Пример 16.2.** Комплексные числа $z_1=-1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$ представить в тригонометрической форме и найти z_1z_2 и z_1/z_2.

Р е ш е н и е. По формуле (16.4) найдем модуль комплексного числа z_1: $r_1=|z_1|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$, а из соотношений (16.5) $\cos\varphi=-1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi=1/\sqrt{2}$ получим аргумент числа z_1 (берем его главное значение): $\varphi_1=\arg z_1=3\pi/4$, т.е. $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Аналогично $r_2=|z_2|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=2$, $\cos\varphi_2=\sqrt{3}/2$, $\sin\varphi_2=1/2$,

т.е. $\varphi_2=\arg z_2=\pi/6$ и $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Теперь по формулам (16.7) и (16.8)

$$z_1z_2=\sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Так как в соответствии с формулами (16.7) и (16.8) при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, легко получить формулу возведения комплексного числа в натуральную степень n, известную как *формула Муавра:*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad \textbf{(16.9)}$$

▷**Пример 16.3.** Найти $(-1+i)^{20}$.

Решение. В примере **16.2** мы получили, что $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому по формуле Муавра (16.9)

$$(-1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 1024\left(\cos 15\pi + i\sin 15\pi\right) = 1024\left(-1 + 0i\right) = -1024. ▶$$

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Тогда, используя определение корня и формулу Муавра (16.9), получим

$$z = \left[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

или

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Отсюда следует, что

$$\rho^n = r \text{ и } n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ где } k \in Z.$$

Итак, $\rho = \sqrt[n]{r}$ **и** $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in Z$, **т.е.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad \textbf{(16.10)}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

При $k = n, n+1, \ldots$ **значения корня уже будут повторяться.**

Таким образом, ***корень n-ой степени из комплексного числа (не равного нулю) имеет n различных значений.***

▷**Пример 16.4.** Найти $\sqrt[3]{-1+i}$.

Р е ш е н и е. В примере **16.2** было получено

$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. По формуле (16.10)

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2,$$

откуда получаем три значения корня

$$z_1=\left(\sqrt[3]{1+i}\right)_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\left(\sqrt[3]{1+i}\right)_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$z_3=\left(\sqrt[3]{1+i}\right)_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$