



КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Глава 16. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексные числа необходимы в различных приложениях математики. В частности, теория функций комплексной переменной является действенным инструментом при использовании математических методов в различных областях науки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, i — мнимая единица.

Число x называется *действительной частью* числа z и обозначается $\operatorname{Re}(z)$ (от франц. *reelle* — “действительный”), а число y — *мнимой частью* числа z и обозначается $\operatorname{Im}(z)$ (от франц. *imaginaire* — “мнимый”), т.е. $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными, т.е. при $y = 0$, называются *мнимыми*, а при $x = 0$ $y \neq 0$, т.е. числа вида $z = iy$ — *чисто мнимыми*.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$, если $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$, $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$. В частности $z = 0$, если $\operatorname{Re}(z) = 0$ и $\operatorname{Im}(z) = 0$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \quad (16.1)$$

2. Произведение комплексных чисел

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (16.2)$$

В частности

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

т.е. мнимая единица есть число, квадрат которого равен -1 .

3. Деление двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \quad (16.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что все арифметические операции (16.1) – (16.3) над комплексными числами определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, если считать $i^2 = -1$. Например, произведение комплексных чисел (16.2) есть

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

ПРИМЕР

▷ **Пример 16.1.** Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$.
Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2 .

Решение. $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i$,

$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i.$$

$$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 + 15i - 48i - 20i^2 = 56 - 33i$$

(учти, что $i^2 = -1$).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i}. \text{ Умножая числитель и знаменатель на сопряжен-$$

ное делителю комплексное число $3 + 4i$, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 15i + 48i + 20i^2}{9 - 16i^2} =$$

$$= \frac{16 + 63i}{25} = 0,64 + 2,52i. \blacktriangleright$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

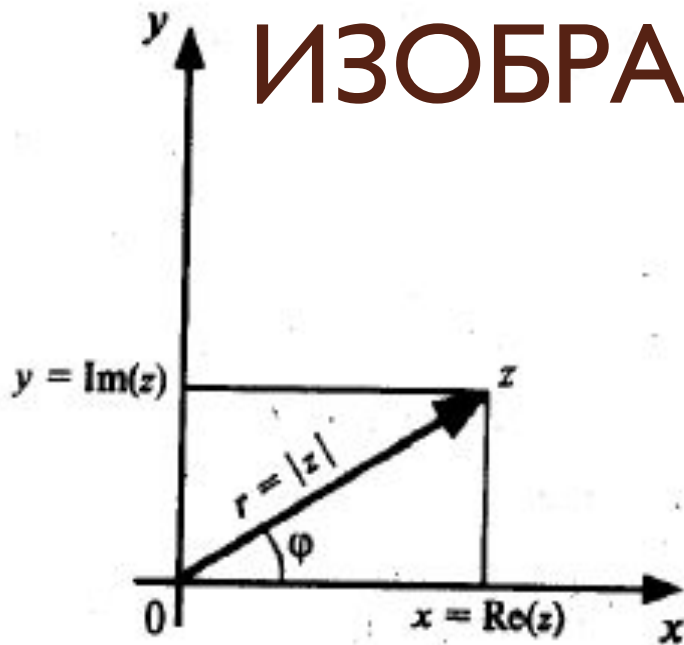


Рис. 16.1

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат точки координатной плоскости Oxy .

Плоскость называется *комплексной*, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(x, y)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 16.1).

Оси Ox и Oy , на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной* и *мнимой* осями.

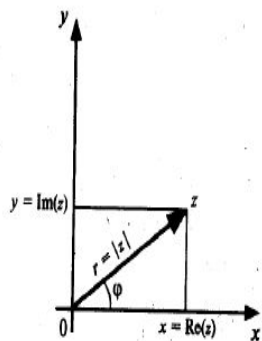


Рис. 16.1

16.2. Тригонометрическая и показательная формы КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан радиус-вектор этой точки \vec{Oz} , длина которого r называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ (см. рис. 16.1):

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (16.4)$$

Угол φ , образованный радиусом-вектором \vec{Oz} с осью Ox , называется *аргументом комплексного числа z* и обозначается $\text{Arg } z$. Из значений $\varphi = \text{Arg } z$ выделяется главное значение $\text{arg } z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \text{arg } z \leq \pi$. Например, $\text{arg } 5 = 0$, $\text{arg } (-3i) = -\pi/2$, $\text{arg } (1 - i) = -\pi/4$.

Очевидно (см. рис. 16.1), что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (16.5)$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (16.6)$$

Представление комплексного числа в виде (16.6), где $r = |z| \geq 0$, $\varphi = \text{Arg } z$, называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

1. При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.

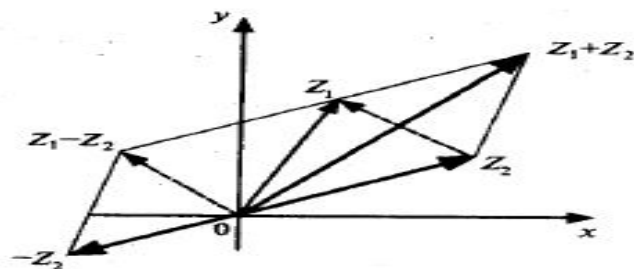


Рис. 16.2

На рис. 16.2 показаны радиусы-векторы комплексных чисел z_1 и z_2 , их суммы $z_1 + z_2$ и разности $z_1 - z_2$.

2. Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент — сумме (разности) аргументов этих чисел, т.е.

если $z = z_1 z_2$, то $|z| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\text{Arg } z = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2; \quad (16.7)$$

если $z = \frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$), то $|z| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($r_2 = |z_2| \neq 0$),

$$\text{Arg } z = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2. \quad (16.8)$$

Геометрически умножение числа z_1 на z_2 означает изменение длины радиуса-вектора r_1 (или r_2) в r_2 (или r_1) раз и его поворот вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ_2 (или φ_1).

▷ **Пример 16.2.** Комплексные числа $z_1 = -1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 z_2$ и z_1/z_2 .

Решение. По формуле (16.4) найдем модуль комплексного числа z_1 : $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, а из соотношений (16.5) $\cos \varphi = -1/\sqrt{2}$, $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$ получим аргумент числа z_1 (берем его главное значение): $\varphi_1 = \arg z_1 = 3\pi/4$, т.е. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Аналогично $r_2 = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$, $\cos \varphi_2 = \sqrt{3}/2$, $\sin \varphi_2 = 1/2$,
т.е. $\varphi_2 = \arg z_2 = \pi/6$ и $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

Теперь по формулам (16.7) и (16.8)

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= \sqrt{2} \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \right] = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \sin\frac{11\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \sin\frac{7\pi}{12} \right).\end{aligned}$$

Так как в соответствии с формулами (16.7) и (16.8) при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, легко получить формулу возведения комплексного числа в натуральную степень n , известную как *формула Муавра*:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (16.9)$$

▷ **Пример 16.3.** Найти $(-1+i)^{20}$.

Решение. В примере 16.2 мы получили, что $-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$. Поэтому по формуле Муавра (16.9)

$$\begin{aligned} (-1+i)^{20} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} = \\ &= (\sqrt{2})^{20} \left[\cos \left(20 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(20 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right] = \\ &= 1024 (\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = 1024 (-1 + 0i) = -1024. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Тогда, используя определение корня и формулу Муавра (16.9), получим

$$z = [\rho(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi)$$

или

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Отсюда следует, что

$$\rho^n = r \text{ и } n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ где } k \in Z.$$

Итак, $\rho = \sqrt[n]{r}$ и $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in Z$, т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (16.10)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

При $k = n, n+1, \dots$ значения корня уже будут повторяться.

Таким образом, корень n -ой степени из комплексного числа (не равного нулю) имеет n различных значений.

▷ **Пример 16.4.** Найти $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение. В примере 16.2 было получено

$$z = -1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right). \text{ По формуле (16.10)}$$

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4+2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4+2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

откуда получаем три значения корня

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{1+i} \right)_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z_2 = \left(\sqrt[3]{1+i} \right)_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),$$

$$z_3 = \left(\sqrt[3]{1+i} \right)_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$