Комплексные числа

доклад

Содержание

№ стр.

Определение

Комплексные числа представляются в виде выражения:

$$z = x + iy,$$

где x, y – вещественные числа;

x – действительная часть числа z (Re_z);

y – мнимая часть числа z (Im_z);

i – мнимое число (величина, для которой выполняется равенство $i^2=-1$).

Стандартная модель

Комплексное число z можно определить как упорядоченную пару вещественных чисел;

запись $z = x + iy$ следует понимать как удобный способ записи такой пары.

Введём операции сложения и умножения таких пар следующим образом:

$$(x,\ y) + (x',\ y') = (x + x',\ y + y')\,;$$
$$(x,\ y) \cdot (x',\ y') = (xx' - yy',\ xy' + yx')\,.$$

Стандартная модель

Вещественные числа являются в этой модели подмножеством множества комплексных чисел и представлены парами вида (x, 0), причём операции с такими парами согласованы с обычными сложением и умножением вещественных чисел:

Ноль представляется парой $0 = (0, 0)$;

Единица - $-1 = (-1, 0)$.

Матричная модель

Комплексные числа можно также определить как:

- подкольцо кольца вещественных матриц 2×2 вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

- с обычным матричным сложением и умножением. Действительной единице будет соответствовать

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- мнимой единице —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Арифметические действия

- Сравнение

  $x + iy = a + ib$ равны тогда и только тогда, когда

  $x = a,\ y = b;$
- Сложение

  $(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + (y + b)i;$
- Вычитание

  $(x + iy) – (a + ib) = (x - a) + (y - b)i;$

Арифметические действия

- Умножение

$(x + iy) \cdot (a + ib) = xa + xib + aiy + bi^2y$

$= (xa - yb) + (ya + xb)i;$

- Деление

$$\frac{x+iy}{a+ib} = \frac{(x+iy)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + \left(\frac{ya-xb}{a^2+b^2}\right)i;$$

- В частности

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Геометрическая модель

Любое комплексное число (кроме нуля) можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z| \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi),$$

где $|z|$ - модуль комплексного числа;

ϕ – аргумент комплексного числа.

Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости.

Геометрическая модель

Модуль можно представить диагональю $|z|$, проложенной к точке z прямоугольника *obza* (рис. 1).

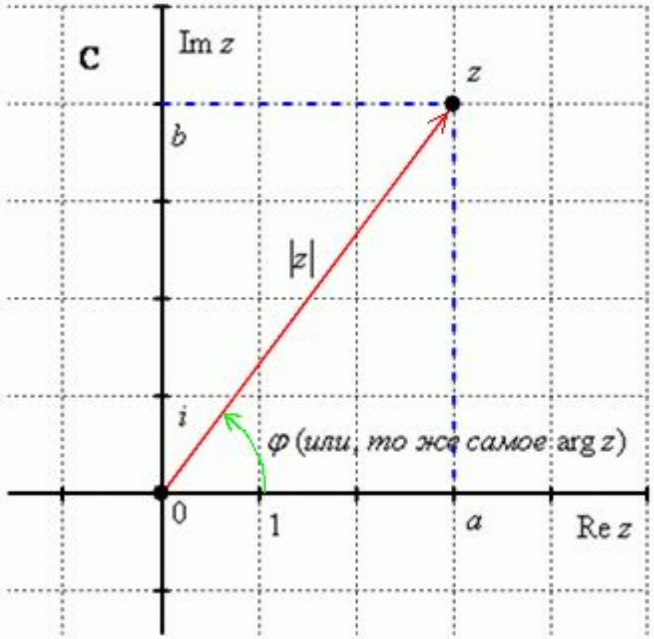

рис. 1
Геометрическое представление комплексного числа

Модуль и аргумент

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Угол φ между положительной полуосью действительной оси Re_z и радиус-вектором $|z|$, проведённым из начала координат к соответствующей точки, является аргументом комплексного числа z.

Аргумент не определён для единственного числа: $z = 0$.

Модуль и аргумент

- Из этого определения следует, что:
  - $tg_{\varphi} = \frac{b}{a}$;
  - $\cos_{\varphi} = \frac{a}{|z|}$;
  - $\sin_{\varphi} = \frac{b}{|z|}$.
- Если a = 0, то z является мнимым числом;
- Если b = 0, то z является действительным числом.

Множество комплексных чисел с арифметическими действиями

Множество всех комплексных чисел с арифметическими операциями является полем и обычно обозначается символом *C*.

Для любых *z, z1, z2 є C* имеют место следующие свойства модуля:

- $|z| \geq 0$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$

Сопряжённые числа

Если комплексное число $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$ является сопряжённым к z.

На комплексной плоскости сопряжённые числа получаются зеркальным отражением друг друга относительно вещественной оси (рис. 2). Модуль сопряжённого числа такой же, как у исходного, а их аргументы отличаются знаком.

Сопряжённые числа

Переход к сопряжённому числу можно рассматривать как одноместную операцию:

$\bar{\bar{z}} = z$ (сопряжённое к сопряжённому есть исходное).

Произведение и сумма комплексно-сопряженных чисел есть действительное число:

$\bar{z} \cdot z = |z^2|$;

$\bar{z} + z = 2Re_z$.

Другие соотношения:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$;

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$.

Сопряжённые числа

Умножение числителя и знаменателя комплексной дроби при комплексном знаменателе на сопряжённое к знаменателю выражению используется для устранения комплексности знаменателя, что позволяет выразить выражение в канонической форме комплексного числа или функции.

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Сопряжённые числа

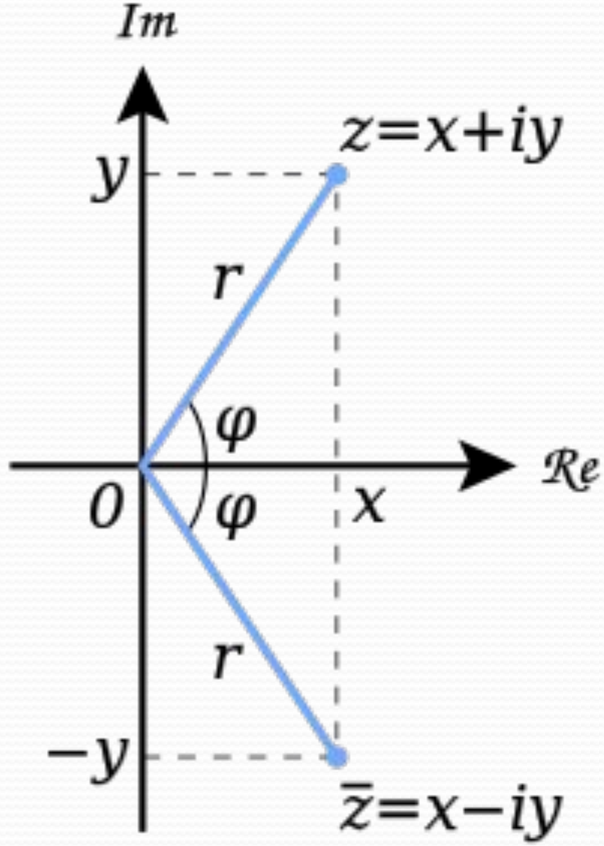

Рис. 2
Геометрическое представление сопряжённых чисел
где r – модуль числа z, второе обозначение |z|

Показательная форма

Применяя к тригонометрической форме комплексного числа $z = |z| \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ формулу Эйлера, получим показательную форму:

$$z = |z|e^{i\phi},$$

где $e^{i\phi}$ - расширение экспоненты для случая комплексного показателя степени.

Отсюда вытекают следующие широко используемые равенства:

$$\cos\varphi = \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2i}$$

Формула Муавра

Формула Муавра помогает возводить в целую степень ненулевое комплексное число, представленное в тригонометрической форме.

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

где r — модуль;

φ — аргумент комплексного числа.

В современной символике она опубликована Эйлером в 1722 году. Приведенная формула справедлива при любом целом n, необязательно положительном.

Извлечение корней из комплексных чисел

Аналогичная формула применима также и при вычислении корней n-ой степени из ненулевого комплексного числа:

$$z^{1/n} = [r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

где $n > 1$ и $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Отметим, что корни n-й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют и их количество равно n. На комплексной плоскости, как видно из формулы, все эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис. 3).

Извлечение корней из комплексного числа

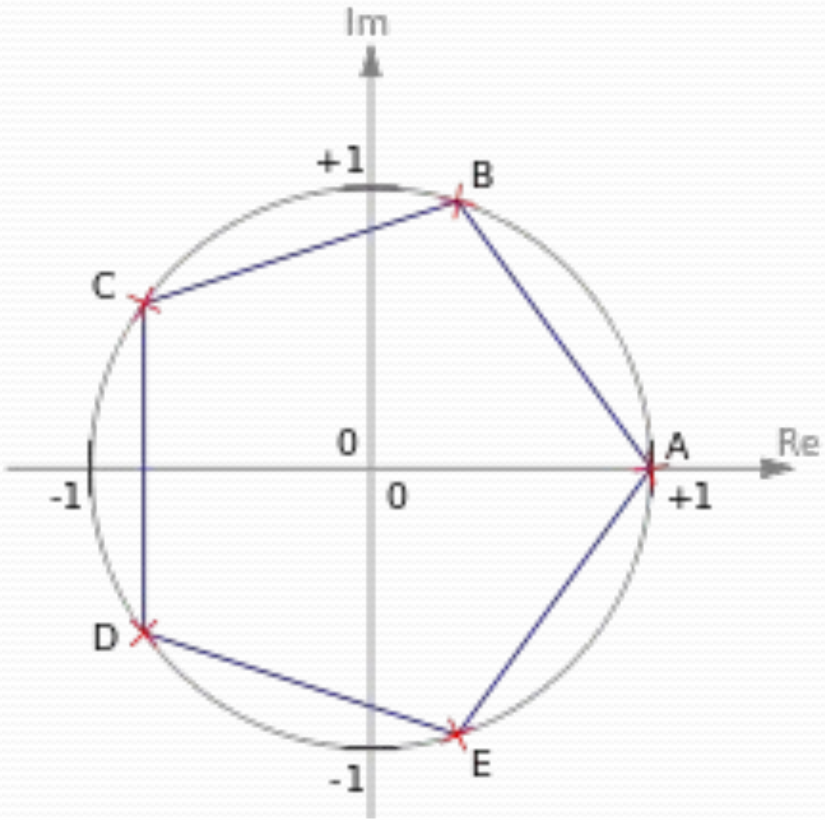

Рис. 3
Корни пятой степени из единицы
(вершины пятиугольника)