

Комплексные числа

Комплексным числом называется

число вида

$$z = x + y \cdot i,$$

где x и y – вещественные числа.

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой
записи комплексного числа.

Число x называется действительной частью, y –мнимой частью комплексного числа z .

Это записывают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

- Если $x = 0$, то число Z называют чисто мнимым.

- Если $y = 0$, то получается $z = x + 0 \cdot i$ вещественное число.

- Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$; комплексное число z считается равным нулю, если $x=y=0$.

Всякое комплексное число можно изобразить точкой на плоскости, т.к. каждому z соответствует упорядоченная пара вещественных чисел $(x; y)$.

Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i$$

Действия над комплексными числами

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{aligned}$$

Действия над комплексными числами

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_1 + \varphi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Формулы Муавра

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$