Комплексные числа

Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел (R) не является алгебраически замкнутым полем(т.е. многочлены с действительными коэффициентами могут не иметь действительных корней).

Пример:

$$X^2+1=0$$

Наша цель – построение расширения поля C, в котором есть такой элемент i, что

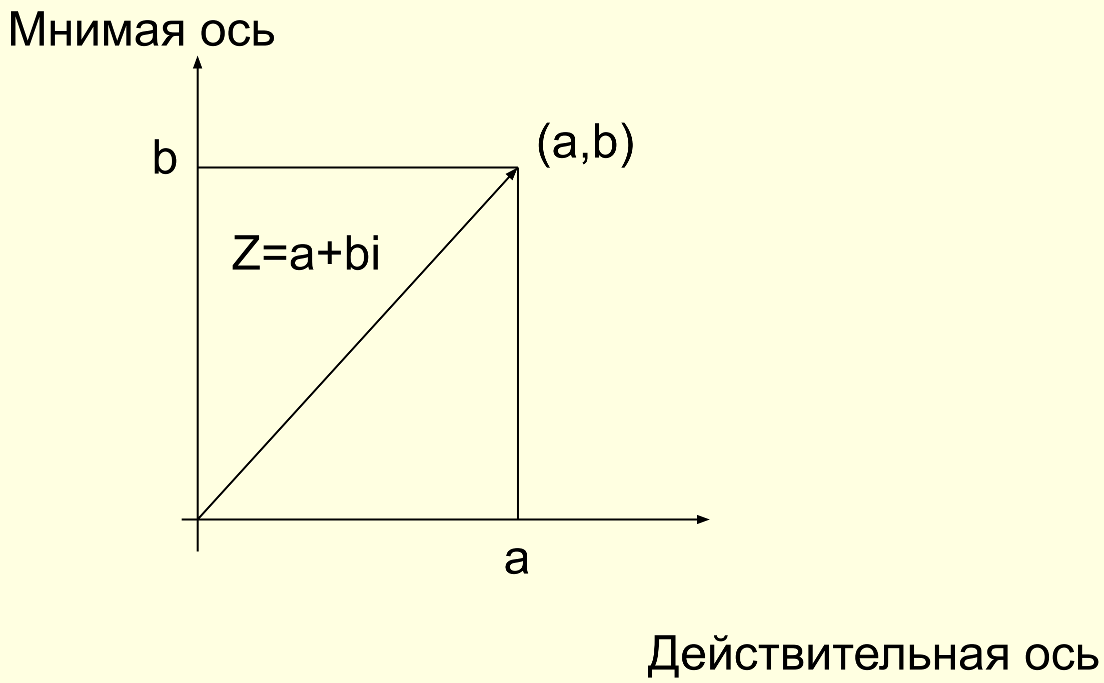
$$i^2=-1$$

Построение поля C окажется алгебраически замкнутым*(алгебраическим замыканием* поля C*)*

Для C характерно:

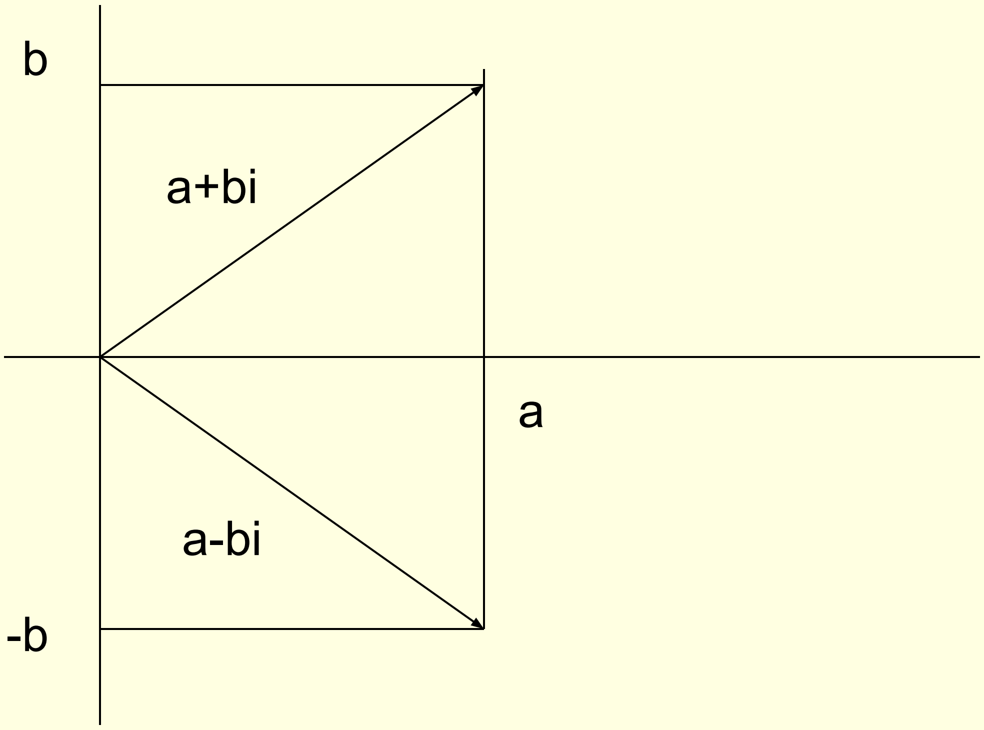
1) Для a, b, c, d равенство $a+bi=c+di$ выполняется тогда и только тогда, когда $a=c$, $b=d$
2) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
4) $(a+bi)/(c+di)=(a+bi)(c-di)/(c^2+d^2)$

Геометрическая интерпретация



Сопряжение

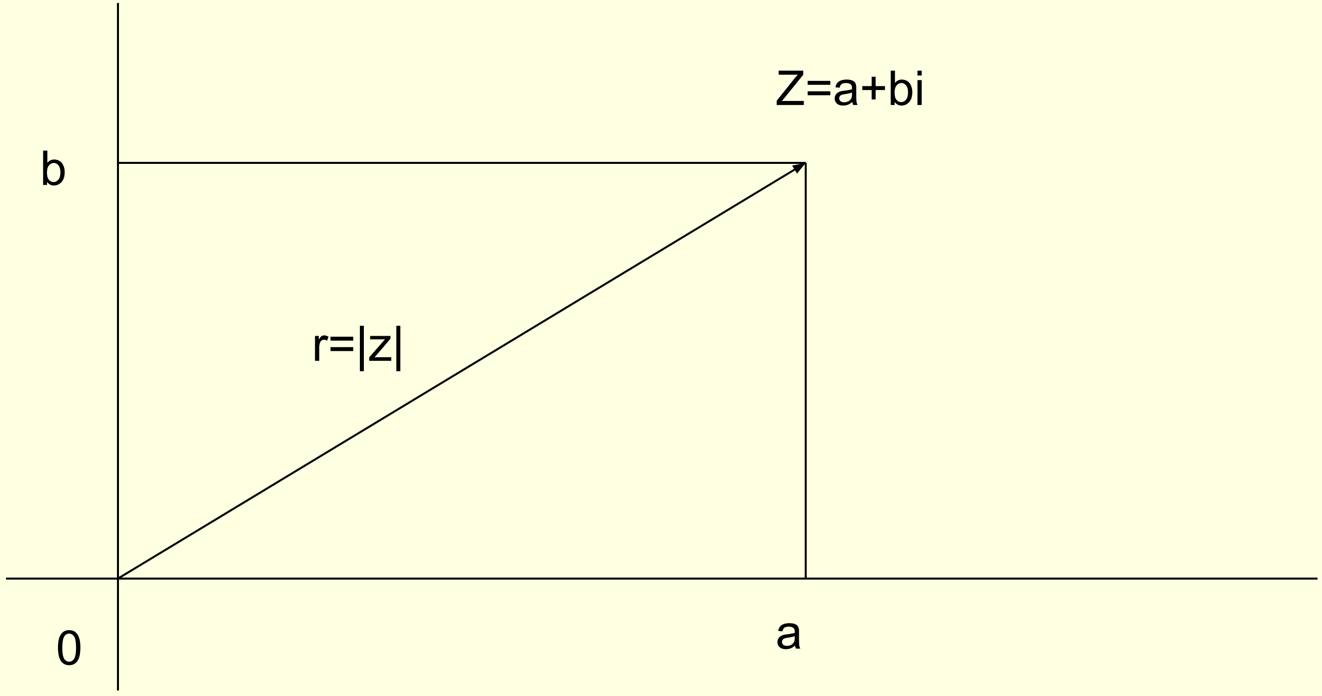
Число $\bar{z}=a-bi$ называется сопряжённым числу $z=a+bi$



Модуль комплексных чисел

Для комплексного числа z=a+bi определим модуль:

$|z|= \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{a^2+b^2}$

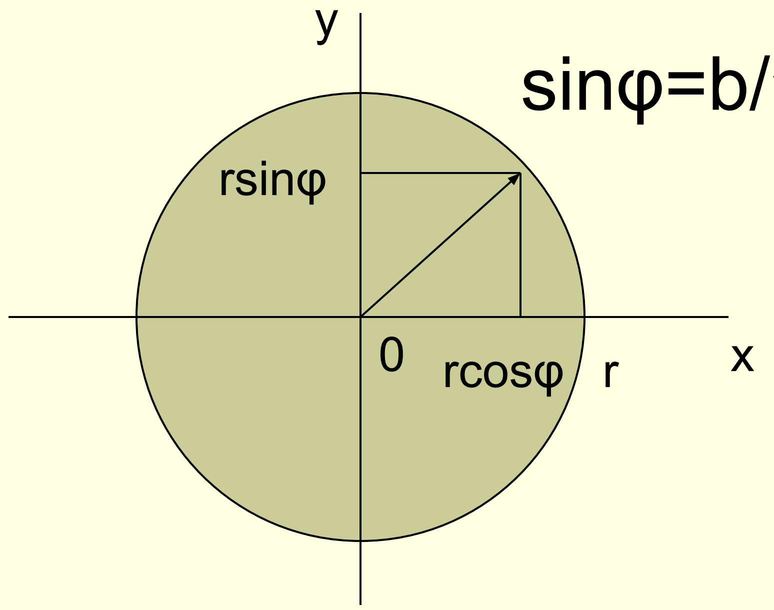


Тригонометрическая форма

$z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$

$\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$



Тригонометрическая форма комплексного числа единственна

Умножение чисел в тригонометрической форме

Для чисел: $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$,

$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

верно: $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Следствие: $z_1/z_2=r_1/r_2(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

Формула Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Извлечение корня n-ой степени

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,(\cos(\varphi+2\pi k)/n + i\sin(\varphi+2\pi k)/n)$$

Теорема о разложении многочлена с комплексными коэффициентами в произведении линейных множителей

Пусть $f(x)$ из C, $\deg f(x)=n\geq 1$ Тогда:

$f(x)=a(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$, $a,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ из C

Такое разложение единственно