



Комплексные числа



Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел (\mathbb{R}) не является алгебраически замкнутым полем (т.е. многочлены с действительными коэффициентами могут не иметь действительных корней).

Пример:

$$x^2 + 1 = 0$$

Наша цель – построение расширения поля \mathbb{C} , в котором есть такой элемент i , что

$$i^2 = -1$$

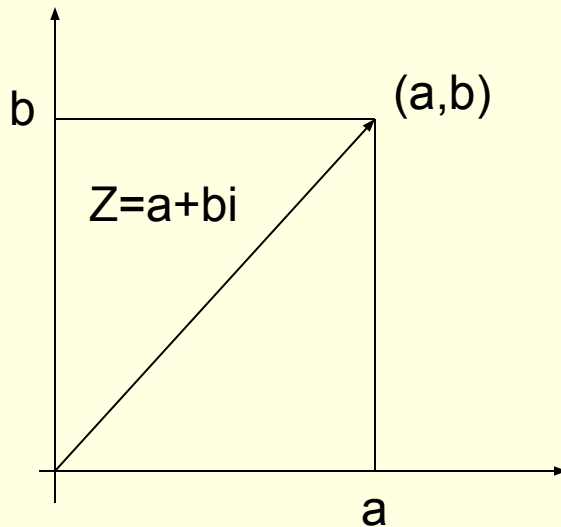
Построение поля \mathbb{C} окажется алгебраически замкнутым (*алгебраическим замыканием* поля \mathbb{C})

Для C характерно:

- 1) Для a, b, c, d равенство $a+bi=c+di$ выполняется тогда и только тогда, когда $a=c, b=d$
- 2) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- 3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
- 4) $(a+bi)/(c+di)=(a+bi)(c-di)/(c^2+d^2)$

Геометрическая интерпретация

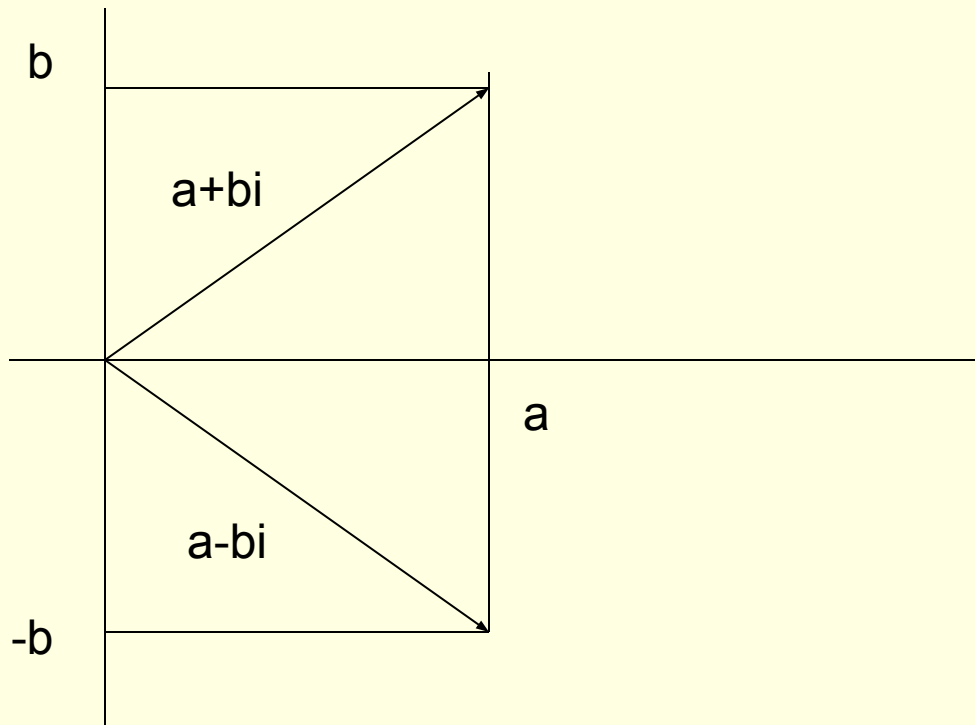
Мнимая ось



Действительная ось

Сопряжение

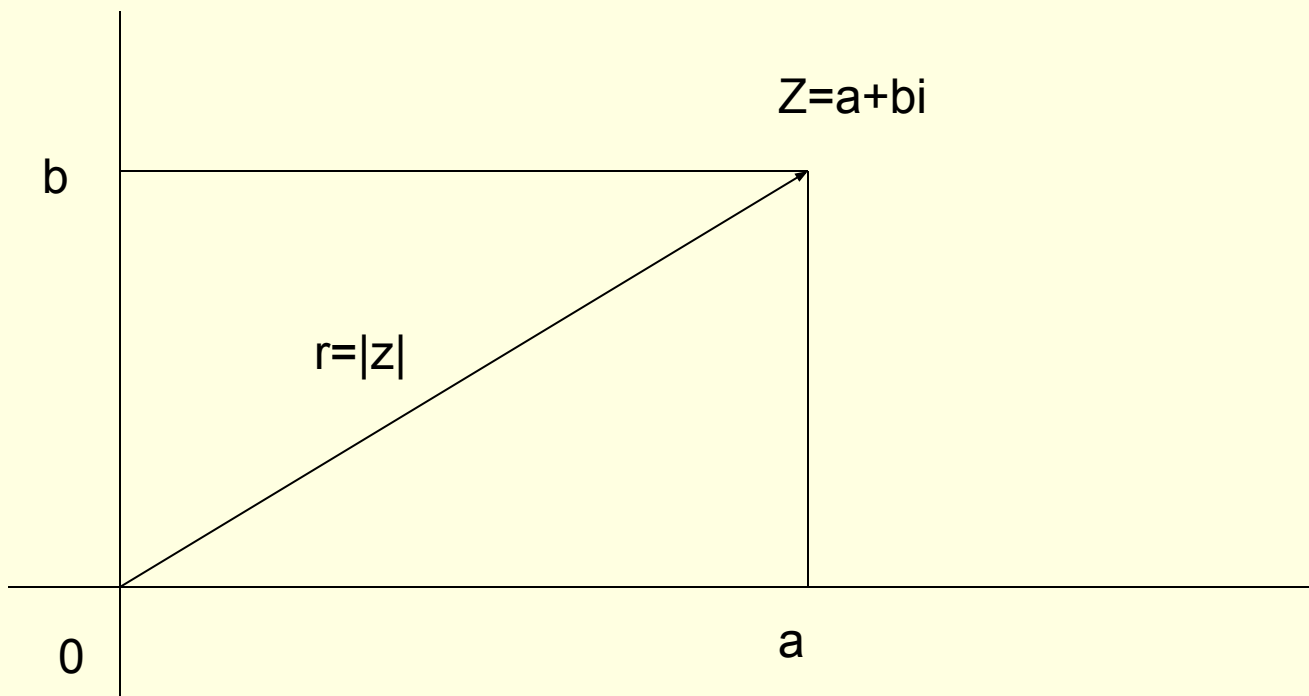
Число $\bar{z}=a-bi$ называется сопряжённым числу $z=a+bi$



Модуль комплексных чисел

Для комплексного числа $z=a+bi$ определим модуль:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

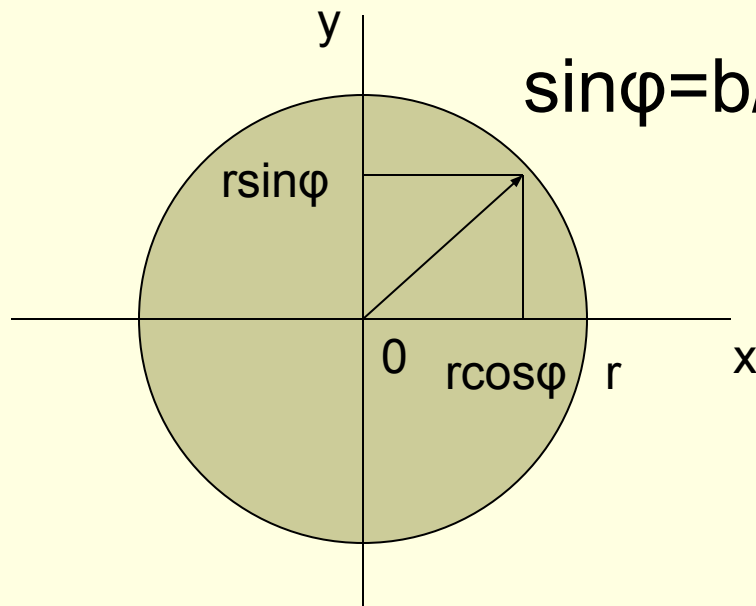


Тригонометрическая форма

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin\varphi = b / \sqrt{a^2 + b^2}$$



Тригонометрическая форма
комплексного числа единственна

Умножение чисел в тригонометрической форме

Для чисел: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
 $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

верно: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Следствие: $z_1 / z_2 = r_1 / r_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Формула Муавра

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Извлечение корня n-ой степени

$$w_k = \sqrt[n]{r} (\cos(\varphi + 2\pi k/n) + i \sin(\varphi + 2\pi k/n))$$

Теорема о разложении многочлена с комплексными коэффициентами в произведении линейных множителей

Пусть $f(x)$ из \mathbb{C} , $\deg f(x)=n \geq 1$ Тогда:

$$f(x) = a(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n), \quad a, \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ из } \mathbb{C}$$

Такое разложение единственно