Композиция функций

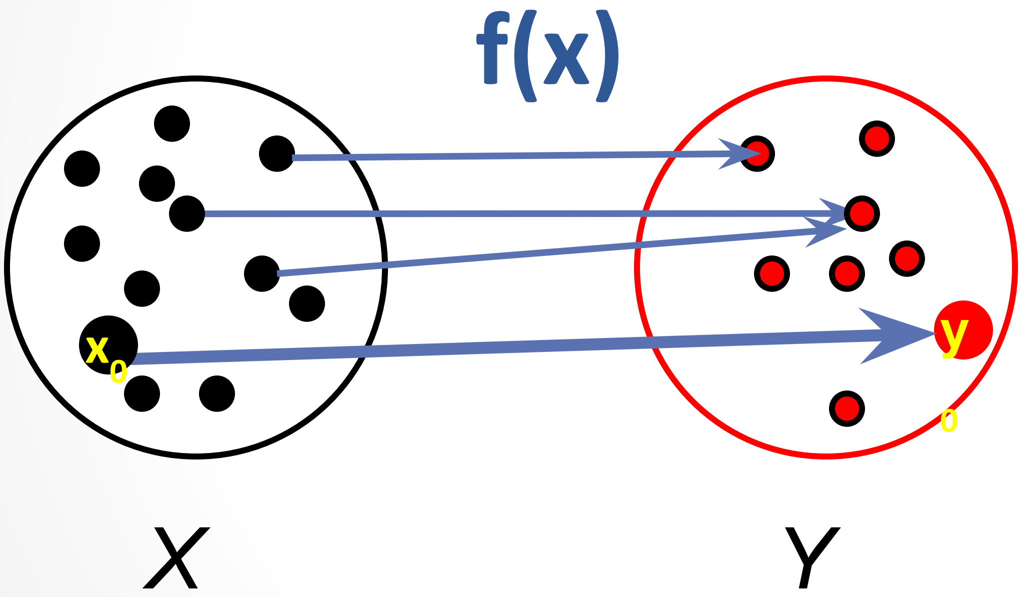
Работу выполнили
ученики 10 б класса
Руководитель Фомичёва Валентина Николаевна

Цели работы

- Разобраться, что такое композиция функций, и как применить это новое понятие на практике
- Потренироваться в решении заданий с функциональными уравнениями и с построениями графиков
- Закрепить пройденный материал по производным
- Заинтересовать учащихся, привлечь их внимание к данной теме

Определение функции

Функция *– соответствие между множествами Х и У, при котором каждому элементу первого множества Х соответствует не более одного элемента другого множества У.*

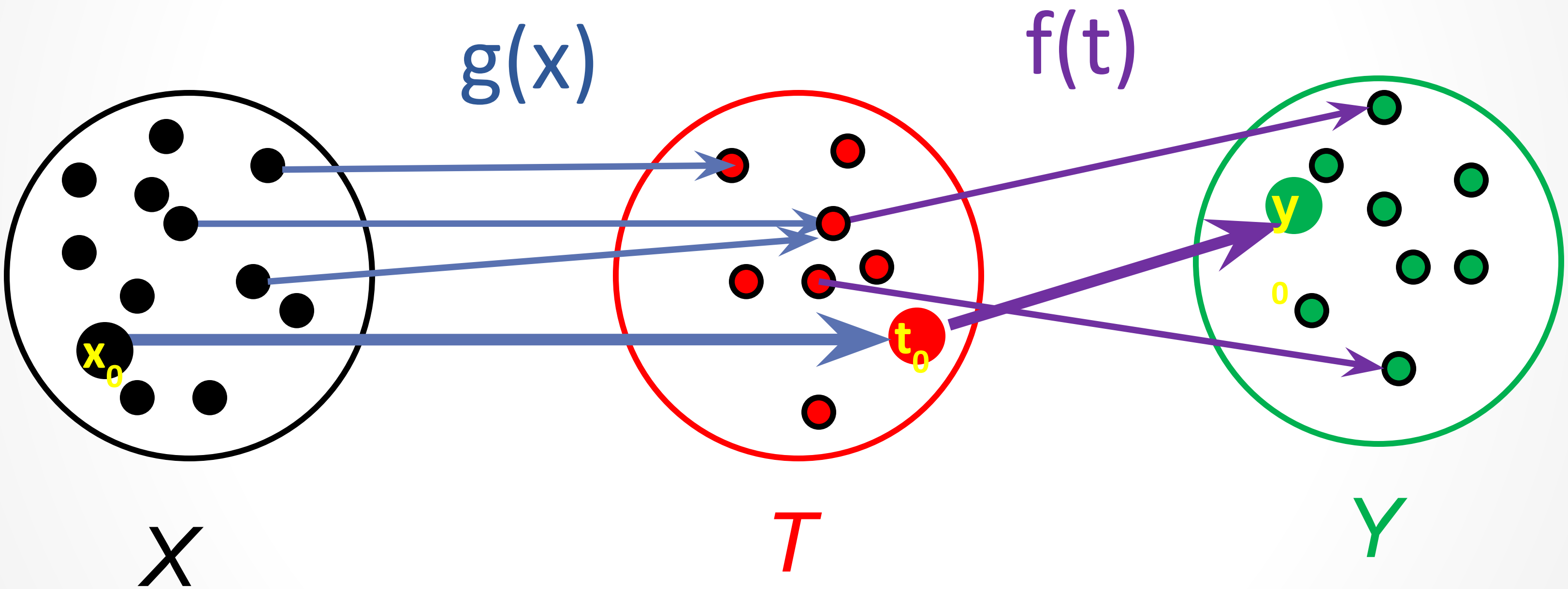


$$y=f(x)$$

$$x_0 \longrightarrow y_0$$

$$y_0=f(x_0)$$

Композиция функций – сложная функция – сложенная функция



$$y = \sqrt{\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$x_0 \longrightarrow t_0 \longrightarrow y_0$$

Формула для задания сложной функции

y=f(g(x)) –

– сложная функция

g(x) – внутренняя функция

f(t) – внешняя функция

Пример.

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

g(x) = x^2 - 4 – внутренняя функция

f(t) = $\sqrt{t}$ – внешняя функция

Примеры:

$$1)\ y = (\underbrace{2x+1}_{})^{\boxed{6}}$$

Внешняя функция $f = t^6$

Внутренняя функция $t = 2x + 1$

$$2)\ y = \frac{1}{\sin^2 x}; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$$

$$y = (\underbrace{\sin x}_{})^{\boxed{-2}}$$

Внешняя функция $f = t^{-2}$

Внутренняя функция $t = \sin x$

Законы композиции функций

- **Переместительный закон** $f \circ g = g \circ f$ выполняется не для всех функций

- **Сочетательный закон** остается в силе:
- $[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) =$
- $= f(g(h(x)))$,
- $[f \circ (g \circ h)](x) = f[(g \circ h)(x)] =$
- $= f(g(h(x)))$
- **Распределительный закон** распадается на два — из-за отсутствия перестановочного закона:
- $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$
- $(g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$
- и, что удивительно, один из них выполняется в алгебре функций, а второй — нет.

Функциональные уравнения

Рассмотрим задачи, в которых надо найти функцию, если задано некоторое уравнение, в котором в качестве неизвестной выступает сама функция.

- **Пример 1**

F(x) – нечетная и периодическая с периодом T = 10

Найти f(2015), если f(-5) = 1,5

Решение:

Используем периодичность функции f(x). Тогда f(2015) = f(5+10*201) = f(5) Так как f(x) нечетная, то f(-x) = -f(x) => f(5) =

= -f(-5)= -1,5

Ответ: -1,5

Решение функциональных уравнений методом подстановки

- **Пример 1**

$f(2x+1)=x^2$. **Найти $f(x)$**

Решение: Введем подстановку.

Пусть $2x+1=t$, тогда $2x=t-1$, $x=\frac{t-1}{2}$, $f(t)=\left(\frac{t-1}{2}\right)^2$

$$\mathbf{f}(x)=\frac{(x-1)^2}{4}$$

- **Пример 2**

$\mathbf{f}\left(\frac{a+x}{c+x}\right)=\mathbf{kx}$, $x\neq -c$ a, c, k – постоянные. **Найти f(x)**

Пусть $\frac{a+x}{c+x}=t$ $a+x=(c+x)t$ $f(t)=k\left(\frac{ct-a}{1-x}\right)$

$x-xt=ct-a$ $\mathbf{f(x)=k}\left(\frac{cx-a}{1-x}\right)$, где $x\neq 1$

$x=\frac{ct-a}{1-t}$ $a\neq c$

Примеры для самостоятельного решения

1. Известно, что функция $f(x)$ - чётная и $f(-3) = 2$. Найдите значение $\frac{f(3)-3f(-3)+5f(3)f(-3)}{7f(3)-4f(-3)}$
2. Известно, что функция $f(x)$ -нечётная и $f(-2) = 3$. Найдите значение $\frac{4f(2)+5f(-2)-3f(2)f(-2)}{5f(-2)-f(2)}$
3. С2(из теста №1 для 10 класса по теме «Функция. Область определения и область значений функции» Известно, что $f(3-x) = 2x^2 + 3x - 1$. Найдите функцию $f(x)$
4. Известно, что $f(2-x) = 3x^2 - x + 5$. Найдите функцию $f(x)$

Производная композиции функций

Дана функция $y = U^n$, где $U = f(x)$

Её производная $y' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$

Для доказательства применили метод математической индукции

- $n = 2$, $(U^2)' = (U \cdot U)' = $
$= U' \cdot U + U \cdot U' = 2 \cdot U \cdot U'$
- $n = k$, $(U^k)' = k \cdot U^{k-1} \cdot U'$
- $n = k + 1$,
$(U^{k+1})' = (U^k \cdot U)' = k \cdot U^{k-1} \cdot U' \cdot U + U^k \cdot U' = k \cdot U^k \cdot U' + U^k \cdot U' = U^k \cdot U' \cdot (k+1) = (k+1) \cdot U^k \cdot U'$
- Доказали, что

$$(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$$

Другие производные

- $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2 \cdot \sqrt{U}}$
- $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$
- $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
- $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
- $(tg\, U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$
- $(ctg\, U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$

Правило нахождения производной композиции функций

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней функции

$$1)\ y=\cos\boxed{\left(4x^2-3x+5\right)} \qquad \begin{cases} t=4x^2-3x+5 \\ f=\cos t \end{cases}$$

$$\boxed{y'=f'\cdot t'}$$

$$y'=(\cos t)'\cdot\left(4x^2-3x+5\right)'=-\sin t\cdot(8x-3)=$$

$$=-(8x-3)\cdot\sin t=(3-8x)\cdot\sin t=$$

$$=\ (3-8x)\cdot\sin\left(4x^2-3x+5\right)$$

Найти производную функции $y = \mathrm{t}g^2 x$

- Производная от данной функции сначала берется как от степенной, а затем как от тригонометрической функции:
- $y' = 2tg\, x \cdot (tg\, x)'$
- $y' = 2tg\, x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Применение производной композиции функций для построения графика

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 - 4}}$$

1. Область определения функции:
   D(y) = (-∞; -2] U [2; +∞)
   Функция четная
   $$y(-x) = y(x)$$
2. $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

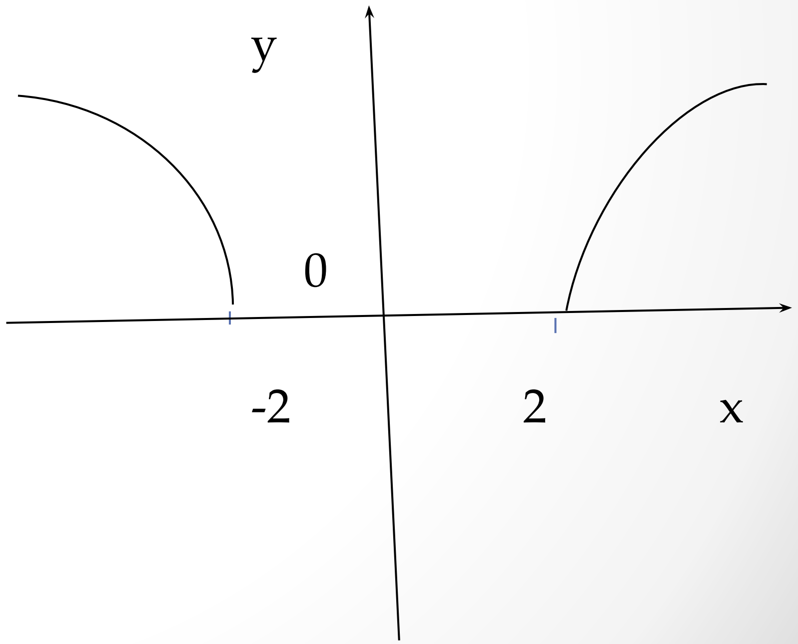
D(y’) = (-∞; -2) U (2; +∞)

$y' = 0, x = 0$

y' не существует

при x = ± 2

x		-2	2	
		--	--	
	↘	0	0	↗



Справочная литература

Мордкович А.Г., Смирнова И.М. «Математика (базовый уровень)» 10 кл., 11 кл, издательство «Мнемозина».

Мордкович А.Г. «Алгебра и начала математического анализа 10-11» издательство «Мнемозина»

Колмогоров А.Н. и др. «Алгебра и начала математического анализа 10-11» издательство «Просвещение»

Дополнительную информацию можно найти на сайтах:

1. http://www.fipi.ru
2. http://www.mathege.ru
3. http://www.reshuege.ru …
4. http://mon.gov.ru/pro/fgos

Спасибо за внимание!