Координатный метод в решении задач на плоскости

Белобородова Н. Е.,
учитель математики
МАОУ «СОШ №2»

Чернушка 2012
г.

Координатный метод, возникновение которого обычно связывают с именем великого французского математика и философа Рене Декарта, жившего в первой половине 17 века, произвел настоящий переворот в геометрии и не только в ней.

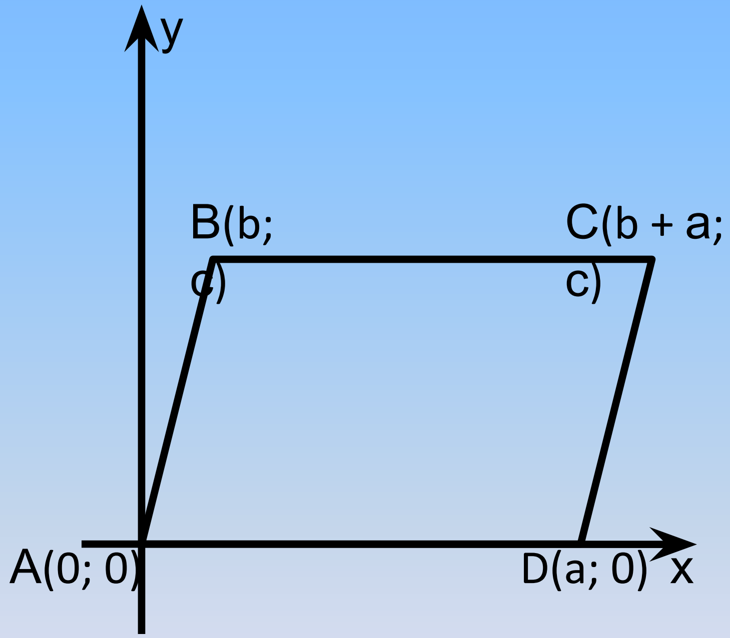
Метод коор… способ поставить в соответствие… – фигурам, линиям, те или… тношения. Иначе, метод координа… еометрического языка на язык… трические проблемы прев… ие, и мы получаем возм… решения геометрически… тоды.

Р. Декарт

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

- **Применение прямоугольных координат к решению задач**

Задача1: Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.



Решение: 1. Пусть ABCD – данный параллелограмм. Введем систему координат так, как показано на рисунке. Если AD = BC = a, а точка B имеет координаты (b; c), то D(a; 0), точка C (a + b; c).

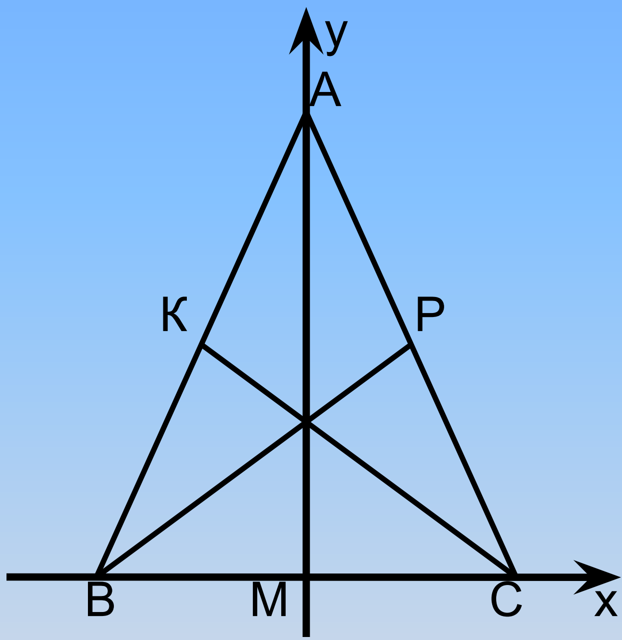
2. Используя формулу расстояний между точками, находим $AB^2 = b^2 + c^2$, $AD^2 = a^2$, $AC^2 = (b + a)^2 + c^2$, $BD^2 = (a – b)^2 + c^2$, тогда

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (a – b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

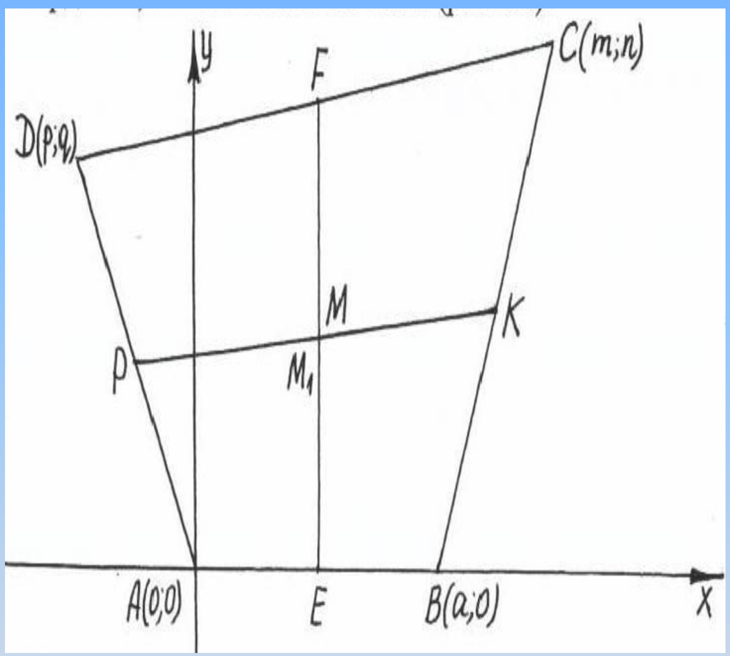
Таким образом, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$, что и требовалось доказать.

Задача 2: Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.



Решение: 1. Пусть треугольник ABC – данный равнобедренный треугольник, AM – медиана.
Введём систему координат таким образом, что M(0; 0), точка A лежит на оси Oy, основание BC – на оси Ox.
Так как BC = 80 см, то B(-40; 0), C(40; 0); AM = 160, значит, A(0; 160).
2. По формуле координат середины отрезка найдём середины двух других сторон треугольника:
P – середина AC, P(20; 80)
K – середина AB, K(-20; 80)
3. Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем, что $BP = \sqrt{(-40 - 20)^2 + (80 - 0)^2} = 100$ см, $CK = \sqrt{(-20 - 40)^2 + 80^2} = 100$ см
Ответ: BP = CK = 100 см

Задача 3: Докажите, что середины отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон четырехугольника, совпадают.



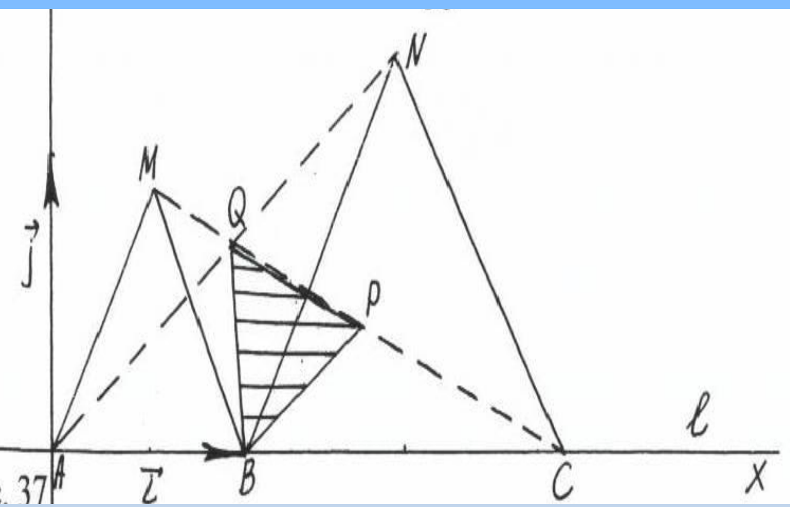
Решение: 1. Пусть дан произвольный четырехугольник ABCD. Расположим его на координатной плоскости так, чтобы точка A совпала с началом координат, а B оказалась на оси x.

2. Введем координаты вершин данного четырехугольника: A(0; 0), B(a;0), C(m; n), D(p; q). Тогда координаты середин сторон четырехугольника будут следующие: E(a/2; 0), F((m + p)/2; (n + q)/2), K ((a + m)/2; n/2), P(p/2; q/2).

3. Координаты середины M отрезка EF:
M((a + m + p)/4; (n + q)/4).
Координаты середины M_1 отрезка KP:
M_1 ((a + m + p)/4; (n + q)/4).

4. Координаты точек M и M_1 совпадают. Значит, середина отрезка EF совпадает с серединой отрезка KP, что и требовалось доказать

Задача 4: На прямой l даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C. По одну сторону от прямой l построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Докажите, что середина отрезка MC, середина отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.



Решение: 1. Пусть P – середина отрезка MC, а Q – середина отрезка AN.

2. Введем прямоугольную систему координат. Если BC = a, то легко убедиться в том, что вершины данных треугольников имеют координаты: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1 + a; 0)$, $M(1/2; \sqrt{3}/2)$, $N(1+ a/2; \sqrt{3}a/2)$.

3. Определим координаты точек $P(x_1 , y_1)$ и $Q(x_2 , y_2)$:

$x_1 = (1/2 + 1 + a)/2 =(3 + 2a)/4$, $y_1 = \sqrt{3}/4$, т.е. $P((3 + 2a)/4; \sqrt{3}/4)$

$x_2 = (2 + a)/4$, $y_2 = \sqrt{3}a/4$, т.е. $Q((2 + a)/4; \sqrt{3}a/4)$.

4. Пользуясь формулой для вычисления длины отрезка по координатам концов, получаем:

$BQ = \sqrt{((2 + a)/4 – 1)^2 + (\sqrt{3}a/4 – 0)^2} = \sqrt{(a^2 – a + 1)/2}$,

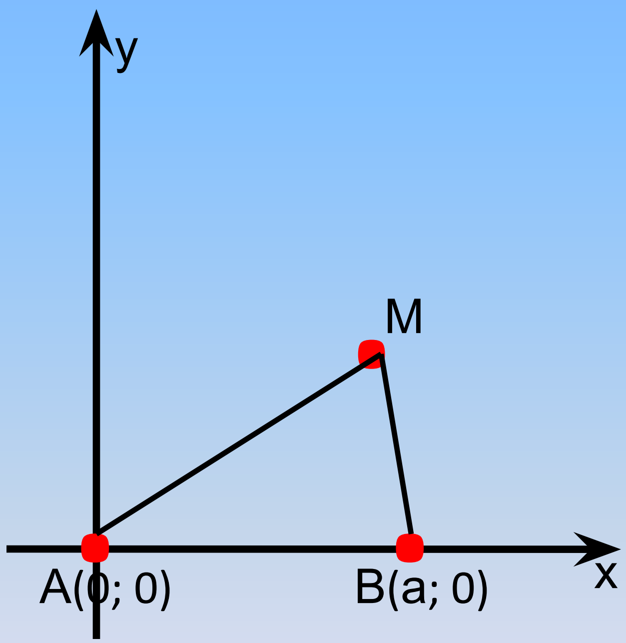
$PQ = \sqrt{((2 + a)/4 – (3 + 2a)/4)^2 + (\sqrt{3}a/4 – \sqrt{3}/4)^2} = \sqrt{(a^2 – a + 1)/2}$,

$PB = \sqrt{(1 – (3 + 2a)/4)^2 + (0 – \sqrt{3}/4)^2} = \sqrt{(a^2 – a + 1)/2}$,

т.е. BQ = PQ = PB.

▪**Задачи на нахождение геометрических мест точек**

Задача 5: Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки A в два раза больше расстояния от точки B.



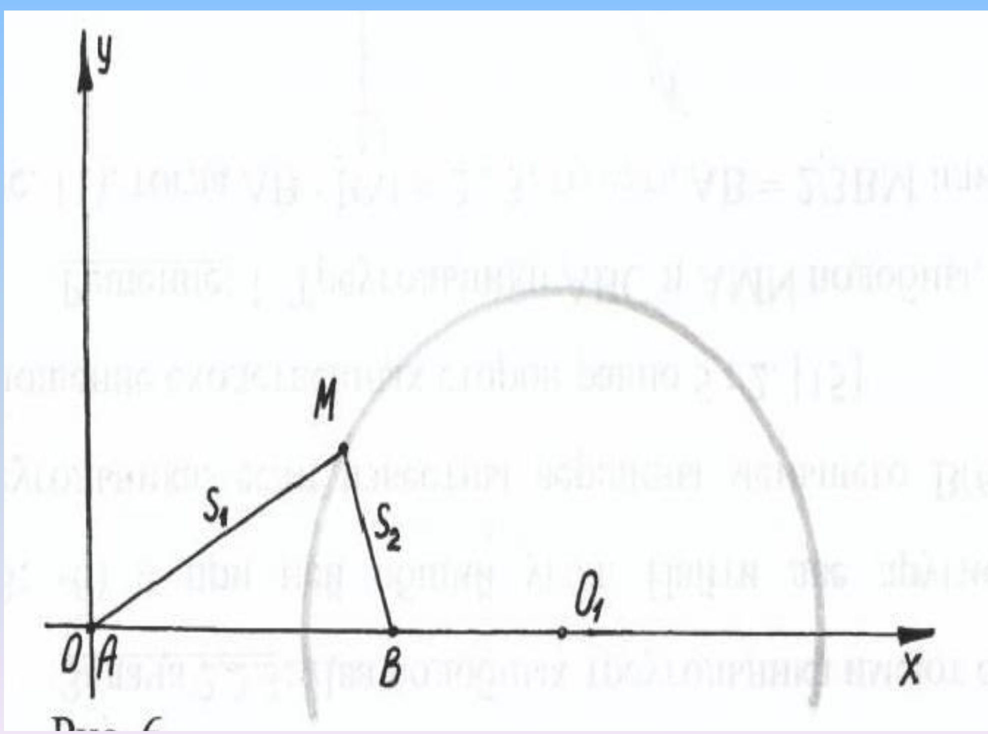
Решение: 1. Введем прямоугольную систему координат так, что A(0; 0), B(a; 0), где a = AB.

2. Найдём расстояние от произвольной точки M(x; y) до точек A и B: $AM = \sqrt{x^2 + y^2}$; $BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

3. Если точка M(x; y) принадлежит искомому множеству, то AM = 2BM или $AM^2 = 4BM^2$. Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 4((x-a)^2 + y^2)$. Если точка M(x; y) не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, полученное уравнение и есть уравнение искомого множества.

4. Преобразуя $x^2 + y^2 = 4((x-a)^2 + y^2)$, $3x^2 + 3y^2 - 8ax + 4a^2 = 0$, получаем $(x-(4/3)a)^2 + y^2 = ((2/3)a)^2$. То есть искомым множеством является окружность радиуса $(2/3)a$ с центром в точке $C((4/3)a; 0)$.

Задача 6: Два предприятия А и В производят продукцию с одной и той же ценой m за одно изделие. Однако автопарк, обслуживающий предприятие А, оснащен более современными и более мощными грузовыми автомобилями. В результате транспортные расходы на перевозку одного изделия составляют для предприятия А 10 руб. на 1 км, а для предприятия В 20 руб. на 1 км. Расстояние между предприятиями 300 км. Как территориально должен быть разделен рынок сбыта между двумя предприятиями для того, чтобы расходы потребителей при покупке изделий были минимальными?



Решение: Для решения данной задачи воспользуемся методом координат. Введем систему координат так, чтобы ось x проходила через пункты А и В, а ось y – через точку А. Пусть М – произвольная точка, М(x, y), s_1 и s_2 – расстояния от точки М до предприятий А и В.

При доставке груза из пункта А расходы равны $m + 10s_1$. При доставке груза из пункта В расходы равны $m + 20s_2$. Если для пункта М выгоднее доставлять груз с предприятия А, то $m + 10s_1 < m + 20s_2$, откуда $s_1 < 2s_2$, в обратном случае получим $s_1 > 2s_2$.

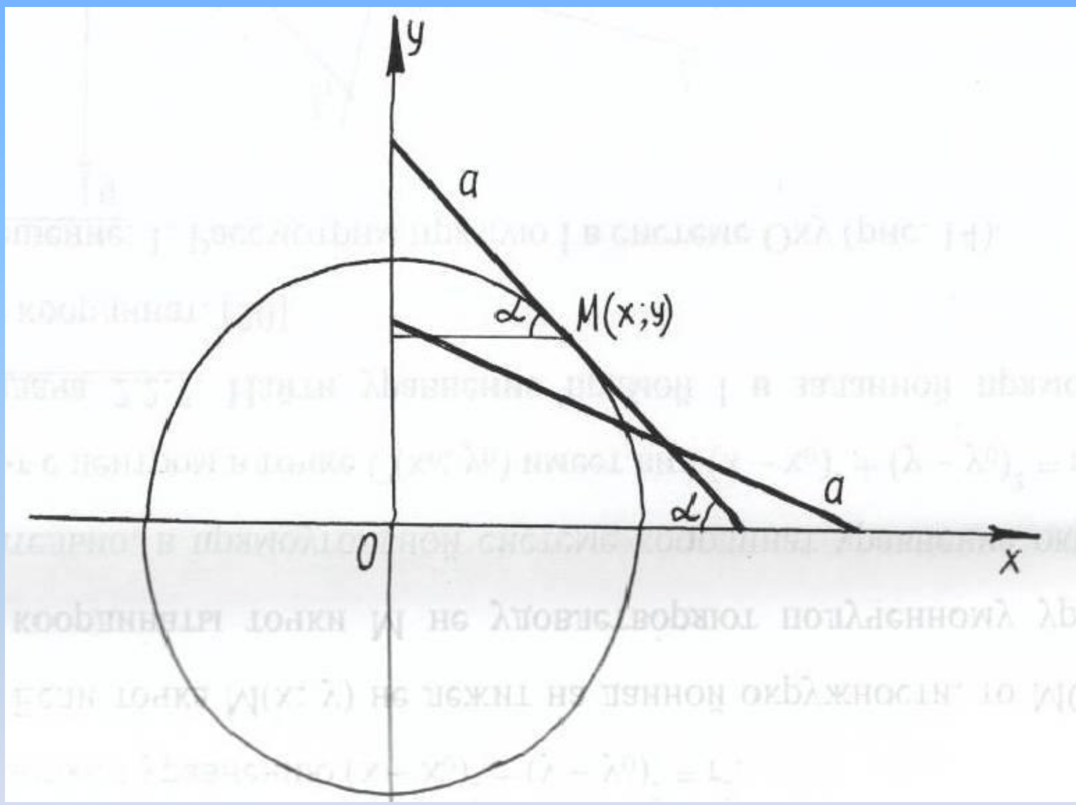
Таким образом, границей области для каждой точки, до которой расходы на перевозку груза из пунктов А и В равны, будет множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $s_1 = 2s_2$.

Выразим s_1 и s_2 через координаты: $s_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $s_2 = \sqrt{(300-x)^2 + y^2}$.

Имея в виду $s_1 = 2s_2$, получим $(x - 400)^2 + y^2 = 200^2$.

Это есть уравнение окружности. Следовательно, для всех пунктов, попадающих во внутреннюю область круга, выгоднее привозить груз из пункта В, а для всех пунктов, попадающих во внешнюю часть круга, - из пункта А.

Задача 7: Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?



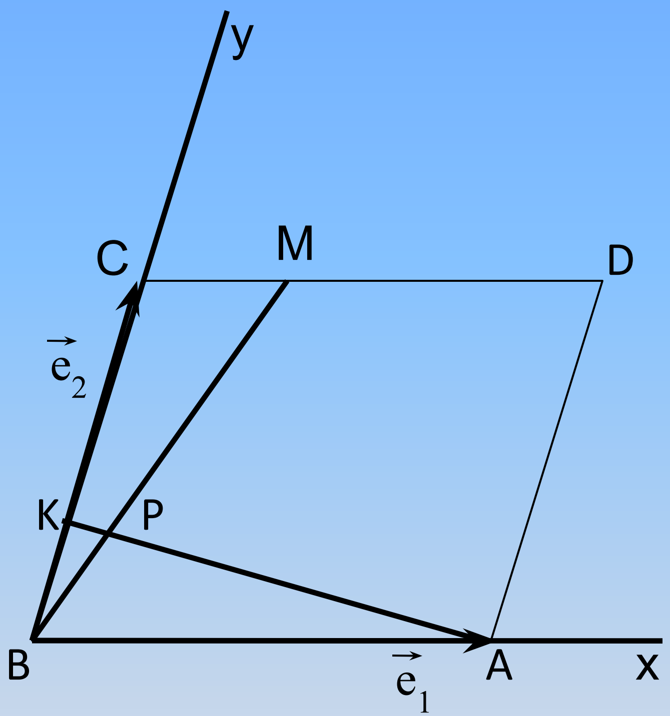
Решение: Выберем прямоугольную систему координат, где ось x находится на полу, а ось y – на стене. Допустим, что лестница имеет длину, равную 2a, тогда из рисунка видно, что точка M(x, y), находясь все время в середине лестницы, имеет координаты $x=a\cos\alpha$, $y=a\sin\alpha$.

$OM^2 = x^2 + y^2 = (a\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2 = a^2$, т.е.

$x^2 + y^2 = a^2$. Следовательно, котенок будет двигаться по дуге окружности

▪Применение аффинных координат к решению задач

Задача 8: Точки К и М делят стороны ВС и CD параллелограмма ABCD в отношении ВК:КС = 1:2, СМ:MD = 1:2. В каком отношении делятся отрезки АК и ВМ точкой пересечения?



Решение: 1. Введем аффинную систему координат с началом в точке В и координатными векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}$ (рис. 45). Тогда точки К и М имеют координаты: К(0; 1/3), М(1/3; 1).

2. Составим уравнения прямых ВМ и АК, как прямых, проходящих через две точки. Уравнения прямых ВМ и АК имеют вид: ВМ: $3x - y = 0$, АК: $x + 3y - 1 = 0$.

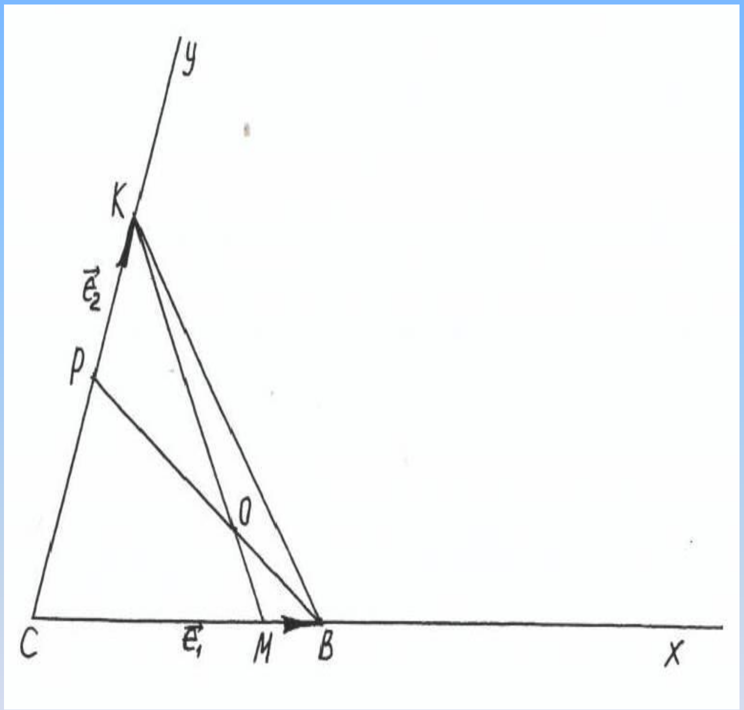
3. Найдем координаты точки Р пересечения этих прямых. Для этого решим оба уравнения в системе. Получим Р(0,1; 0,3).

4. Вычислим отношение λ, в котором точка Р делит отрезки КА и ВМ.

$\lambda_1 = (x - x_1)/(x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y) = (0{,}1 - 0)/(1 - 0{,}1) = 1/9$, т.е. точка Р делит отрезок КА в отношении 1/9.

$\lambda_2 = (x - x_1)/(x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y) = (0{,}1 - 0)/(1/3 - 0{,}1) = 3/7$, т.е. точка Р делит отрезок ВМ в отношении 3/7.

<u>Задача 9</u>: На сторонах СК и СВ треугольника СКВ взяты соответственно точки Р и М, которые делят эти стороны в отношении: СР:РК = 3:2, СМ:МВ = 4:1. В каком отношении делят друг друга отрезки КМ и ВР?



<u>Решение</u>: 1. Введем аффинную систему координат с началом в точке С и координатными векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CK}$, тогда вершины треугольника СКВ будут иметь координаты: С(0; 0), К(0; 1), В(1; 0) и Р (0;3/5), М(4/5; 0).

2. Найдем координаты точки О пересечения ВР и КМ. Для этого составим уравнения прямых ВР и КМ.

ВР: $3x + 5y – 3 = 0$, КМ: $5x + 4y – 4 = 0$.

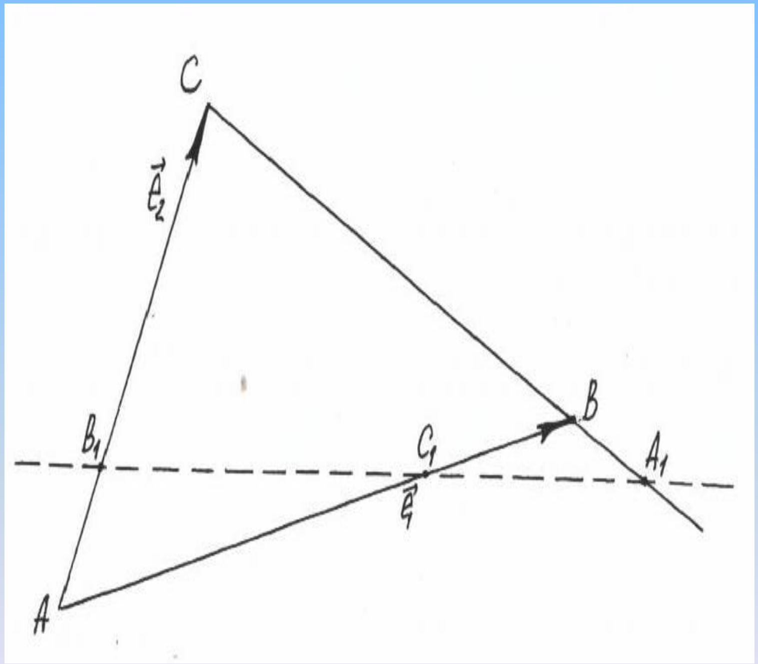
Решив в системе уравнения, получим О(8/13; 3/13).

3. Вычислим отношение λ, в котором отрезки делят друг друга.

$\lambda = (x – x_1)/(x_2 – x) = (y – y_1)/(y_2 – y) = (3/13 – 0)/(1 – 3/13) = 3/10$, т.е.точка О делит отрезок МК в отношении 3/10.

$\lambda = (x – x_1)/(x_2 – x) = (y – y_1)/(y_2 – y) = (8/13 – 1)/(0 – 8/13) = 5/8$, т.е. точка О делит отрезок ВР в отношении 5/8.

<u>Задача 10:</u> (Теорема Менелая) Для того, чтобы три точки A_1, B_1, C_1, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях), принадлежали одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{AC_1} / \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{BA_1} / \overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} / \overrightarrow{AB_1} = 1$(символом $\overline{AC_1} / \overline{BC_1}$ назовем отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой, которое положительно, если они сонаправлены, и отрицательно, если они противоположно направлены; $|\overline{AC_1} / \overline{BC_1}| = |\overline{AC_1}| / |\overline{BC_1}|$) .



<u>Решение</u>: 1. Введем аффинную систему координат с началом в точке A и координатными векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$.

2. Обозначим λ_1, λ_2, λ_3 отношения такие, что $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = \lambda_1\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = \lambda_2\overrightarrow{B_1A}$, и определим координаты точек A_1, B_1, C_1. В выбранной системе координат вершины треугольника ABC будут иметь координаты A(0; 0), B(1;0), C(0; 1). Если $A_1(x_1, y_1)$, $B_1(x_2, y_2)$, $C_1(x_3, y_3)$, то

$x_1 = (1 + \lambda_1 \cdot 0)/(1 + \lambda_1) = 1/(1 + \lambda_1)$,

$y_1 = (0 + \lambda_1 \cdot 1)/(1 + \lambda_1) = \lambda_1 /(1 + \lambda_1)$;

$x_2 = 0$, $y_2 = 1/(1 + \lambda_2)$; $x_3 = \lambda_3 /(1 + \lambda_3)$, $y_3 = 0$.

3.Для того, чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1/(1+\lambda_1) & \lambda_1/(1+\lambda_1) & 1 \\ 0 & 1/(1+\lambda_2) & 1 \\ \lambda_3/(1+\lambda_3) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда $1/(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) + \lambda_3 /(1+\lambda_3) \cdot [\, \lambda_1 /(1+\lambda_1) - 1/(1+\lambda_2)] = 0.$

После элементарных преобразований получаем: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 + 1 = 0$. Таким образом,

$\overrightarrow{AC_1} / \overrightarrow{C_1B} \cdot \overrightarrow{BA_1} / \overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{CB_1} / \overrightarrow{B_1A} = -1$ или

$\overrightarrow{AC_1} / \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{BA_1} / \overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} / \overrightarrow{AB_1} = 1.$

Возможности использования метода координат в школьной практике

Использование координатного метода в школьной практике возможно:

- На математических кружках, факультативах;
- На индивидуальных занятиях с более увлеченными математикой учащимися;
- В проектной деятельности.

Темы проектов с использованием координатного метода:

- Аффинные координаты;
- Деление отрезка в данном отношении;
- Комплекс задач, связанных с нахождением суммы квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин правильного многоугольника, которая постоянна, если центр окружности совпадает с центром многоугольника (прил. 3).

Задач планиметрии, решаемых введением системы координат, на данный момент в школьном курсе геометрии недостаточно. Метод координат на плоскости значительно упрощает решение задач.

- Решение задач, как в прямоугольных, так и в аффинных координатах на плоскости значительно упрощается, в связи с тем, что геометрическая проблема сводится к алгебраической;
- Введение системы координат позволяет находить длины отрезков, геометрические места точек и решать задачи на установление свойств фигур;
- Использование метода координат расширяет множество задач, решаемых в школе, его применение возможно в исследовательской деятельности учащихся.

Внедрение метода координат на плоскости в школьную практику необходимо.