

# Электронный учебник по геометрии

## Векторы в пространстве



Поехали



# Цели работы

- Это учебник создан для экзамена по геометрии.
- В нем рассмотрены темы 10-го класса- Векторы в пространстве, и действия над векторами в пространстве.
- Уверена вам понравится!!!

Далее

# Содержание

- Абсолютная величина и направление вектора.
- Векторы в пространстве
- Действия над векторами:
- Тест
- Об авторе



# Величина и направление вектора

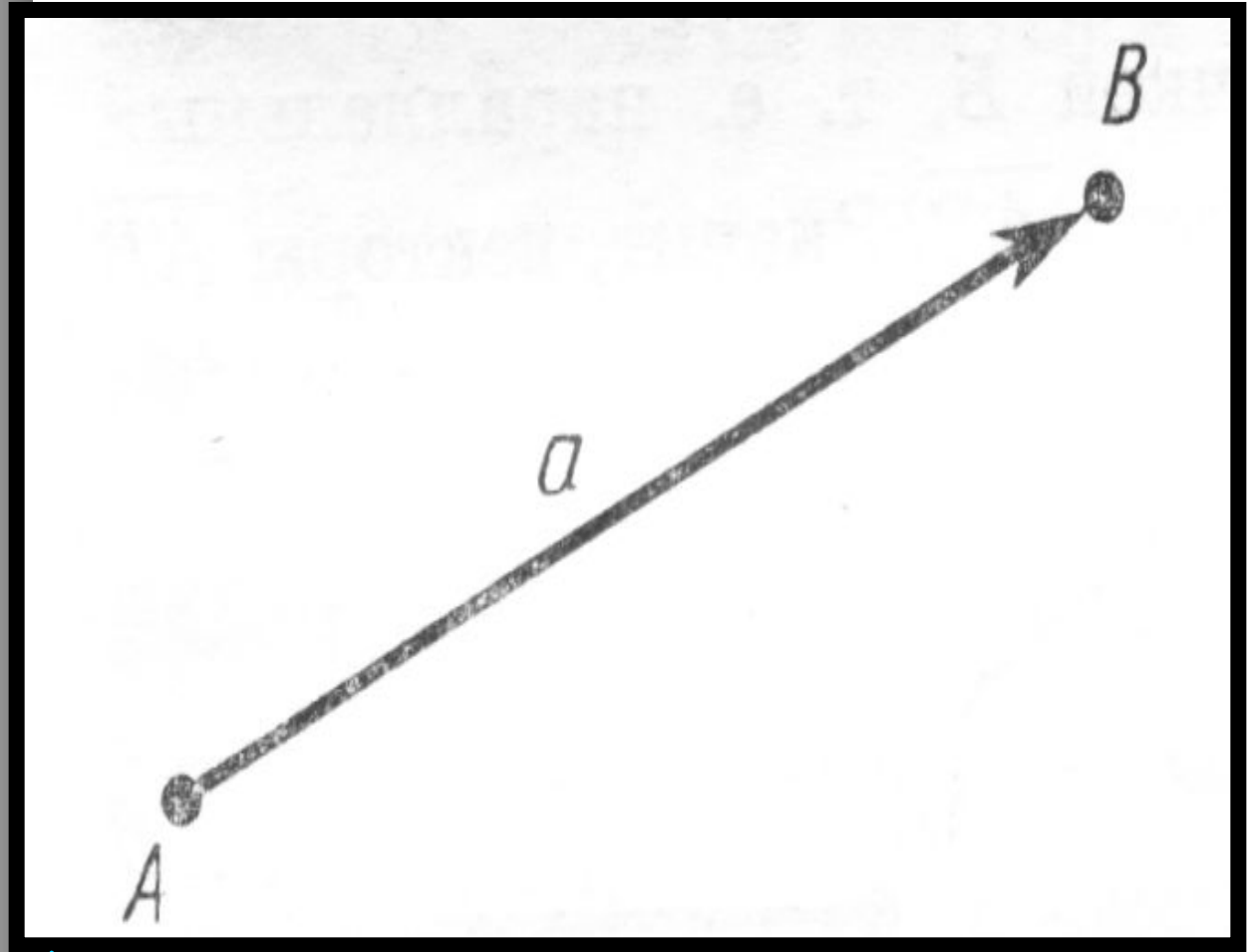
- Вектором мы будем называть направленный отрезок (рисунок 1). Направление вектора определяется указанием его начала и конца. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой. Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... . Можно также обозначить вектор указанием его начала и конца. При этом начало вектора ставится на первом месте. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора иногда ставится стрелка или черта. Вектор на рисунке 1 можно обозначить так:

или

Содержание

Далее

# Рисунок 1



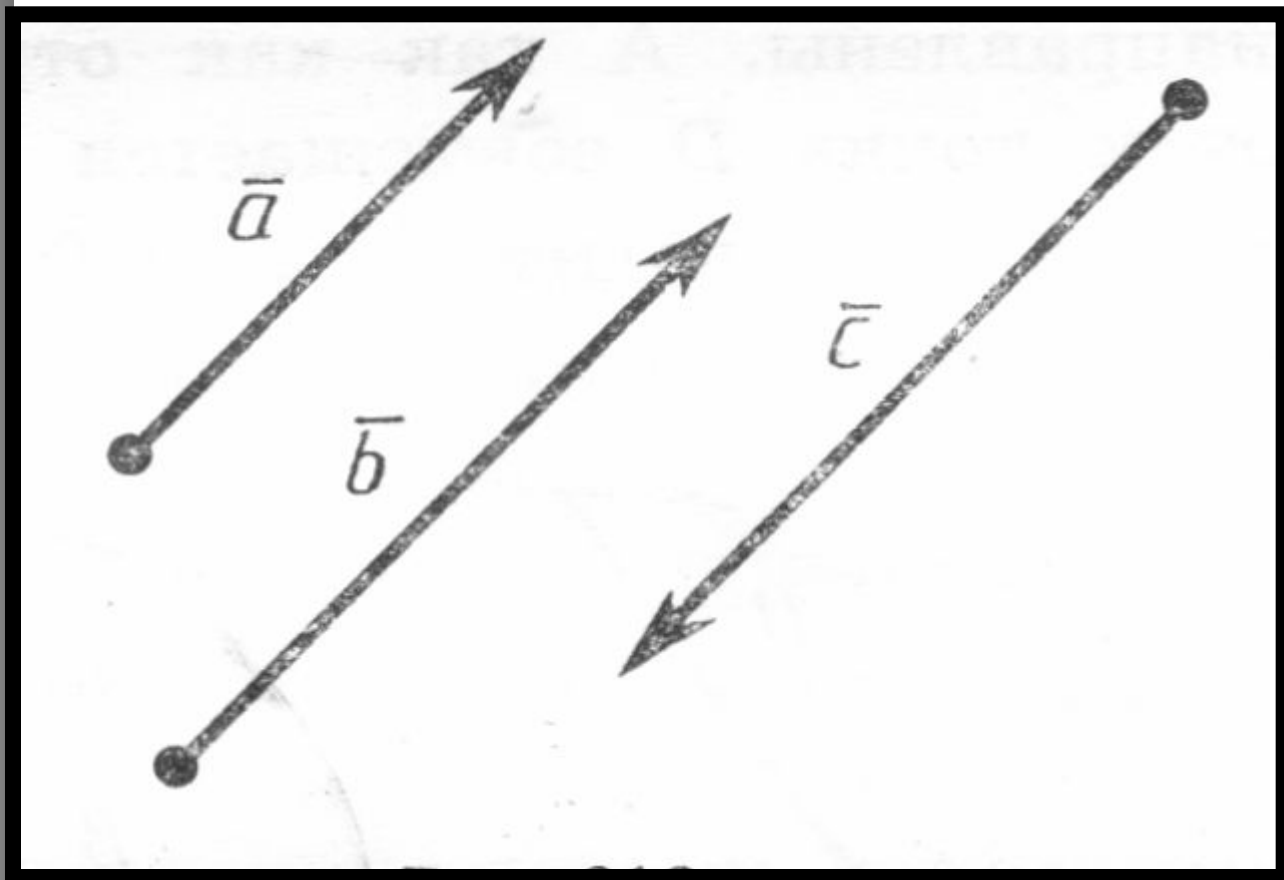
Назад

# Величина и направление вектора

- Векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называются одинаково направленными, если полупрямые  $\underline{AB}$  и  $\underline{CD}$  одинаково направлены. Векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называются противоположно направленными, если полупрямые  $\underline{AB}$  и  $\underline{CD}$  противоположно направлены. На рисунке 212 векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  одинаково направлены, а векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  противоположно направлены.
- Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора  $a$  обозначается  $|a|$ .
- Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор будем называть нулевым вектором. Нулевой вектор обозначается нулем с черточкой  $\overline{0}$ . О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю (Рисунок 2).

Назад

# Рисунок 2



Назад



# Векторы в пространстве

- В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.
- Координатами вектора с началом в точке  $A_1(x_1; y_1; z_1)$  и концом в точке  $A_2(x_2; y_2; z_2)$  называются числа  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$ ,  $z_2 - z_1$ . Так же, как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты и, наоборот, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами:  
 $a(a_1, a_2; a_3)$  или просто  $(a_1; a_2; a_3)$ .

Содержание

Задача 1



# Действия над векторами в пространстве

- Так же, как и на плоскости, определяются действия над векторами: **сложение**, **разность**, **умножение на число** и **скалярное произведение**.

## Содержание

# Сумма векторов

- Суммой векторов  $(a_1; a_2; a_3)$  и  $(b_1; b_2; b_3)$  называется вектор:  
 $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ .
- Так же, как и на плоскости, доказывается векторное равенство (доказательство):

Назад

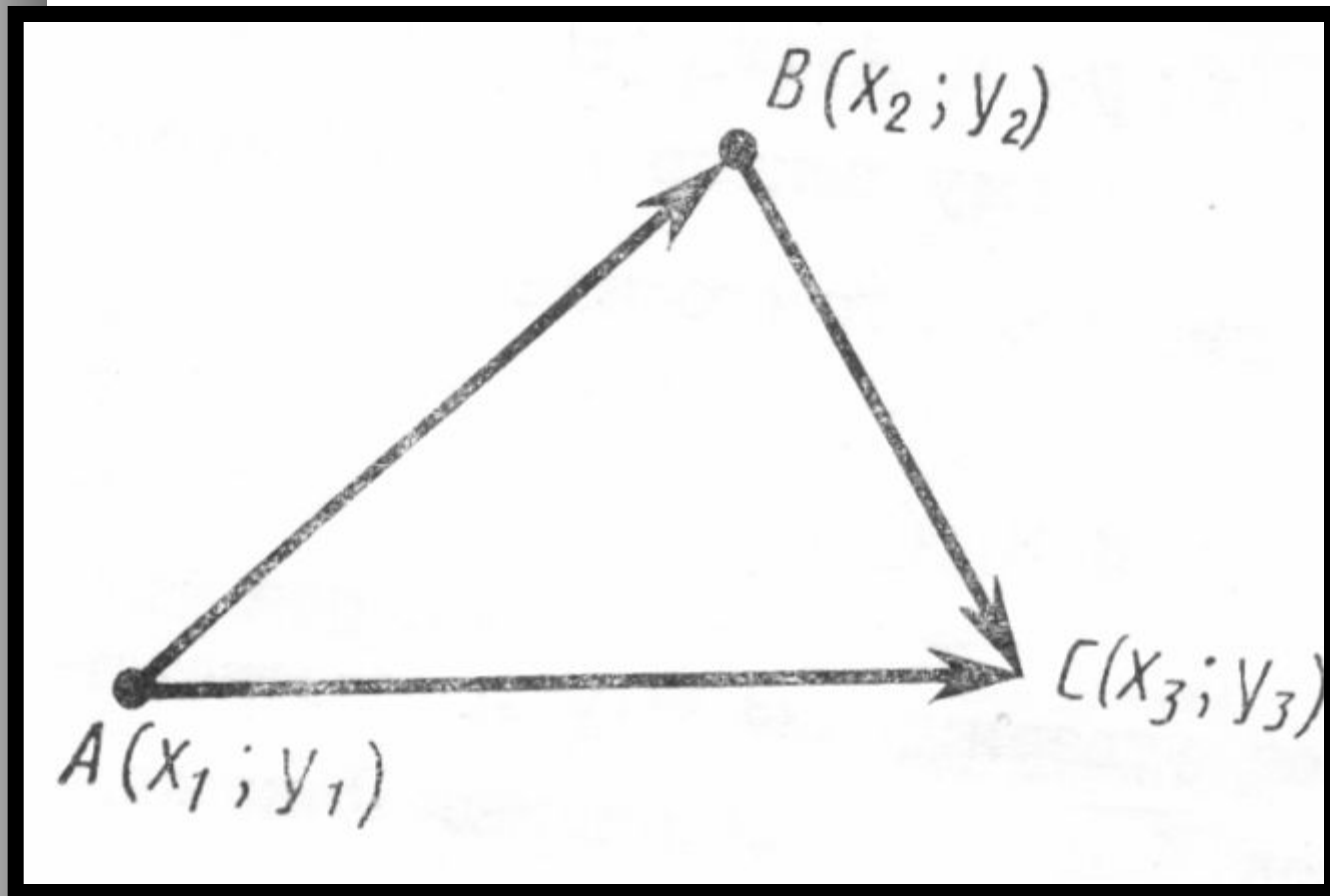
Задача 3

# Доказательство

- Пусть  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$  - данные точки (рисунок 3). Вектор  $\overline{AB}$  имеет координаты  $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ , вектор  $\overline{BC}$  имеет координаты  $x_3 - x_2, y_3 - y_2$ . Следовательно, вектор  $\overline{AB + BC}$  имеет координаты  $x_3 - x_1, y_3 - y_1$ . А это есть координаты вектора  $\overline{AC}$ . Значит, векторы  $\overline{AB + BC}$  и  $\overline{AC}$  равны. Теорема доказана.

## Назад

# Рисунок 3



Назад

# Разность векторов

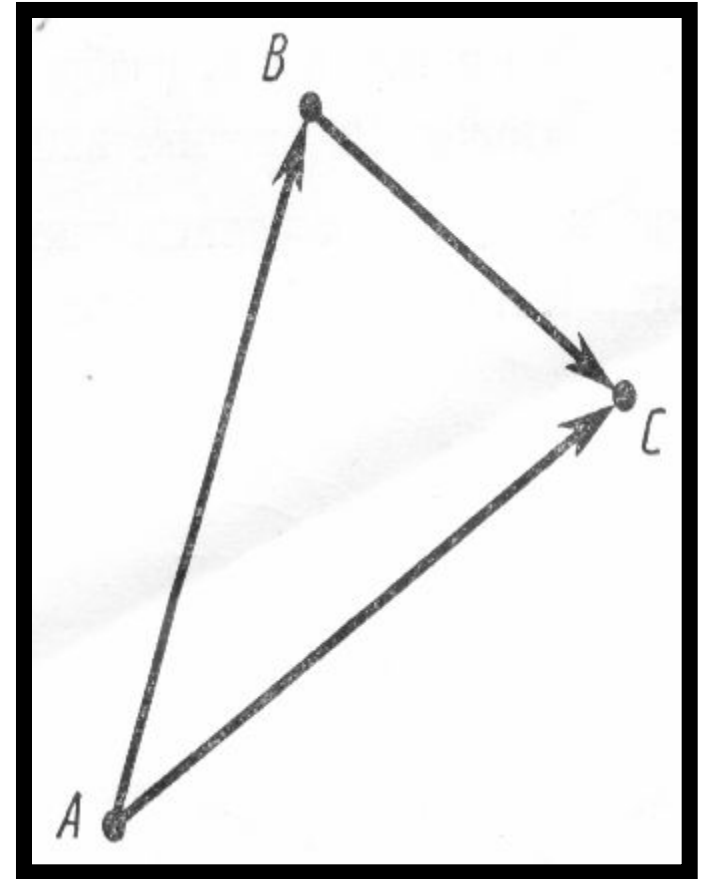
- Разностью векторов  $(a_1; a_2; a_3)$  и  $(b_1; b_2; b_3)$  называется такой вектор  $(c_1; c_2; c_3)$ , который в сумме с вектором  $(b_1; b_2; b_3)$  дает вектор  $(a_1; a_2; a_3)$ . Отсюда находим координаты вектора  $(c_1; c_2; c_3)$ :  
$$c_1 = a_1 - b_1; c_2 = a_2 - b_2; c_3 = a_3 - b_3$$

Назад

Задача 2

# Задача 2

- Дано:  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  -имеют  
общее начало
- Доказать:



Назад

Решение

# Задача 2

Решение:

Имеем  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

Рисунок

А это значит, что  $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$ .

⇒ Чтобы построить вектор,

равный *разности* векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ ,

надо отложить *равные* им векторы  $\overline{a'}$  и  $\overline{b'}$

от одной точки. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора  $\overline{b'}$ ,

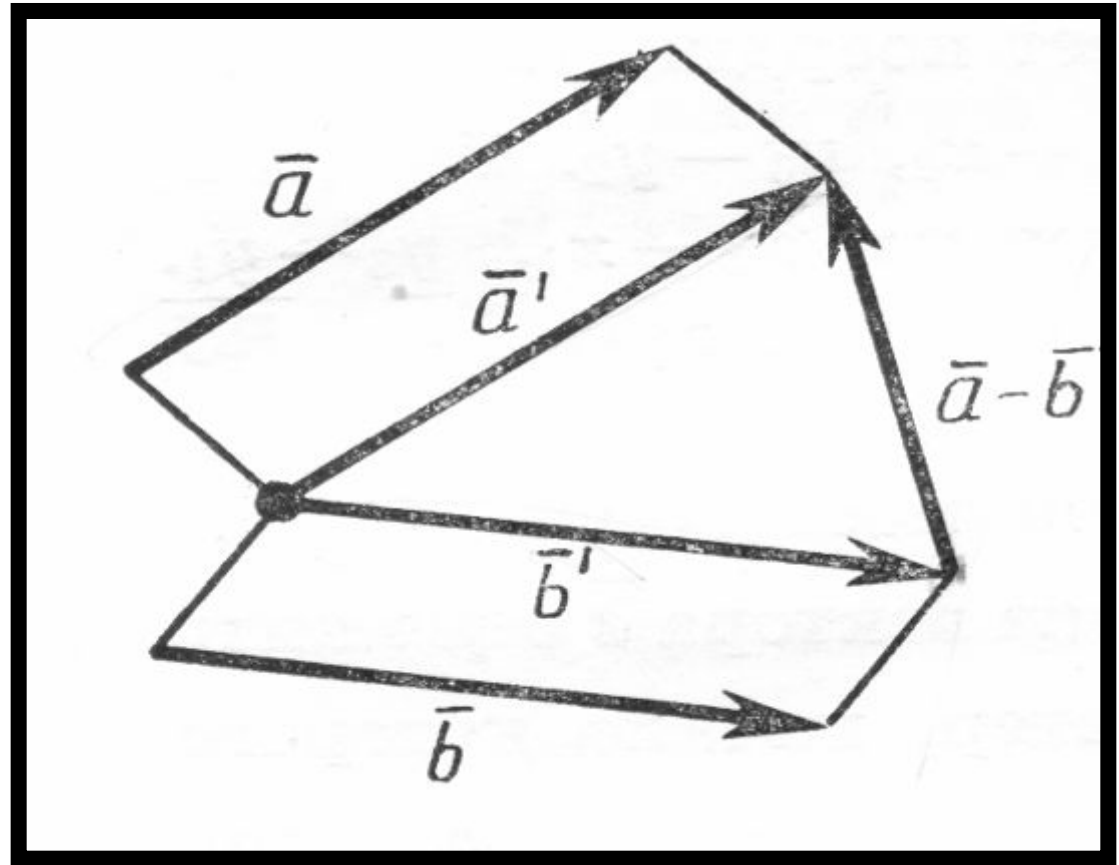
а конец - с концом вектора  $\overline{a'}$ ,

будет *разность* векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$

Назад



# Рисунок



Назад



# Задача 1

Решение:

Надо найти координаты всех векторов и сравнить эти координаты.

$$\overline{AB} : 1-2=-1, 0-7=-7, 3-(-3)=6$$

У вектора  $\overline{DC}$  такие же координаты:

$-3-(-2)=-1, -4-3=-7, 5-(-1)=6$ . Значит  $\overline{AB}$  и  $\overline{DC}$  равны. Другой парой равных векторов будут  $\overline{BC}$  и  $\overline{AD}$

■ Дано:

$$A(2;7;-3)$$

$$B(1;0;3)$$

$$C(-3;-4;5)$$

$$D(-2;3;-1)$$

■ Найти:

Среди всех векторов указать равные

Назад



# Задача 3

Дано:

$$a(1;2;3)$$

Найти:

Коллинеарный вектор  $c$  началом в точке  $A(1;1;1)$  и концом  $B$  на плоскости  $xy$ .

Назад

Решение:

Координата  $z$  точки  $B$  равна нулю.

Координаты вектора  $AB$ :  $x-1, y-1, 0-1$   $z=-1$ . Из коллинеарности векторов  $a$  и  $AB$  получаем пропорцию:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}$$

Отсюда находим координаты  $x, y$  точки  $B$ :

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$$

# Произведение вектора

- Произведением вектора  $\underline{a}(a_1; a_2; a_3)$  на число  $\lambda$  называется вектор

$$\underline{\lambda a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

- Так же, как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора  $\underline{\lambda a}$  равна  $|\lambda| |\underline{a}|$ , а направление совпадает с направлением вектора  $\underline{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположно направлению вектора  $\underline{a}$ , если  $\lambda < 0$ .

Назад

# Скалярное произведение векторов

- Скалярным произведением векторов

и называется число  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ . Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Назад

Задача 4

# Задача 4

- Дано:  
A(0;1;-1)  
B(1;-1;2)  
C(3;1;0)  
D(2;-3;1)
- Найти:  
 $\cos\varphi=?$

Решение:

Координатами вектора  $\overline{AB}$  будут:

$$1-0=1, -1-1=-2, 2-(-1)=3$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Координатами вектора  $\overline{CD}$  будут:

$$2-3=-1, -3-1=-4, 1-0=1$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$$

Значит,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{|\overline{AB}| \times |\overline{CD}|} = \frac{1(-1) = (-2)(-4) + 3 \times 1}{\sqrt{14} \times \sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{63}}$$

Назад

# ОБ АВТОРЕ

