

Электронный учебник по геометрии

Векторы в пространстве



Поехали



Цели работы

- Это учебник создан для экзамена по геометрии.
- В нем рассмотрены темы 10-го класса- Векторы в пространстве, и действия над векторами в пространстве.
- Уверена вам понравится!!!

Далее

Содержание

- Абсолютная величина и направление вектора.
- Векторы в пространстве
- Действия над векторами:
- Тест
- Об авторе



Величина и направление вектора

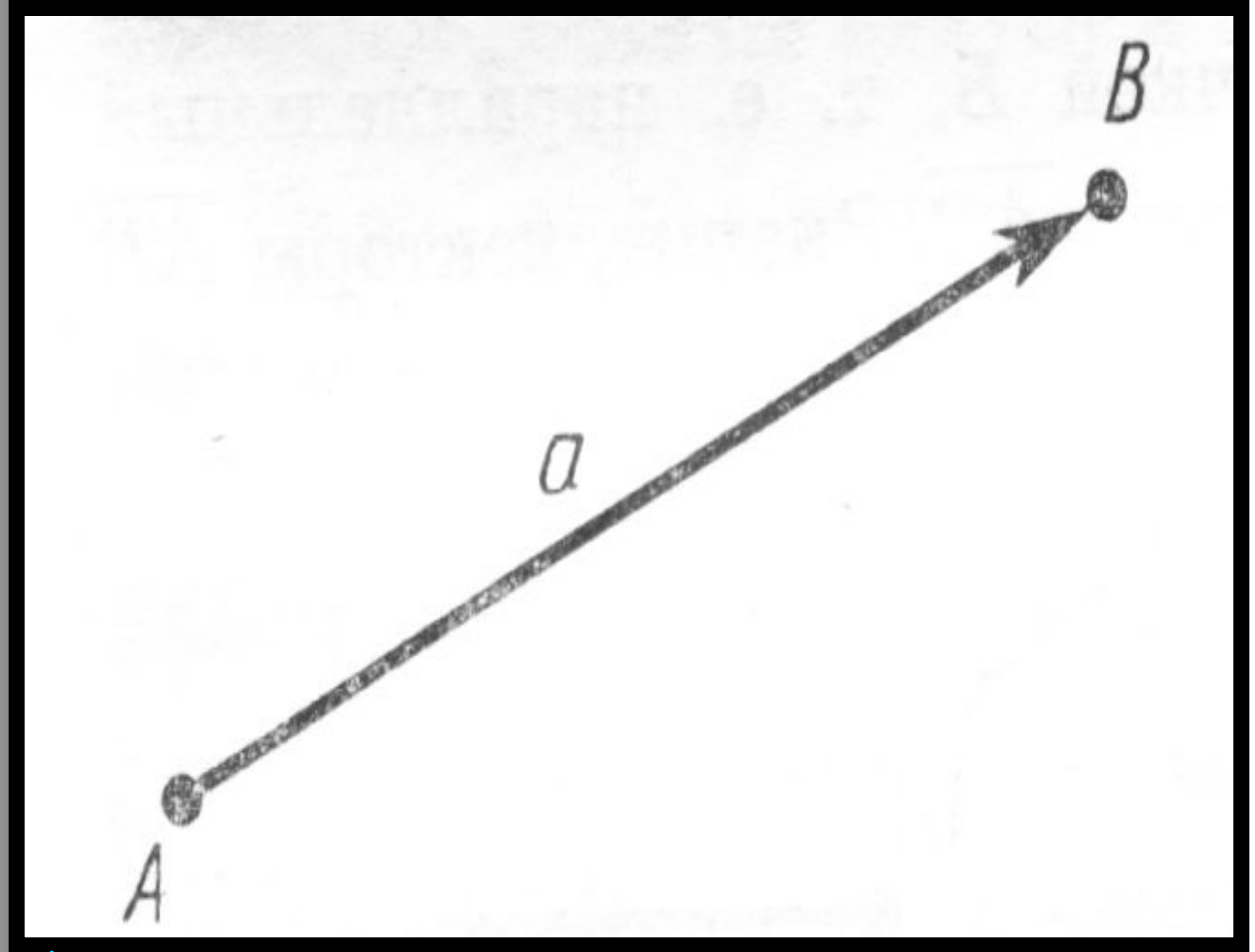
- Вектором мы будем называть направленный отрезок (рисунок 1). Направление вектора определяется указанием его начала и конца. На чертеже направление вектора отмечается стрелкой. Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами a , b , c , Можно также обозначить вектор указанием его начала и конца. При этом начало вектора ставится на первом месте. Вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора иногда ставится стрелка или черта. Вектор на рисунке 1 можно обозначить так:

или

Содержание

Далее

Рисунок 1



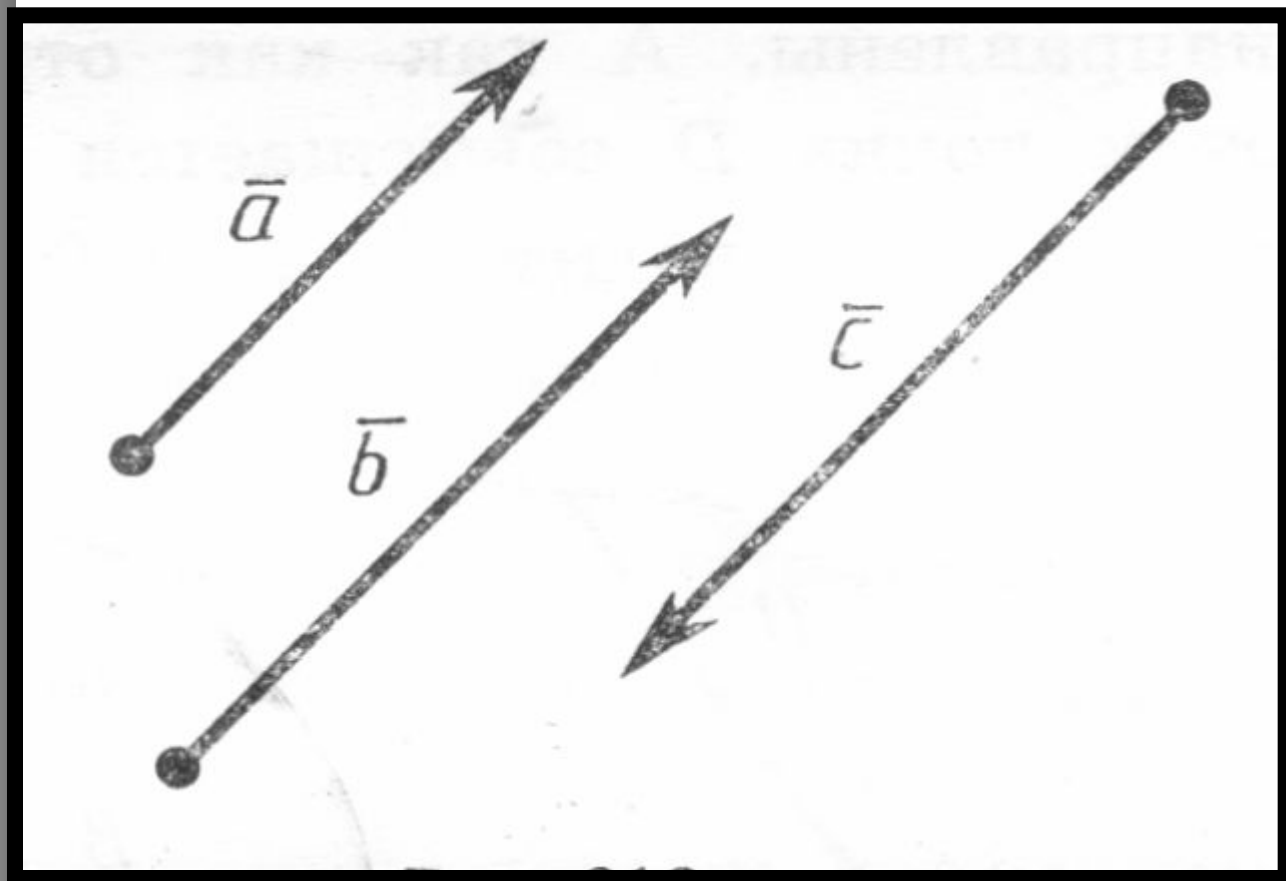
Назад

Величина и направление вектора

- Векторы \overline{AB} и \overline{CD} называются одинаково направленными, если полупрямые \underline{AB} и \underline{CD} одинаково направлены. Векторы \overline{AB} и \overline{CD} называются противоположно направленными, если полупрямые \underline{AB} и \underline{CD} противоположно направлены. На рисунке 212 векторы \overline{AB} и \overline{CD} одинаково направлены, а векторы \overline{AB} и \overline{CD} противоположно направлены.
- Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора \overline{a} обозначается $|\overline{a}|$.
- Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор будем называть нулевым вектором. Нулевой вектор обозначается нулем с черточкой $\overline{0}$. О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю (Рисунок 2).

Назад

Рисунок 2



Назад

Векторы в пространстве

- В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.
- Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Так же, как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты и, наоборот, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами:
 $a(a_1, a_2; a_3)$ или просто $(a_1; a_2; a_3)$.

Содержание

Задача 1

Действия над векторами в пространстве

- Так же, как и на плоскости, определяются действия над векторами: **сложение**, **разность**, **умножение на число** и **скалярное произведение**.

Содержание

Сумма векторов

- Суммой векторов $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$ называется вектор:
 $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.
- Так же, как и на плоскости, доказывается векторное равенство (доказательство):

Назад

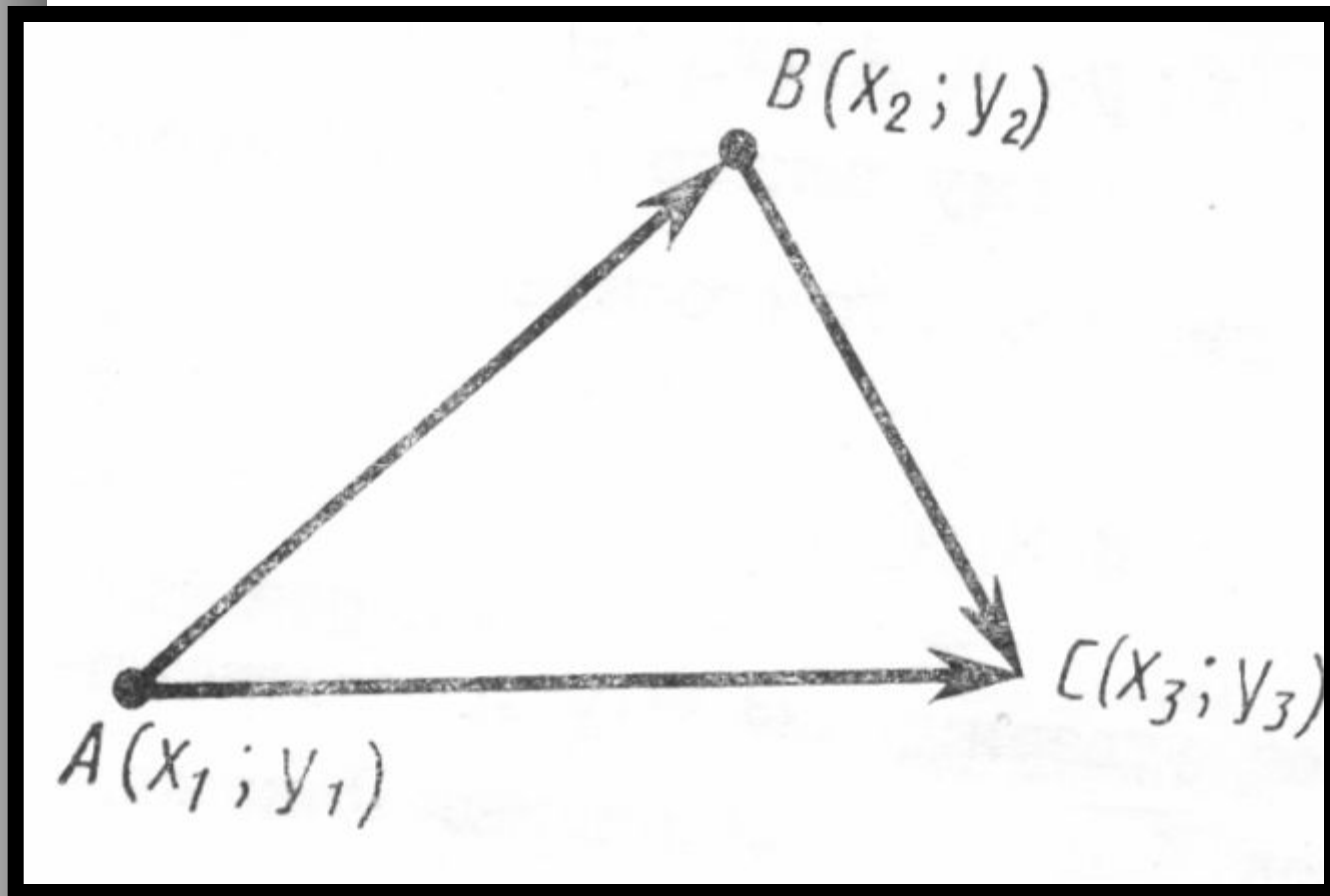
Задача 3

Доказательство

- Пусть $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ - данные точки (рисунок 3). Вектор \overline{AB} имеет координаты $x_2 - x_1, y_2 - y_1$, вектор \overline{BC} имеет координаты $x_3 - x_2, y_3 - y_2$. Следовательно, вектор $\overline{AB + BC}$ имеет координаты $x_3 - x_1, y_3 - y_1$. А это есть координаты вектора \overline{AC} . Значит, векторы $\overline{AB + BC}$ и \overline{AC} равны. Теорема доказана.

Назад

Рисунок 3



Назад

Разность векторов

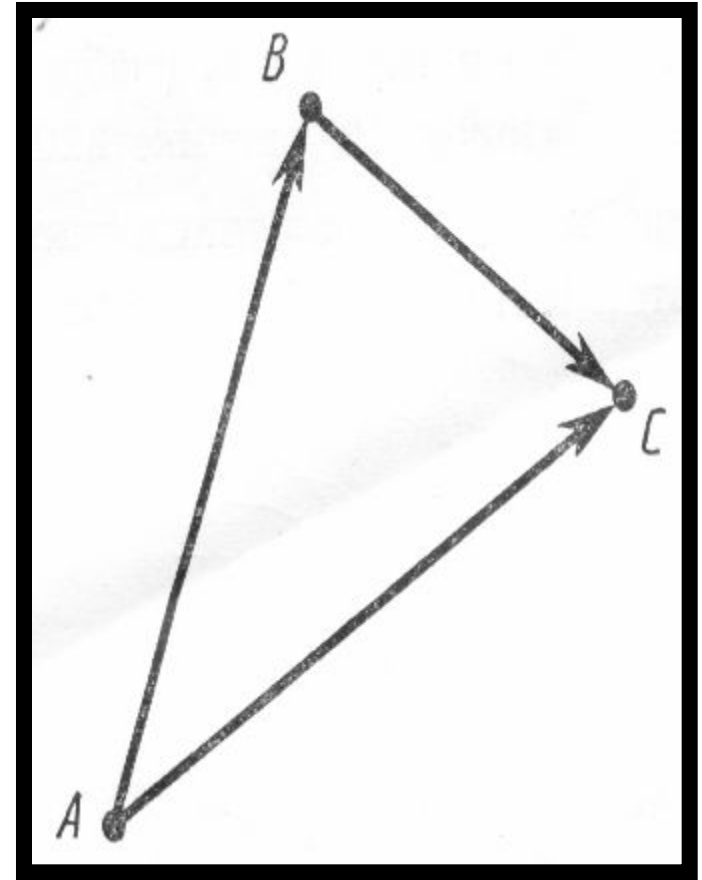
- Разностью векторов $(a_1; a_2; a_3)$ и $(b_1; b_2; b_3)$ называется такой вектор $(c_1; c_2; c_3)$, который в сумме с вектором $(b_1; b_2; b_3)$ дает вектор $(a_1; a_2; a_3)$. Отсюда находим координаты вектора $(c_1; c_2; c_3)$:
$$c_1 = a_1 - b_1; c_2 = a_2 - b_2; c_3 = a_3 - b_3$$

Назад

Задача 2

Задача 2

- Дано: \vec{a} и \vec{b} -имеют
общее начало
- Доказать:



Назад

Решение

Задача 2

Решение:

Имеем $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Рисунок

А это значит, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

⇒ Чтобы построить вектор,

равный *разности* векторов \overline{a} и \overline{b} ,

надо отложить *равные* им векторы $\overline{a'}$ и $\overline{b'}$

от одной точки. Тогда вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\overline{b'}$,

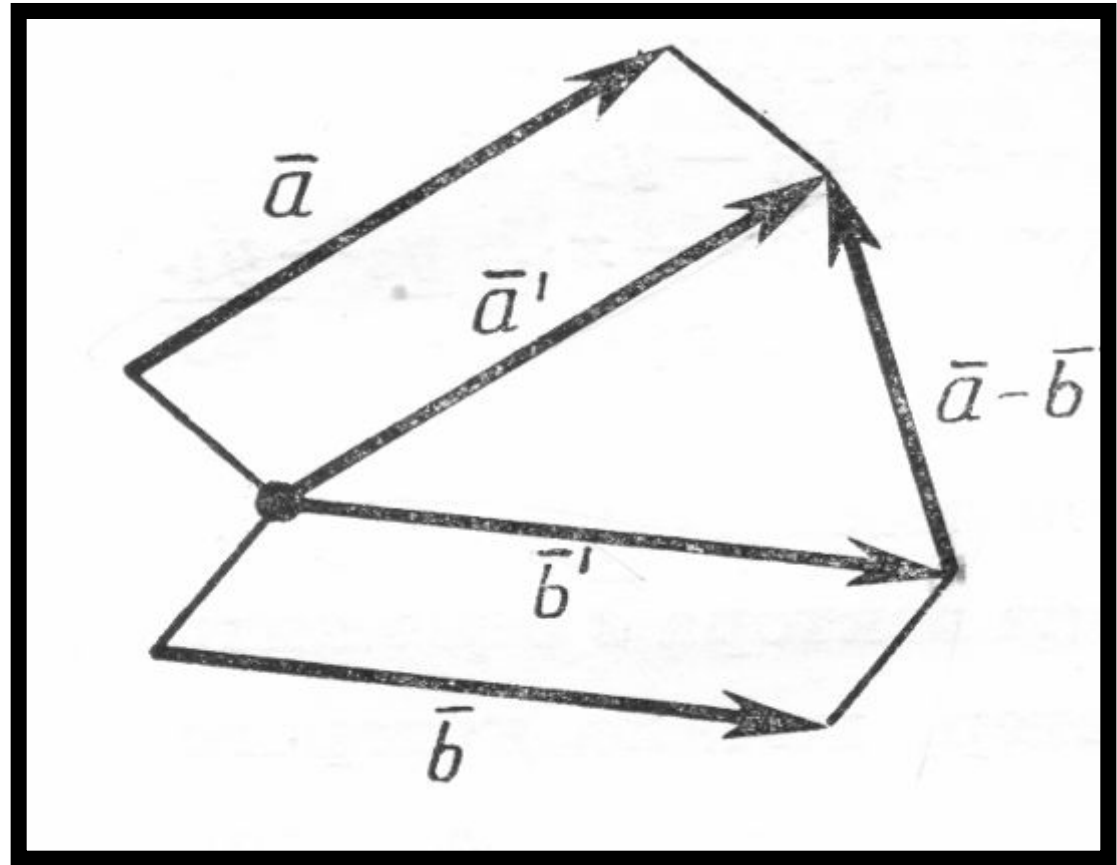
а конец - с концом вектора $\overline{a'}$,

будет *разность* векторов \overline{a} и \overline{b}

Назад



Рисунок



Назад

Задача 1

Решение:

Надо найти координаты всех векторов и сравнить эти координаты.

$$\overline{AB} : 1-2=-1, 0-7=-7, 3-(-3)=6$$

У вектора \overline{DC} такие же координаты:

$-3-(-2)=-1, -4-3=-7, 5-(-1)=6$. Значит \overline{AB} и \overline{DC} равны. Другой парой равных векторов будут \overline{BC} и \overline{AD}

■ Дано:

$$A(2;7;-3)$$

$$B(1;0;3)$$

$$C(-3;-4;5)$$

$$D(-2;3;-1)$$

■ Найти:

Среди всех векторов указать равные

Назад



Задача 3

■ Дано:

$$a(1;2;3)$$

■ Найти:

Коллинеарный вектор c началом в точке $A(1;1;1)$ и концом B на плоскости xOy .

Назад

Решение:

Координата z точки B равна нулю.

Координаты вектора AB : $x-1, y-1, 0-1$ $z=-1$. Из коллинеарности векторов a и AB получаем пропорцию:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}$$

Отсюда находим координаты x, y точки B :

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$$

Произведение вектора

- Произведением вектора $\underline{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ называется вектор

$$\underline{\lambda a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

- Так же, как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\underline{\lambda a}$ равна $|\lambda| |\underline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора \underline{a} , если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора \underline{a} , если $\lambda < 0$.

Назад

Скалярное произведение векторов

- Скалярным произведением векторов

и называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Назад

Задача 4

Задача 4

- Дано:
A(0;1;-1)
B(1;-1;2)
C(3;1;0)
D(2;-3;1)
- Найти:
 $\cos\varphi=?$

Решение:

Координатами вектора \overline{AB} будут:

$$1-0=1, -1-1=-2, 2-(-1)=3$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Координатами вектора \overline{CD} будут:

$$2-3=-1, -3-1=-4, 1-0=1$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$$

Значит,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{|\overline{AB}| \times |\overline{CD}|} = \frac{1(-1) = (-2)(-4) + 3 \times 1}{\sqrt{14} \times \sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{63}}$$

Назад

ОБ АВТОРЕ

