КОРЕНЬ *n* – ой СТЕПЕНИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ *n* – ой СТЕПЕНИ, ЕГО СВОЙСТВА.

Задачи урока:

- систематизировать и обобщить знания о корнях;
- продолжить формирование навыков применения свойств корней при решении задач и для простейших вычислений;
- продолжить формирование навыков простейших преобразований выражений с корнями; выполнения действий над корнями.

Понятие корня

Корнем n-й степени из числа а называется такое число b, n-я степень которого равна а ($n \geq 2$). Обозначается $\sqrt[n]{a}$, где а - подкоренное выражение (или число), n - показатель корня ($n \geq 2$; $n \in N$).

По определению $\sqrt[n]{a} = b$, если b в степени n равно а, или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Основные свойства корня

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

$$\sqrt{49} = \pm 7$$

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

$$\sqrt{-9} \neq 3; \sqrt{-9} \neq -3$$

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

$$\sqrt[3]{8} = +2$$

Основные свойства корня

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Понятие арифметического корня

Арифметическим корнем n–й степени из неотрицательного числа а называется неотрицательное число, n–я степень которого равна а . Корень называется арифметическим, если он извлекается из положительного числа и сам представляет собой положительное число.

Например,

$$\sqrt{49} = 7;\ \sqrt{49} \neq -7$$

Арифметический корень данной степени из данного числа может быть только один.

Арифметический корень тесно связан с понятием абсолютной величины (модуля) числа, а именно:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a\,, \text{ при } a > 0\,, \\ 0\,, \text{ при } a = 0\,, \\ -a\,, \text{ при } a < 0\,. \end{cases}$$

Свойства арифметических корней

Чтобы извлечь арифметический корень из произведения, можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{225} = \sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$$

Чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь его из числителя и знаменателя отдельно

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Чтобы извлечь корень из степени, можно разделить показатель степени на показатель корня

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[3]{x^{12}} = x^{\frac{12}{3}} = x^4$$

Действия с корнями:

Величина корня не изменится, если его показатель увеличить в n раз и одновременно возвести подкоренное значение в степень n:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m\cdot n]{a^n}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4\cdot\frac{1}{2}]{4^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Действия с корнями:

Величина корня не изменится, если показатель степени уменьшить в n раз и одновременно извлечь корень n -й степени из подкоренного значения:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[\frac{4}{2}]{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

Действия с корнями:

Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное значение

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\left(\sqrt{4}\right)^4 = \sqrt{4^4} = 4^{\frac{4}{2}} = 4^2 = 16$$

Действия с корнями:

Обратно, чтобы извлечь корень из степени, достаточно возвести в эту степень корень из основания степени:

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

$$\sqrt{4^4} = \left(\sqrt{4}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Внесение множителя под знак квадратного корня

$b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 a}$, если $b \geq 0$; $b\sqrt{a} = -\sqrt{b^2 a}$, если $b < 0$

Например, $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}$

Вынесение множителя из – под знака квадратного корня

$\sqrt{b^2a} = b\sqrt{a}$, если $b \geqslant 0$, $a \geqslant 0$;

$\sqrt{b^2a} = -b\sqrt{a}$, если $b < 0$, $a \geqslant 0$

$\sqrt{b^2a} = |b|\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Подведем итоги:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a};$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$

$(\sqrt[n]{a^n}) = a \quad (a \geq 0);$

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},\ \textit{если}\ 0 \leq a \leq b;$

$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \textit{при}\ a \geq 0 \\ -a, \textit{при}\ a < 0 \end{cases}$

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$

$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$