



## Кратные интегралы

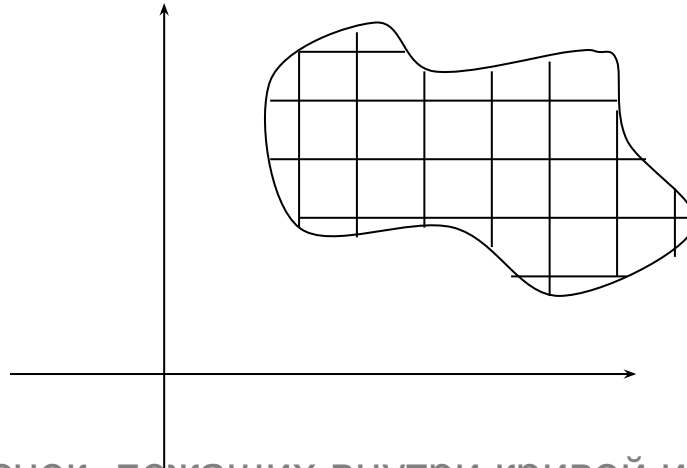
Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производиться неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов.

Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения **двойных интегралов**.



# Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой  $f(x, y) = 0$ .



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью  $\Delta$ . Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называться незамкнутой областью  $\Delta$ .

С геометрической точки зрения  $\Delta$  - площадь фигуры, ограниченной контуром.



Разобьем область  $\Delta$  на  $n$  частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси  $x$  на расстояние  $\Delta x_i$ , а по оси  $y$  – на  $\Delta y_i$ . Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь  $S$  делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны  $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ . В каждой частичной области возьмем произвольную точку и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где  $f$  – функция непрерывная и однозначная для всех точек области  $\Delta$ .  $P(x_i, y_i)$

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей  $\Delta_i$ , тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка  $S_i$  стремится к нулю.



# Определение

Если при стремлении к нулю шага разбиения области  $\Delta$  интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции  $f(x, y)$  по области  $\Delta$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint f(x, y) dx dy$$

учетом того, что  $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$  получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака  $\Sigma$ , т.к. суммирование производится по двум переменным  $x$  и  $y$ .

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек  $P_i$ , то, считая все площади  $S_i$  одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x$$



# Условия существования двойного интеграла

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла

*Теорема.* Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $\Delta$ , то двойной интеграл *существует*.



## Теорема

*Если функция  $f(x, y)$  ограничена в замкнутой области  $\Delta$  и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл **существует**.*



# Свойства двойного интеграла.

$$1) \iint_{\Delta} [f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)] dy dx = \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx + \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx - \iint_{\Delta} f_3(x, y) dy dx$$

$$2) \iint_{\Delta} k f(x, y) dy dx = k \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx$$

$$3) \text{ Если } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \text{ то } \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \iint_{\Delta_1} f(x, y) dy dx + \iint_{\Delta_2} f(x, y) dy dx$$

4) **Теорема о среднем.** Двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$5) \text{ Если } f(x, y) \geq 0 \text{ в области } \Delta, \text{ то } \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = f(x_0, y_0) \cdot S$$

$$6) \text{ Если } f_1(x, y) \leq f_2(x, y), \text{ то } \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx$$

$$7) \left| \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dy dx \quad \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx$$



# Вычисление двойного интеграла

## Теорема

*Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $\Delta$ , ограниченной линиями  $x = a$ ,  $x = b$ , ( $a < b$ ),  $y = \phi(x)$ ,  $y = \psi(x)$ , где  $\phi$  и  $\psi$  - непрерывные функции и  $\phi \leq \psi$ , тогда*

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$





## Теорема.

*Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой области  $\Delta$ , ограниченной линиями  $y = c$ ,  $y = d$  ( $c < d$ ),  $x = \Phi(y)$ ,  $x = \Psi(y)$  ( $\Phi(y) \leq \Psi(y)$ ), то*

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx$$



# Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим двойной интеграл вида , где переменная  $x$  изменяется в пределах от  $a$  до  $b$ , а переменная  $y$  от  $\varphi_1(x)$  до  $\varphi_2(x)$

Положим  $x = f(u, v)$   $y = \varphi(u, v)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv ; dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$
$$\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x, y) dy$$



т.к. при первом интегрировании  
переменная  $x$  принимается за

постоянную, то  $dx = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0 \quad du = -\frac{\partial f / \partial v}{\partial f / \partial u} \cdot dv$$

подставляя это выражение в записанное  
выше соотношение для  $dy$ , получаем:

$$dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f / \partial v}{\partial f / \partial u} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \cdot dv$$



Выражение называется **определителем Якоби** или **Якобианом** функций  $f(u, v)$   $\varphi(u, v)$   
(Якоби Карл Густав Якоб – (1804-1851) – немецкий математик)

Тогда

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x, y), \varphi(x, y)) \cdot \frac{|j|}{\partial f / \partial u} dv$$

Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для  $dx$  принимает вид (при первом интегрировании полагаем  $v = const, dv = 0$ ), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int_{V_1}^{V_2} dv \int_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u, v), \varphi(u, v)) \cdot |j| \cdot du$$



# Двойной интеграл в полярных координатах.

Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} F(f(u, v), \varphi(u, v)) |i| du dv$$

При этом известно, что 
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

В этом случае Якобиан имеет вид:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

Тогда

$$\iint_{\Delta} F(x, y) dx dy = \iint_{\tau} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \iint_{\tau} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Здесь  $\tau$  - новая область значений,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$