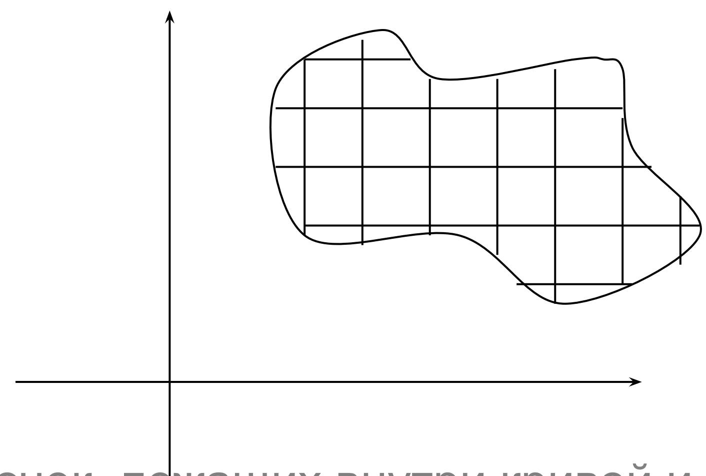
Кратные интегралы

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i . Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

В каждой частичной области возьмем произвольную точку и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек $P(x_i, y_i)$ области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δi, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка Si стремится к нулю.

Определение

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

учетом того, что $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\sum_{\Delta} f(x,y)\Delta y\Delta x$$

Условия существования двойного интеграла

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла

Теорема. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл существует.

Теорема

Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл существует.

Свойства двойного интеграла.

1) $\iint\limits_{\Delta}[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx=\iint\limits_{\Delta}f_1(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta}f_2(x,y)dydx-\iint\limits_{\Delta}f_3(x,y)dydx$

2) $\iint\limits_{\Delta}kf(x,y)dydx=k\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx$

3) Если Δ = Δ1 + Δ2, то $\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx=\iint\limits_{\Delta_1}f(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta_2}f(x,y)dydx$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx=f(x_0,y_0)\cdot S$

6) Если f1(x, y) ≤ f2(x, y), то $\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx\geq 0$

7) $\left|\iint\limits_{\Delta}f(x,y)dydx\right|\leq\iint\limits_{\Delta}|f(x,y)|dydx$ $\iint\limits_{\Delta}f_1(x,y)dydx\leq\iint\limits_{\Delta}f_2(x,y)dydx$

Вычисление двойного интеграла

Теорема

Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = ϕ(x), y = ψ(x), где ϕ и ψ - непрерывные функции и

ϕ ≤ ψ, тогда

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

Теорема.

Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\,dx$$

Замена переменных в двойном интеграле

Расмотрим двойной интеграл вида , где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y от $\varphi_{1(x)}$ до $\varphi_{2(x)}$

Положим $x = f(u,v)$ $y = \varphi(u,v)$

Тогда ;

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad ; \quad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\,dy$$

т.к. при первом интегрировании переменная x принимается за постоянную, то $dx = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0 \qquad du = -\frac{\partial f / \partial v}{\partial f / \partial u} \cdot dv$$

подставляя это выражение в записанное выше соотношение для dy, получаем:

$$dy = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f / \partial v}{\partial f / \partial u} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}} \cdot dv$$

Выражение называется **определителем** **...коби** или **Якобианом** функций $f(u,v)$ и $\varphi(u,v)$

(Якоби Карл Густав Якоб – (1804-1851) – немецкий математик)

Тогда

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x,y),\varphi(x,y)) \cdot \frac{|i|}{\partial f / du} dv$$

Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид (при первом интегрировании полагаем $v = const, dv = 0$), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u,v),\varphi(u,v)) \cdot |i| \cdot du$$

Двойной интеграл в полярных координатах.

Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,dudv$$

При этом известно, что
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

В этом случае Якобиан имеет вид:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin\theta = \rho$$

Тогда
$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

Здесь τ - новая область значений,
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \theta = arctg\frac{y}{x};$$