Кривые второго порядка

Лекция 11

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат x и y.

Окружность

Окружностью называетсяся множество точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки плоскости, называемой центром окружности.

Уравнение окружности

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2$$

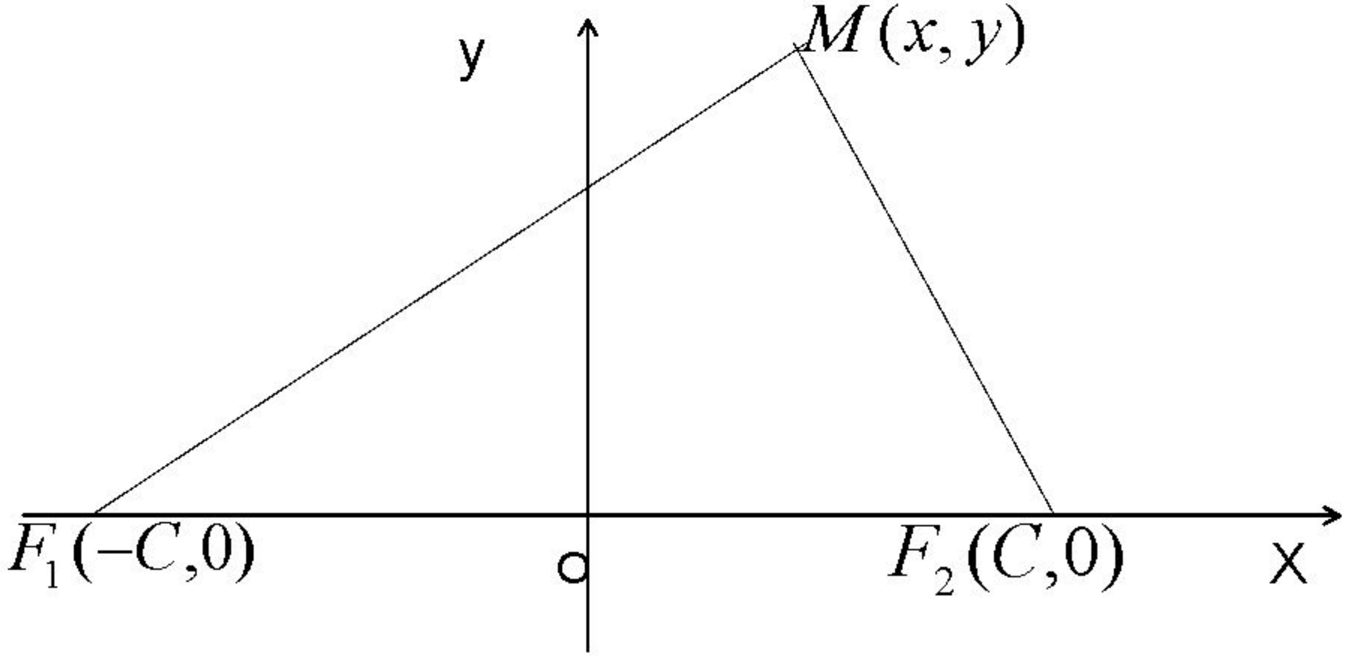
$$\left(x_0; y_0\right) - \text{öåí ò ð}$$

$$R - \text{ðàäèóñ}$$

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек (плоскости), сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами этого эллипса, есть величина постоянная.

•



y
$M(x, y)$
$F_1(-C,0)$
o
$F_2(C,0)$
X

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$a \geq b > 0$$

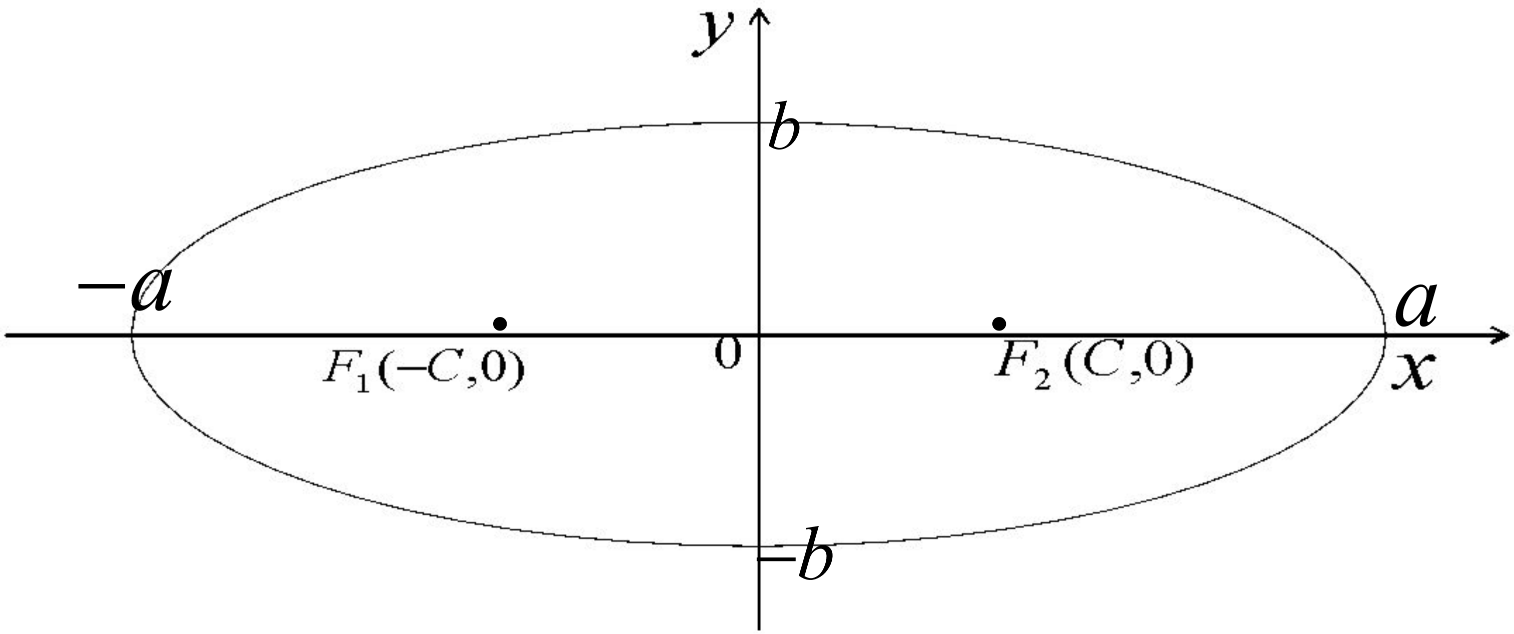
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1.$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Эллипс



Оси симметрии эллипса называются его осями, точка их пересечения- центром эллипса, ось, на которой находятся фокусы (в данном случае это ось абсцисс) называется фокальной осью.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса. Это точки с координатами

$$(a,0), (-a,0), (0, b), (0,-b).$$

Числа a, b называются полуосями эллипса.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $\varepsilon < 1$

называется эксцентриситетом эллипса и характеризует его форму, ничего не говоря о его размерах. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше подкоренное выражение в числителе дроби, тем меньше малая полуось отличается от большой и , значит, тем меньше эллипс вытянут вдоль фокальной оси.

Замечание

Если $b > a$,то фокальной осью является $2b$

Фокусы : $F_1(0;-c)$ $F_2(0;c)$

$$b^2 - c^2 = a^2$$

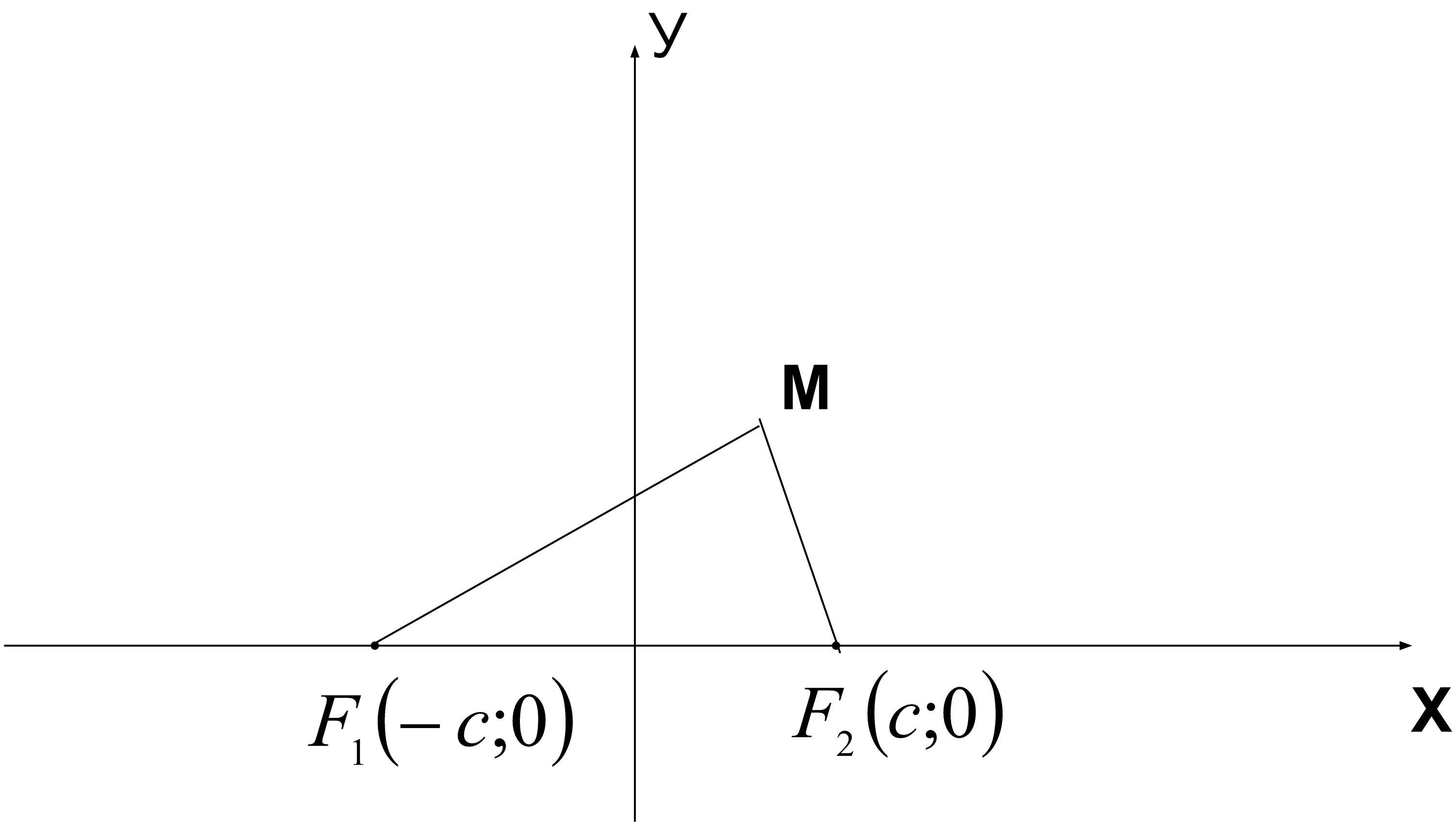
$$\varepsilon = \frac{c}{b}$$

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Y

Y

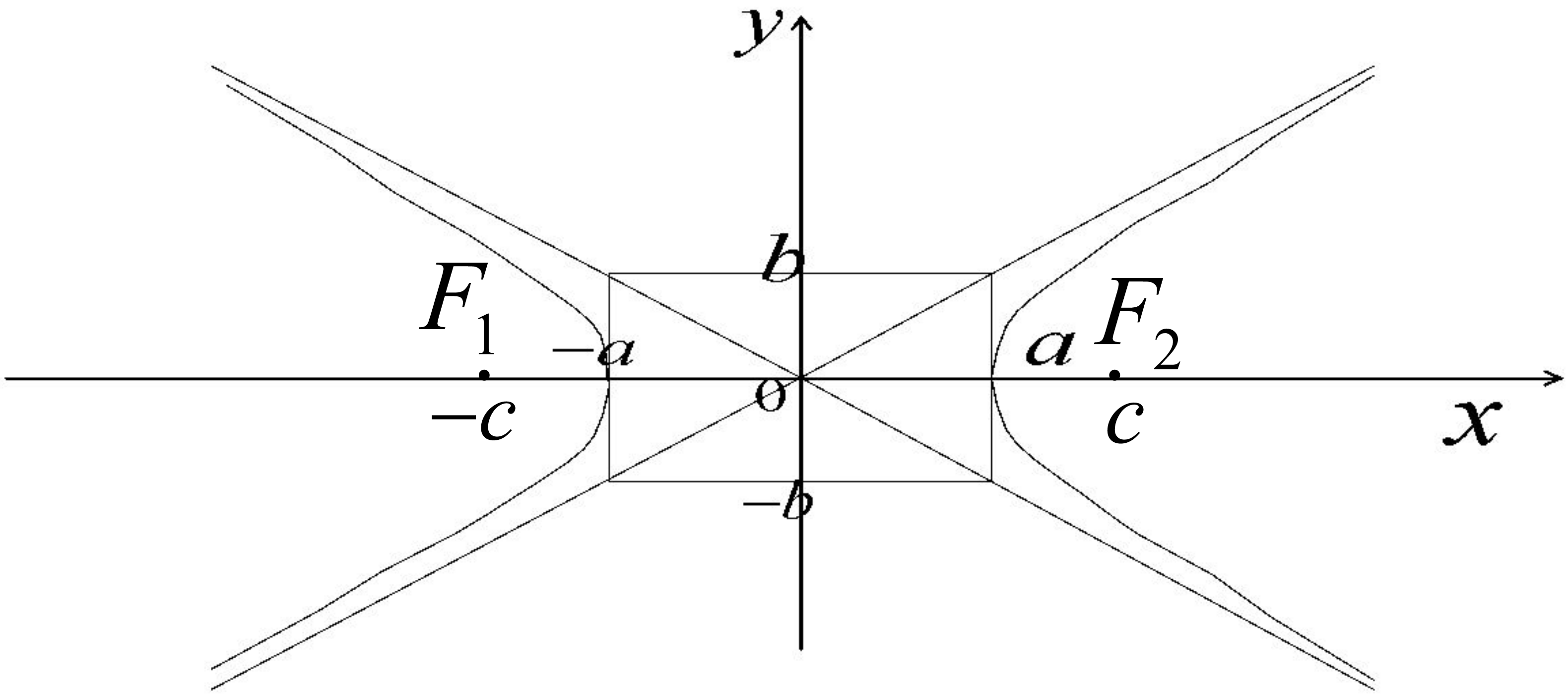


Уравнение гиперболы

$$\frac{\tilde{o}^2}{\grave{a}^2} - \frac{\acute{o}^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Гипербола



Из уравнения гиперболы видно, что точек пересечения с осью Oy нет. Ось Ox называют действительной осью, а ось Oy – мнимой осью гиперболы. Гипербола имеет две вершины, лежащие на фокальной оси. Это точки

$$A_1(-a;0) \quad \text{и} \quad A_2(a;0)$$

Основной прямоугольник гиперболы

Прямоугольник, проходящий через точки

$$(a;0) \quad (-a;0) \quad (0;b) \quad (0;-b)$$

со сторонами, параллельными осям координат, называется основным прямоугольником гиперболы.

Для гиперболы

$$c^2 - a^2 = b^2.$$

Фокусы гиперболы :

$$F_1(-c;0) \qquad F_2(c;0)$$

Оси и полуоси гиперболы

Принято говорить:

$2a$ и $2b$- действительная и мнимая оси

a и b - действительная и мнимая полуоси

$2a$ - фокальная ось

Асимптоты

Гипербола имеет две асимптоты, т. е. прямые, к которым приближаются точки этой кривой при неограниченном их удалении от начала координат вдоль по гиперболе в бесконечность. Их уравнения

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \ \varepsilon > 1$$

называется эксцентриситетом гиперболы и является мерой ее «сплюснутости», т. е. чем меньше эксцентриситет, тем меньше отношение полуосей гиперболы, а, значит, тем сильнее вытянут ее основной прямоугольник

Замечание

Для гиперболы $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{в^2}=1.$

$2a$ -мнимая ось ,а $2b$ -действительная ось

$F_1(0;-c)$ $F_2(0;c)$ $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$

$B_1(0;-b)$ $B_2(0;b)-вершины$

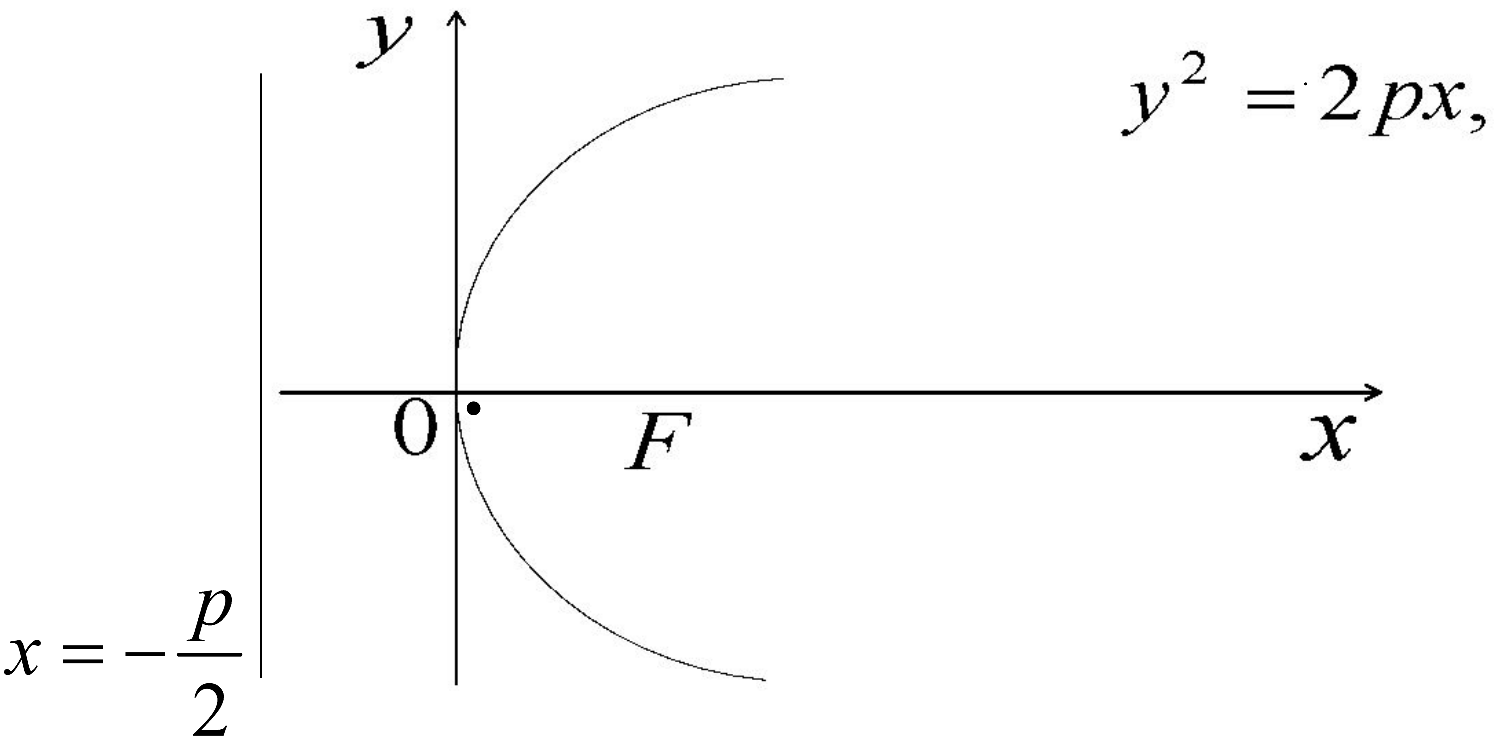
Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки плоскости, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если расположить ось *Ox* перпендикулярно директрисе и провести ее через фокус в направлении от директрисы к фокусу, обозначив при этом расстояние от фокуса до директрисы *p*, то можно показать, что в этом случае уравнение параболы будет иметь вид: $y^2 = 2px,$

а если через фокус провести ось *Oy*, то уравнение имеет вид: $x^2 = 2py.$

Парабола



Фокус параболы - $F(\frac{p}{2};0)$,

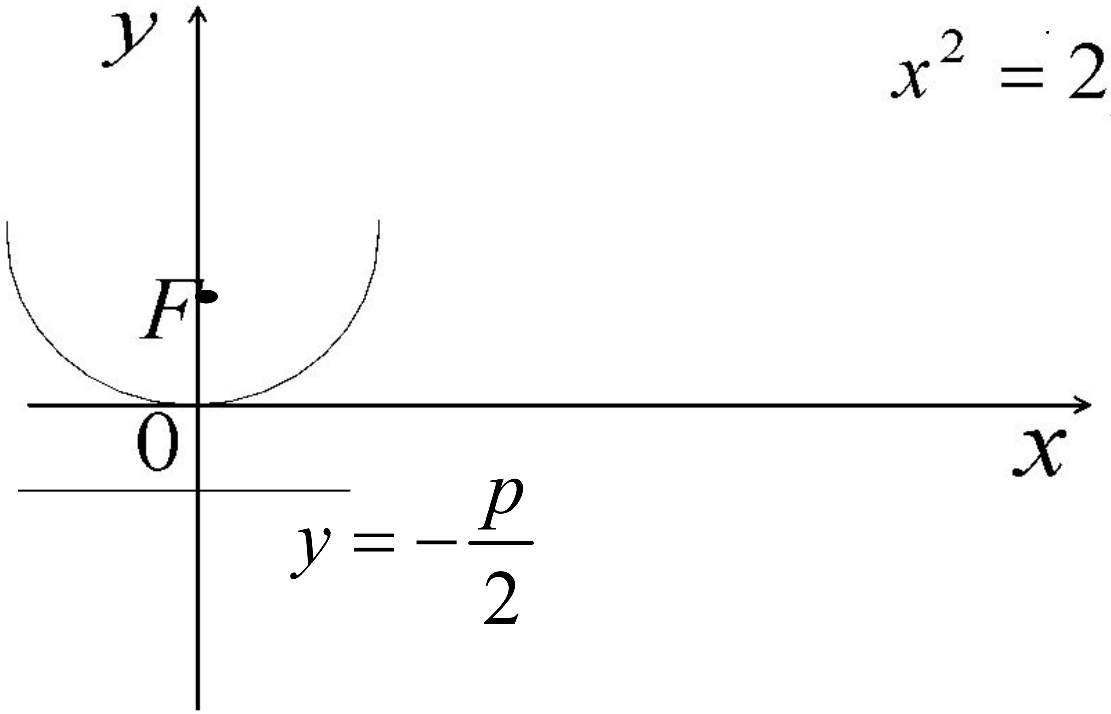
вершина параболы – в точке

$$O(0;0),$$

директриса параболы это прямая

$$x=-\frac{p}{2}$$

Парабола



$$x^2 = 2py.$$

Фокус этой параболы $F(0;\frac{p}{2})$,

вершина такой параболы находится в точке $O(0;0)$,

директриса параболы- это прямая $y = -\frac{p}{2}$

Самостоятельно изучить параболы

$$y^2 = -2px$$

$$x^2 = -2py$$

Общее уравнение кривой второго порядка

Уравнение кривой второго порядка может иметь вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

В простейшем случае при *B*=0 можно определить тип кривой, определяемой общим уравнением, выделяя полные квадраты переменных и сводя общее уравнение к каноническому уравнению той или иной кривой.

Пример

Привести уравнение $2x^2+3y^2-16x-64=0$ кривой второго порядка

к каноническому виду и найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, и, если кривая имеет асимптоты, уравнения асимптот.

Для того чтобы привести уравнение кривой к каноническому виду, выделим полный квадрат переменной x. Для этого произведем преобразования:

$2(x^2-8x)+3y^2-64=0;$

$2(x^2-8x+16-16)+3y^2-64=0.$

$2((x-4)^2-16)+3y^2-64=0;$

$2(x-4)^2+3y^2-32-64=0;$ $2(x-4)^2+3y^2=96.$ Разделим теперь обе части уравнения на 96 и получим уравнение

$$\frac{(x-4)^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1$$

Это каноническое уравнение эллипса. Полуоси этого эллипса соответственно равны: $a=\sqrt{48}=4\sqrt{3},\ b=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Центр эллипса находится в точке $C(4;0)$. Эксцентриситет находят по формуле .

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{48-32}}{4\sqrt{3}}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Пример

Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет равен $\dfrac{13}{12}$.

Решение. По условию 2с = 26, $\varepsilon = \dfrac{\tilde{n}}{\grave{a}} = \dfrac{13}{12}$

Следовательно, большая полуось гиперболы

$$\grave{a} = \frac{\tilde{n}}{\varepsilon} = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12,$$

Тогда малая полуось

$$b = \sqrt{\tilde{n}^2 - \grave{a}^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Пример

Составить уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами ее равно 20, а расстояние между фокусами равно 30.

Решение. $2c=30$, т.е. $c=15$. Тогда

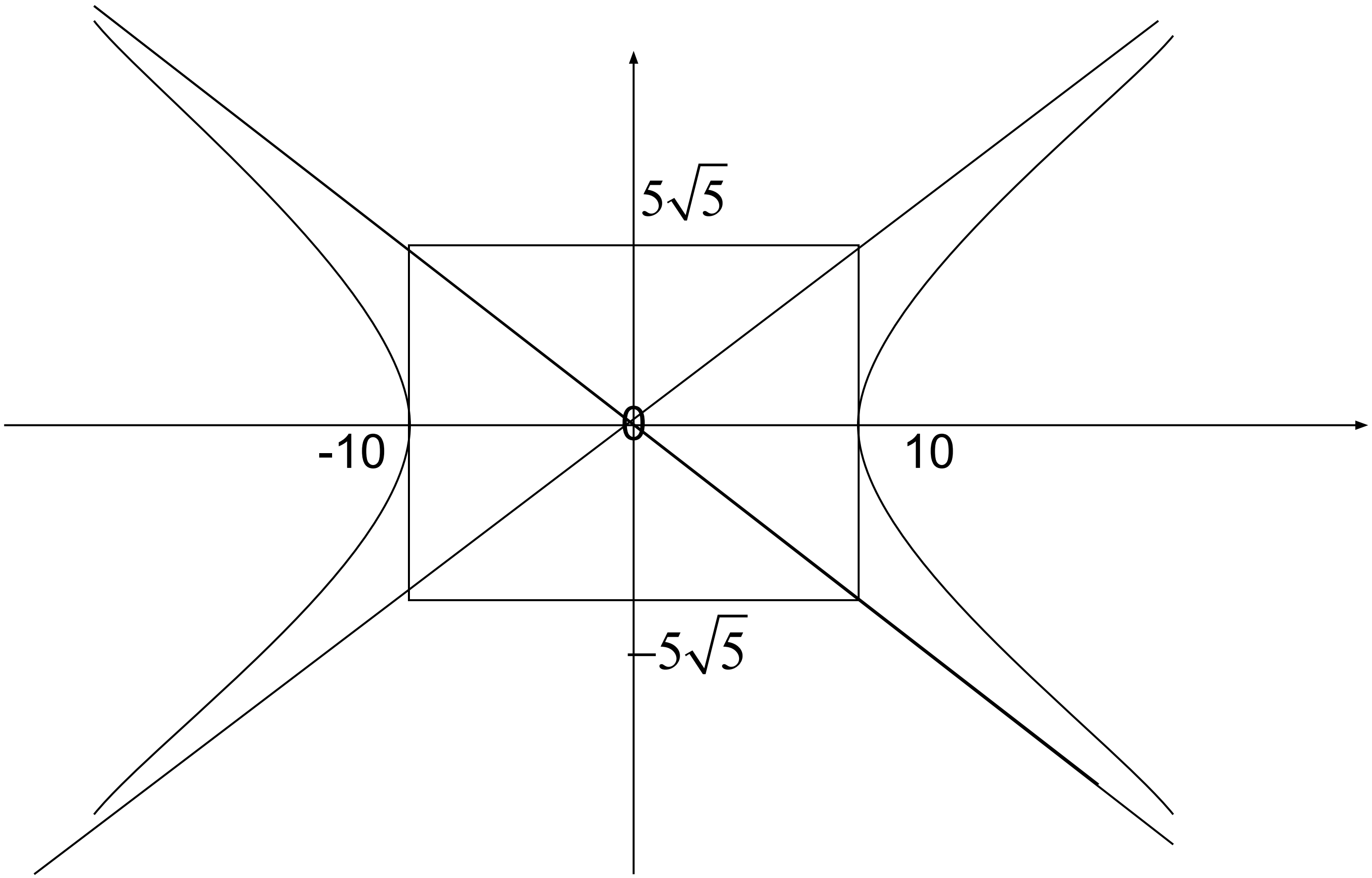
$$b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100 = 125,$$

а уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1.$$

Изобразим гиперболу. Для этого построим основной прямоугольник, где

$$a = 10, \quad b = 5\sqrt{5}.$$



Пример

Парабола симметрична относительно оси *Ox*, проходит через точку *A*(4;-1), а вершина ее лежит в начале координат. Составить уравнение параболы. Такая парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px.$$

Найдем *p*, подставив в уравнение координаты точки *A*:

$1=2p4$, $p=1/8=0{,}125$.

Тогда имеем: $y^2 = 0{,}25x.$