Магические квадраты

Презентация к исследовательской работе

Выполнил: ученик 10 класса Кирьяков Кирилл

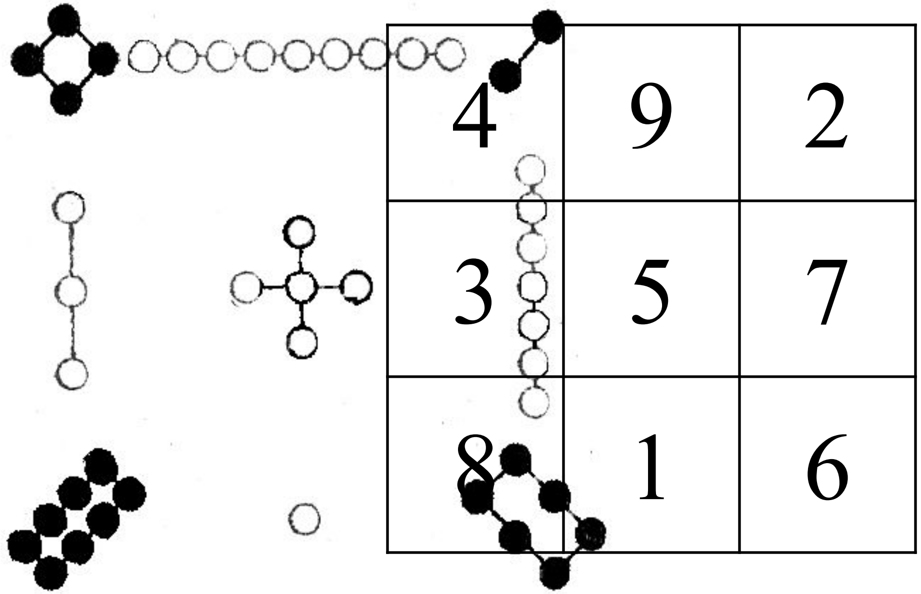
Руководитель: Лонская Т.А., учитель математики

Пришельцы из Китая и Индии

- Одним из наиболее древних и наиболее совершенных видов кросс-сумм является так называемый магический (или волшебный) квадрат.

- Придуманы магические квадраты впервые, по-видимому, китайцами, так как самое ранее упоминание о них встречается в китайской книге, написанной за 4000-5000 лет до нашей эры.

Пришельцы из Китая и Индии



- **Старейший в мире магический квадрат представлен выше. Черными кружками в этом квадрате изображены четные (женственные) числа, белыми – нечетные (мужественные) числа.**
- **В обычной записи он не так эффектен:**

Пришельцы из Китая и Индии

- И всё же это великолепный образец кросс-сумм! Девять порядковых чисел размещены в девяти клетках квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одинаковы (основное свойство магического квадрата).
- Более поздние сведения о магических квадратах относящиеся уже к 1 веку, получены из Индии. Вот один из таких древнеиндийских памятников почти 2000-летней давности:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Пришельцы из Китая и Индии

- Здесь 16 порядковых чисел размещены в шестнадцати клетках квадрата так, что выполняется основное свойство магического квадрата.
- Действительно:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 14 & + & 15 & + & 4 & = & \mathbf{34} \\
+ & & + & & + & & + & & \\
12 & + & 7 & + & 6 & + & 9 & = & \mathbf{34} \\
+ & & + & & + & & + & & \\
8 & + & 11 & + & 10 & + & 5 & = & \mathbf{34} \\
+ & & + & & + & & + & & \\
13 & + & 2 & + & 3 & + & 16 & = & \mathbf{34} \\
\hline
\mathbf{34} & & \mathbf{34} & & \mathbf{34} & & \mathbf{34} & &
\end{array}
$$

Пришельцы из Китая и Индии

- Каждое число магического квадрата участвует в двух суммах, а числа расположенные по диагоналям даже в трёх, и все эти суммы равны между собой!
- Недаром в ту далёкую эпоху суеверий индийцы, а следом за ними и арабы приписывали этим числовым сочетаниям таинственные и магические свойства.
- Вся эта своеобразная мозаика чисел с её постоянством сумм действительно придаёт квадрату «волшебную» силу произведения искусства.
- И магические квадраты вошли в искусство.
- В «Фаусте» Гете есть сцена приготовления колдуньей омолаживающего зелья.
- Слова, которыми колдунья сопровождает свои манипуляции, обычно воспринимаются читателями «Фауста» как тарабарщина, бессмыслица:

Du must verstehen!	………………………………
Aus Eins mach' Zehn	Из единицы делаешь 10,
Und Zwei lass gehn,	пропускаешь 2,
Und Drei mach' gleich,	а также 3
So bist du reich.	………………………………
Verlier die Vier!	Зачеркиваешь 4
Aus Fünf und Sechs,	Из 5 и 6
So sagt die Hex,	………………………………
Mach' Sieben und Acht,	Делаешь 7 и 8 (и наоборот)
So its's vollbracht:	Квадрат готов
Und Neun ist Eins,	………………………………
Und Zehn ist keins,	………………………………
Das ist das Hexen-	………………………………
Einmal-Eins!	………………………………

Пришельцы из Китая и Индии

- Но не мог же Гете потерять чувство художественной меры и отдать абракадабре целых 13 строк поэтического текста!
- Литературные комментаторы и исследователи бесплодно тратили усилия на поиски смысла, скрытого в этом тринадцатистишии. Очевидно, у них не возникала мысль попытаться воспроизвести на бумаге рекомендации колдуньи.

- Давайте это сделаем, построим квадрат из девяти ячеек и разместим в ячейках 9 первых натуральных чисел в порядке их следования. Выполним указания колдуньи:
- Из 1 *сделаешь* 10 — в первой ячейке заменяем ЧИСЛО 1 числом 10.
- Числа 2 и 3 оставляем на своих местах, так как сказано: *пропускаешь 2, а также 3.*
- *Зачеркиваешь* 4 — это значит заменяем нулем число 4.
- Заменяем 5 и 6 числами 7 и 8, а в ячейки, занятые числами 7 и 8, вписываем 5 и 6

1 10	2	3
4 0	5	6
7	8	9

Пришельцы из Китая и Индии

- Колдунья говорит: «Квадрат готов», но тут она хитрит. Ей еще надо в последней ячейке квадрата заменить девятку числом 4
- Вот теперь формирование «талисмана» окончено и последние три строки тринадцатистишия уже ничего не добавляют к пониманию смысла «заклинаний» колдуньи. Особенность получившегося квадрата состоит в том, что магическая константа (15) получается только при сложении чисел вдоль любой строки и любого столбца, но не вдоль диагоналей.
- Квадрат с таким свойством чисел, занимающих его ячейки, принято называть *полумагическим.*
- Превращением начального квадрата в полумагический Гете символизировал процесс омоложения Фауста.

10	2	3
0	7	8
5	6	9 4

Свойства магического квадрата А.Дюрера

- **В Европу магические квадраты проникли лишь в начале XV века. А в начале XVI века один из них был увековечен выдающимся немецким художником, гравером и немного математиком А. Дюрером в его лучшей гравюре «Меланхолия» (1514 г.).**

- **Дюрер воспроизвел на гравюре (в несколько измененном виде) тот самый магический квадрат, составленный из 16 чисел.**

- **Очарование этого магического квадрата не только в постоянстве сумм, которое является лишь его основным свойством. Подобно тому, как в истинно художественном произведении находишь тем больше новых привлекательных сторон, чем больше в него вглядываешься, так и в этом произведении математического искусства таится немало красивых свойств, помимо основного.**

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Свойства магического квадрата А.Дюрера

- **Укажем еще шесть дополнительных свойств приведенного нам шестнадцатиклеточного магического квадрата:**

1. **Сумма чисел, расположенных по углам нашего магического квадрата, равна 34, то есть тому же числу, что и сумма чисел вдоль каждого ряда квадрата:**

   \+ \+ \+ = **34**

2. **Суммы чисел в каждом из маленьких квадратов (в 4 клетки), примыкающих к вершинам данного квадрата, и в таком же центральном квадрате тоже одинаковы и каждая из них равна 34:**

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Свойства магического квадрата А.Дюрера

3. **В *каждой* строке квадрата есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых - 15, и еще пара тоже рядом стоящих чисел, сумма которых -19.**

\+ =
\+ =
\+ =
\+ =
15

\+ =
\+ =
\+ =
\+ =
19

4. Подсчитайте-ка теперь сумму квадратов чисел отдельно в двух крайних строках и в двух средних:

$$1^2+14^2+15^2+4^2=438 \quad и \quad 13^2+2^2+3^2+16^2=438$$
$$12^2+7^2+6^2+9^2=310 \quad и \quad 8^2+11^2+10^2+5^2=310$$

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Как видите, получились попарно равные суммы!

Свойства магического квадрата А.Дюрера

5. Нетрудно убедиться, что аналогичным свойством обладают и столбцы чисел. Суммы квадратов чисел двух крайних столбцов равны между собой, и суммы квадратов чисел двух средних столбцов тоже одинаковы.

6. Если в данный квадрат вписать еще один квадрат с вершинами в серединах сторон данного квадрата, получим то, что показано на рисунке а, выше:

а) сумма чисел, расположенных вдоль одной пары противоположных сторон вписанного квадрата, равна сумме чисел, расположенных вдоль другой пары противоположных его сторон, и каждая из этих сумм равна опять-таки числу 34:

12+14+3+5 = 15+9+8+2 = 34;

б) еще интереснее то, что равны между собой даже суммы квадратов и суммы кубов этих чисел:

$$12^2+14^2+3^2+5^2 = 15^2+9^2+8^2+2^2$$

$$12^3+14^3+3^3+5^3 = 15^3+9^3+8^3+2^3$$

Свойства магического квадрата А.Дюрера

- Если все столбцы магического квадрата сделать строками, сохраняя их чередование, то есть - числа первого столбца в той же последовательности расположить в виде первой строки, числа второго столбца в виде второй строки и т.д., то квадрат останется магическим с теми же его свойствами.
- **При обмене местами отдельных строк или столбцов магического квадрата некоторые из вышеперечисленных его свойств могут исчезнуть, но могут и все сохраниться и даже появиться новые. Например, поменяем, местами первую и вторую строки данного квадрата, получим то, что показано на рисунке справа:**

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

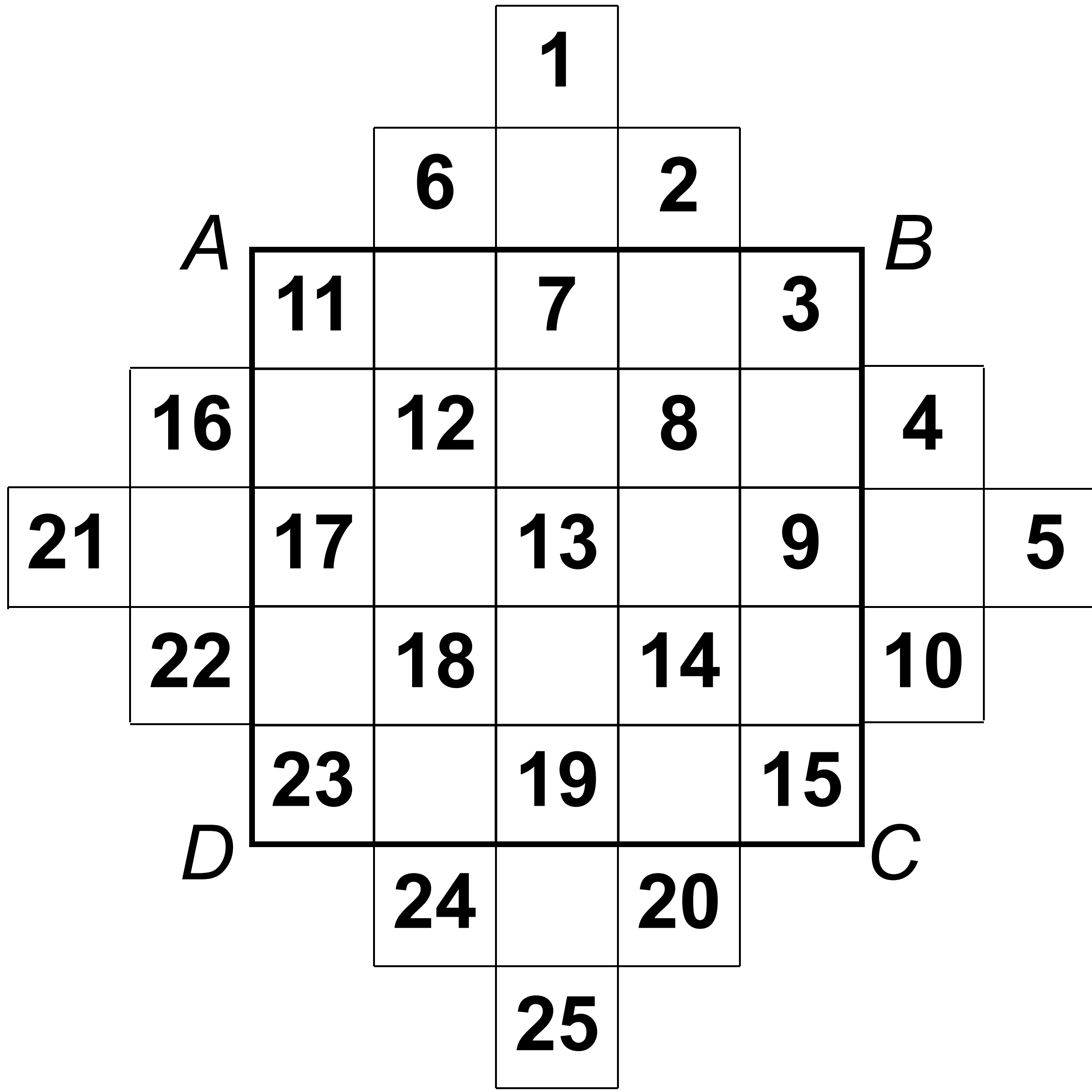
- Суммы чисел вдоль строк и столбцов, конечно, не изменились, но суммы чисел вдоль диагоналей стали иными, не равными 34. Магический квадрат потерял часть своих основных свойств, стал «неполным» магическим квадратом (полумагическим квадратом).
- Продолжая обменивать местами строки и столбцы квадрата, вы будете получать все новые и новые магические и полумагические квадраты из 16 чисел.

Как самому составить магический квадрат

- Если некоторое количество порядковых чисел, например, все целые числа от *1 до 16* или от *1* до 9, или от 1 до 25, или от *1* до *100* и т д., расположены в форме квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали квадрата *одинаковы,* то такой квадрат, как было сказано, называется *магическим,* или *волшебным.*
- Количеством клеток (чисел) в каждом ряду магического квадрата определяет его *порядок.* Магический квадрат *третьего порядка* имеет в каждом ряду 3 клетки, магический квадрат *четвертого порядка* имеет в каждом ряду 4 клетки и т. д.

Квадраты нечетного порядка

- Строим, квадрат ABCD с 25 клетками и временно дополняем его до, симметричной ступенчатой фигуры со ступеньками в одну клетку.
- В полученной фигуре располагаем по порядку косыми рядами сверху вниз - направо 25 целых чисел от 1до 25.
- А теперь каждое число, оказавшееся вне квадрата ABCD, следует перенести вдоль того же ряда или столбца ровно на столько клеток от той клетки, которую оно занимает, каков порядок квадрата, в нашем примере - на пять. Так, в соответствии с этим правилом переносим эти числа…



Как самому составить магический квадрат

- Но у получившегося квадрата обнаруживается и дополнительное свойство: все пары чисел, расположенные симметрично относительно центральной клетки, дают одинаковые суммы.
- Например:

1+25=19+7=18+8=23+3=

=6+20=2+24=4+22 и т. д.

- Магические квадраты, обладающие таким свойством, называются *симметричными.*

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

=26

Квадраты порядка, *кратного четырем*

- Для составления какого-либо магического квадрата порядка n=4, 8, 12, ..., 4k удобна, например, такая простая схема:

1) Разместить числа в клетках заданного квадрата в порядке их возрастания (в натуральном порядке);
2) Выделить по углам заданного квадрата четыре квадрата со сторонами n/4 и в центре один квадрат со стороной n/2
3) В пяти выделенных квадратах обменять местами числа, расположенные симметрично относительно центра заданного квадрата; это значит, что в натуральном расположении чисел квадрата *четвертого* порядка надо поменять местами *1* и *16, 4 и 13, 6* и *11*, *7* и *10.*
4) Квадраты, составленные по указанной схеме, будут всегда *магическими симметрическими.*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Конец