

Круги Эйлера



Леонард Эйлер-известный швейцарский ученый

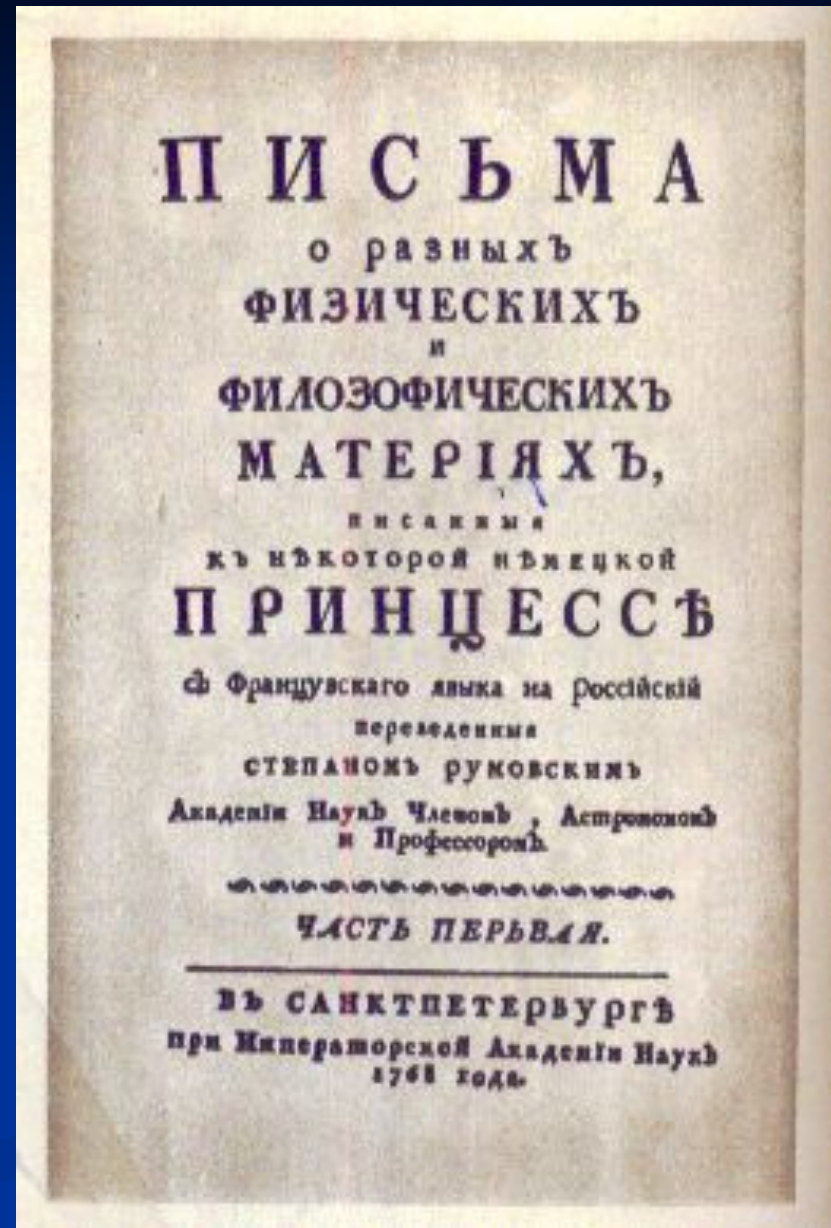
**Идеальный математик
XVIII ВЕКА
(1707 – 1783гг.)
(к 300-летию со дня
рождения)**



- Нет ученого, имя которого упоминалось бы в учебной литературе по математике столь же часто, как имя Эйлера. В Энциклопедии можно найти сведения о шестнадцати формулах, уравнениях, теоремах и т. д., носящих имя Эйлера.



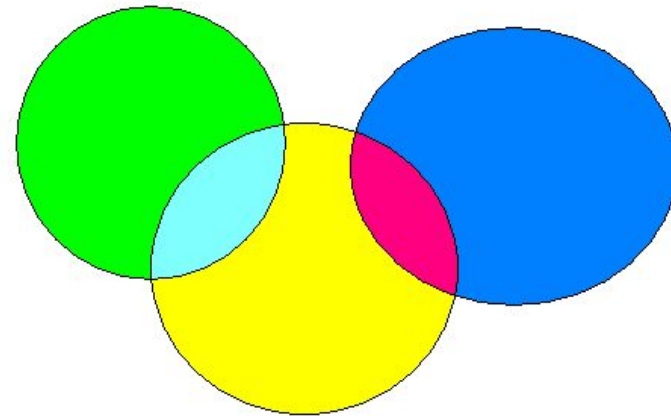
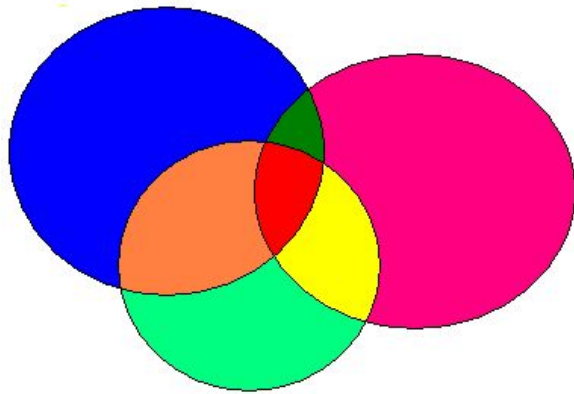
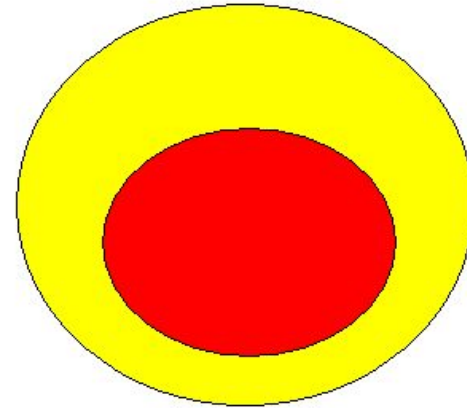
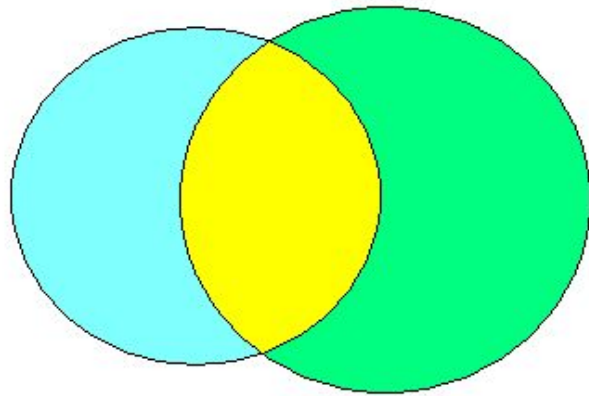
"Письма о разных
физических и
философических
материях,
написанные к
некоторой
немецкой
принцессе...", где
появились впервые
«круги Эйлера»





- Эйлер писал тогда, что «круги очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления».
- При решении целого ряда задач Леонард Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов и они получили название «круги Эйлера».

Типы кругов Эйлера



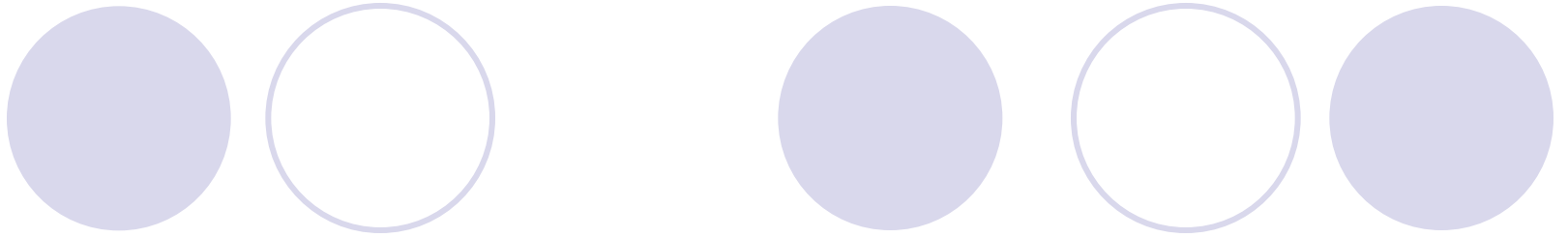


Диаграмма Эйлера-Венна - наглядное средство для работы со множествами. На этих диаграммах изображаются все возможные варианты пересечения множеств. **Количество пересечений (областей) n определяется по формуле:**

$$\underline{N=2^n},$$

где n - количество множеств.

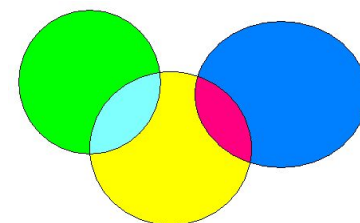
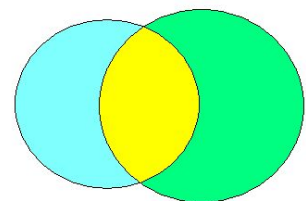
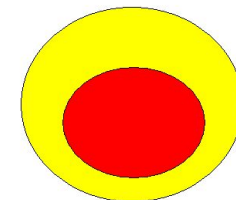
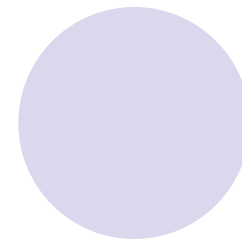
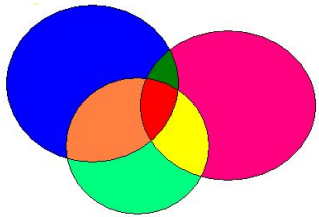
Таким образом, если в задаче используется два множества, то $N=2^2=4$, если три множества, то $N=2^3=8$, если четыре множества, то $N=2^4=16$.

Диаграммы Эйлера-Венна используются в основном для $N \leq 4$.

Для диаграмм Эйлера-Венна справедливы два основных понятия:

Универсальное множество (универсум) U (в контексте задачи) - множество, содержащее все элементы рассматриваемой задачи: элементы всех множеств задачи и элементы, не входящие в них.

Пустое множество \emptyset (в контексте задачи) - множество, не содержащее ни одного элемента рассматриваемой задачи. На диаграмме строят пересекающиеся множества, включают их в универсум.



Множество чисел

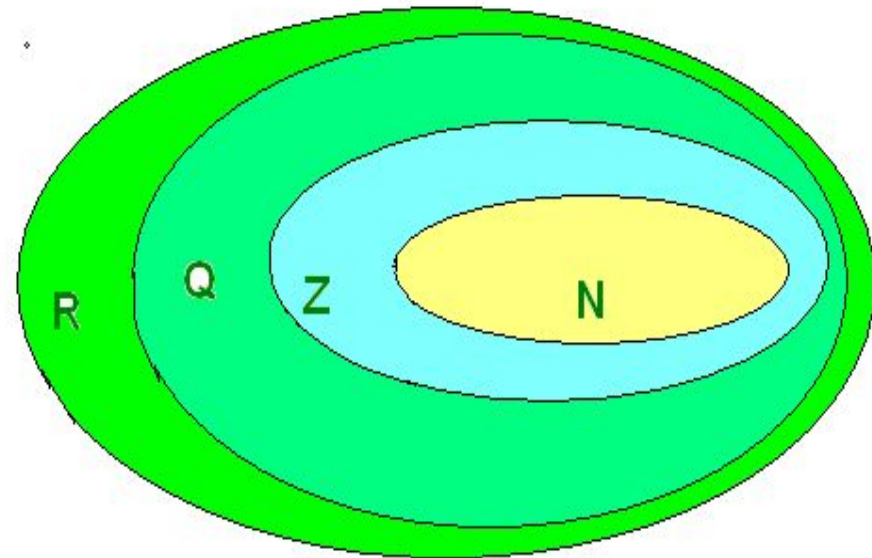
- Множество всех действительных чисел Эйлер изобразил с помощью этих кругов:

- N -множество натуральных чисел,

- Z – множество целых чисел,

- Q – множество рациональных чисел,

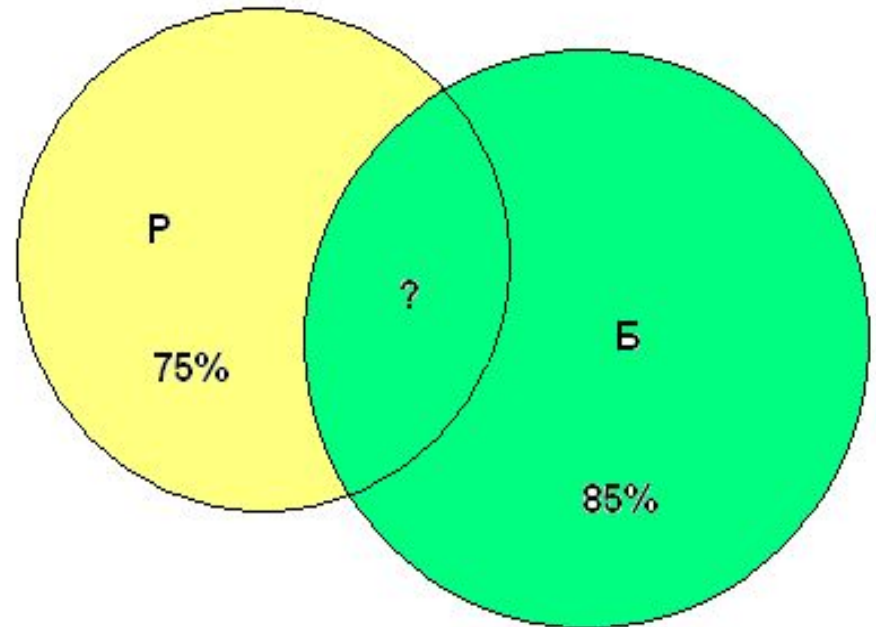
- R – множество всех действительных чисел.



Решение задач с помощью кругов

Эйлера.

- Часть жителей нашего города умеет говорить только по-русски, часть – только по-башкирски и часть умеет говорить на обоих языках. По-башкирски говорят 85%, по-русски 75%. Сколько процентов жителей говорят на обоих языках?

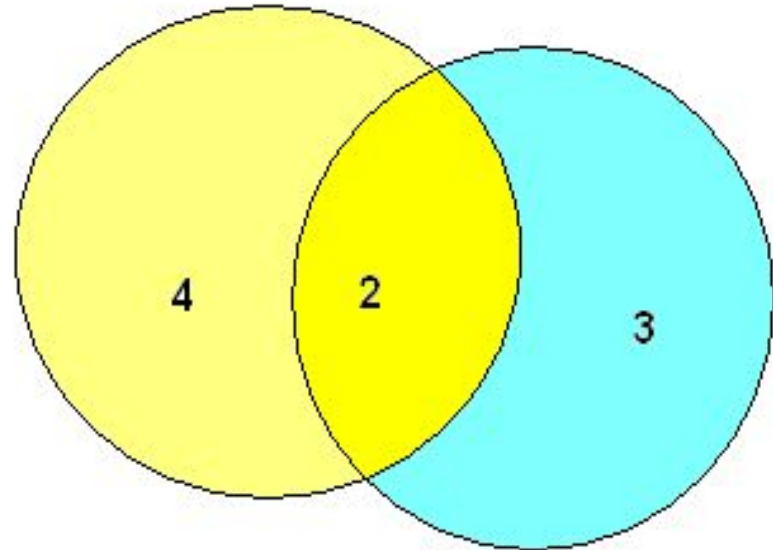


Решение:

- $100\% - 85\% = 15\%$ (жителей говорят только по-русски)
- $75\% - 15\% = 60\%$ (жителей говорят на обоих языках)

Задача 2. О подругах

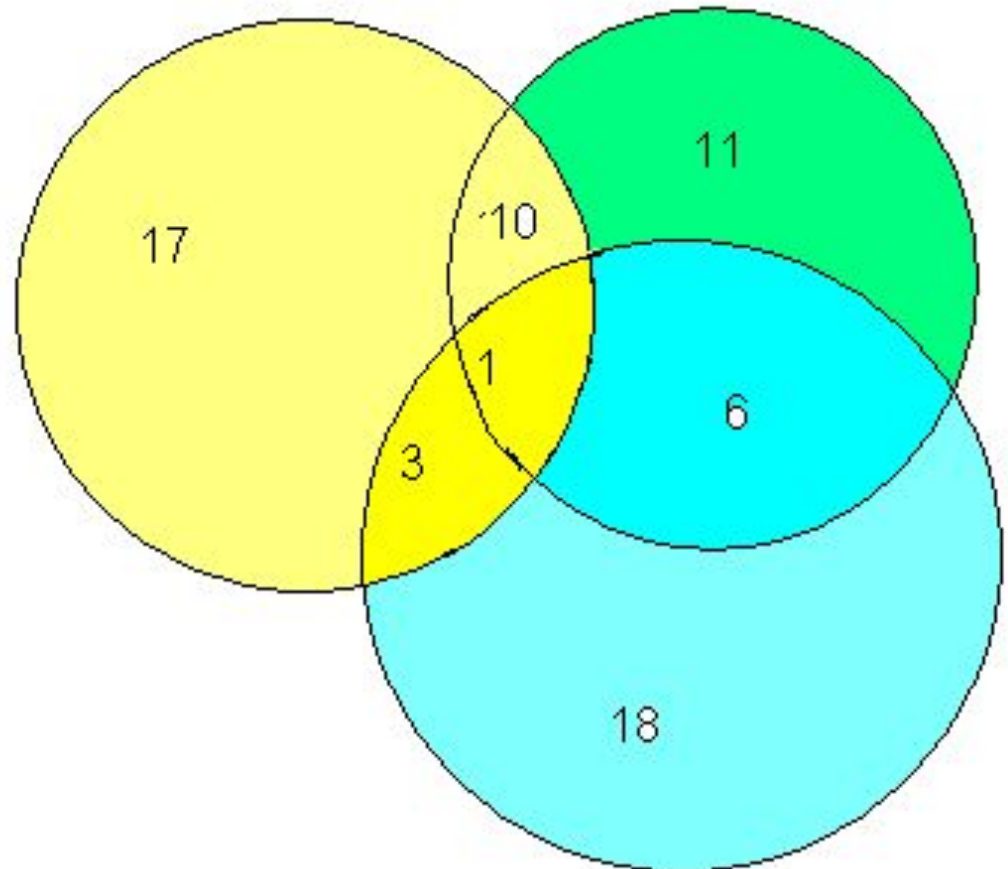
Все мои подружки выращивают в своих квартирах какие-нибудь растения. Шестеро из них разводят кактусы, а пятеро — фиалки. И только у двоих есть и кактусы и фиалки. Угадайте, сколько у меня подруг?



Спортивная задача

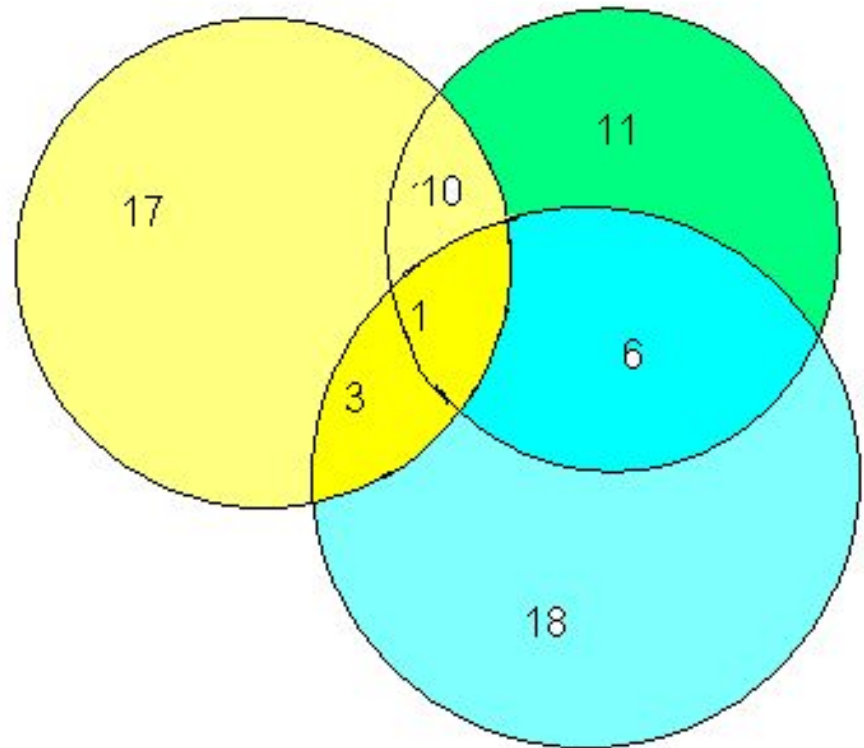


- В футбольной команде «Баймак» 30 игроков:
- 18 нападающих.
- 11 полузащитников
- 17 защитников
- Вратари
- 3 могут быть нападающими и защитниками,
- 10 защитниками и полузащитниками,
- 6 нападающими и защитниками
- 1 и нападающим, и защитником, и полузащитником.
- Вратари не замени
- Сколько в команде «Баймак» вратарей?



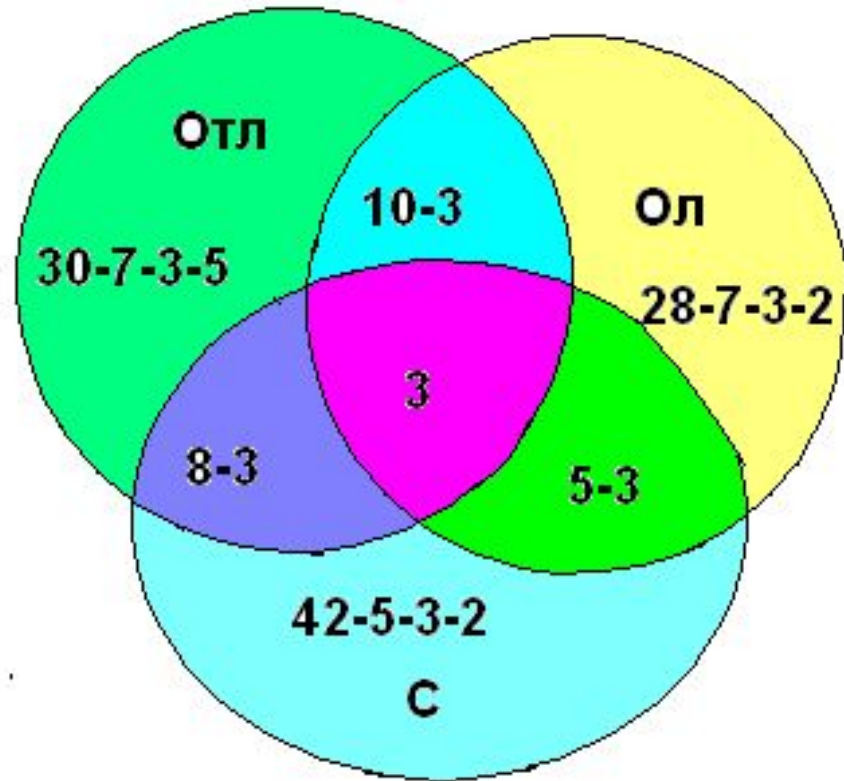
Решение

- $18+11+17-3-10-6+1=28$ (игроков) на этой диаграмме. Но в команде всего 30 футболистов. Значит вратарей будет $30-28=2$.
Ответ: 2 вратаря.



«Озеро Графское»

- Из 100 отдыхающих на турбазе «Графское»,
- 30 детей - отличники учебы,
- 28 - участники олимпиад,
- 42 - спортсмены.
- 8 учащихся одновременно участники олимпиад и спортсмены,
- 10 – участники олимпиад и отличники,
- 5 – спортсмены и отличники учебы,
- 3 – и отличники, и участники олимпиад, и спортсмены.
- Сколько отдыхающих не относятся ни к одной из групп?





Решение

- $20 + 13 + 30 + 3 + 5 + 7 + 2 = 80$ (детей)
- $100 - 80 = 20$ (детей не входят ни в одну из групп)
- Ответ: 20 детей.

Выводы

- **Круги Эйлера – инструмент визуализации работы со множествами,**
- **Применение кругов Эйлера (диаграмм Эйлера-Венна) позволяет легко решить задачи, которые обычным путем разрешимы лишь при составлении системы трех уравнений с тремя неизвестными.**

Инструмент формализации – формула включений и исключений

Введем следующее понятие: число элементов конечного множества A называется *мощностью* этого множества и обозначается $|A|$.

Формула включений и исключений даёт возможность находить мощность объединения любого конечного набора множеств.



Формула включений и исключений для двух множеств. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Формула включений и исключений для трёх множеств. Для любых конечных множеств A , B и C справедливо равенство:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Выводы

- **Формула включений и исключений – инструмент формализации работы со множествами,**
- **Применение формулы включений и исключений основывается на формальном языке математики, то есть на составлении уравнения или системы уравнений.**