

Круги Эйлера в решении задач



Выполнила:

Бандурина Елена 6«А»

Учитель: Орлова О.А.

МОУ-СОШ №9 г.Аткарск

Леонард Эйлер

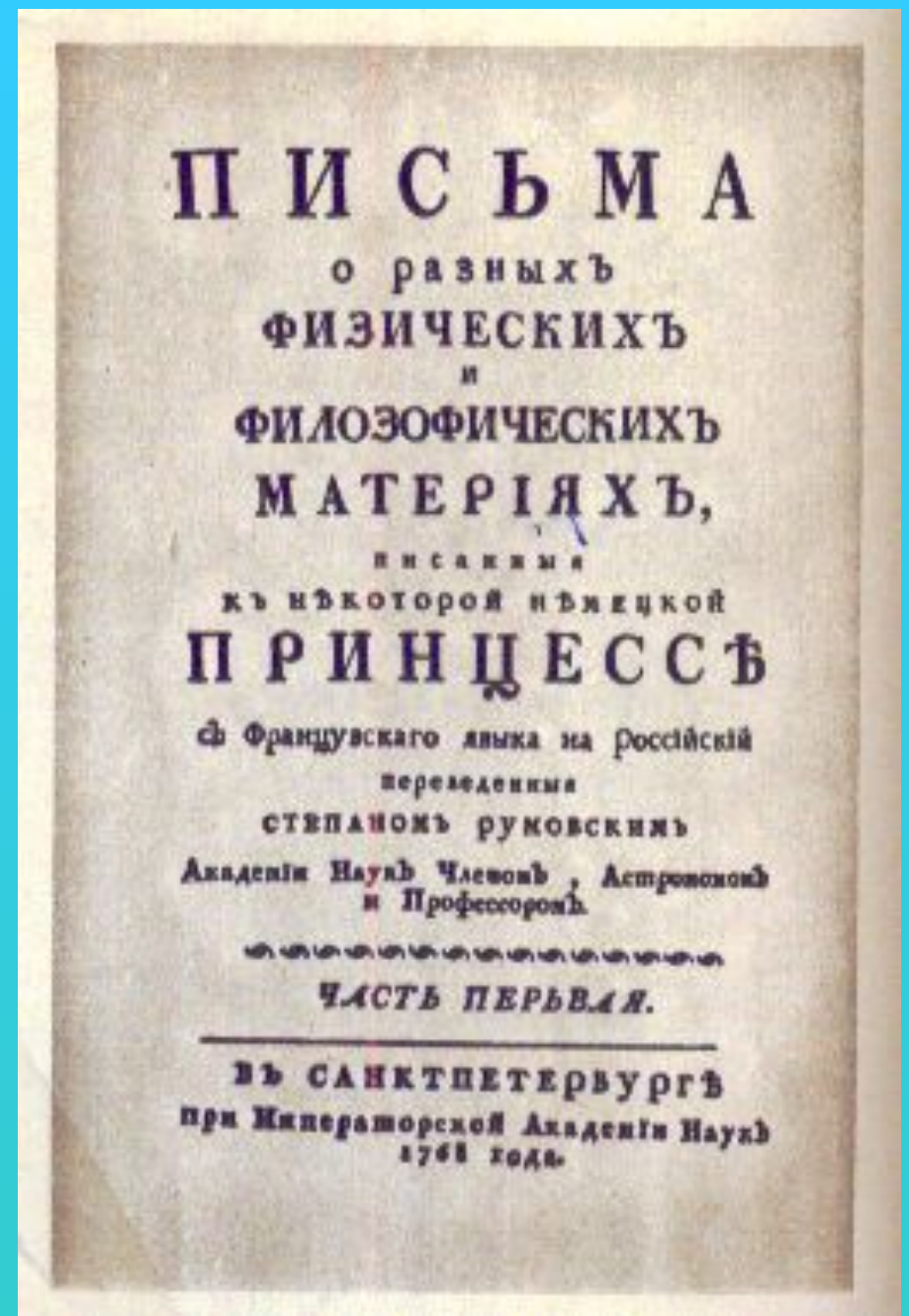


(1707 г.-1783 г.)

Леонард Эйлер, крупнейший математик XVIII века, родился в Швейцарии. В 1727г. по приглашению Петербургской академии наук он приехал в Россию. Эйлер попал в круг выдающихся математиков, получил большие возможности для создания и издания своих трудов. Он работал с увлечением и вскоре стал, по единодушному признанию современников, первым математиком мира.

Одним из первых, кто использовал для решения задач круги, был выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с кругами. Затем этот метод основательно развил швейцарский математик Леонард Эйлер (1707 – 1783).

С 1761 по 1768 год им были написаны знаменитые «Письма к немецкой принцессе», где Эйлер как раз и рассказывал о своем методе, об изображении множеств в виде кругов. Именно поэтому рисунки в виде кругов, обычно называют «кругами Эйлера». Эйлер отмечал, что изображение множеств в виде кругов «очень подходит для того, чтобы облегчить наши рассуждения». Понятно, что слово «круг» здесь весьма условно, множества могут изображаться на плоскости в виде произвольных фигур.



После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781 – 1848). Только в отличие от Эйлера он рисовал не круговые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шредер (1841 – 1902). Этот метод широко используется в его книге «Алгебра логика». Но наибольшего расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843 – 1923). С наибольшей полнотой этот метод изложен им в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. В честь Венна вместо кругов Эйлера соответствующие рисунки называют иногда диаграммами Венна; в некоторых книгах их называют также диаграммами (или кругами) Эйлера – Венна.



Очевидное и невероятное

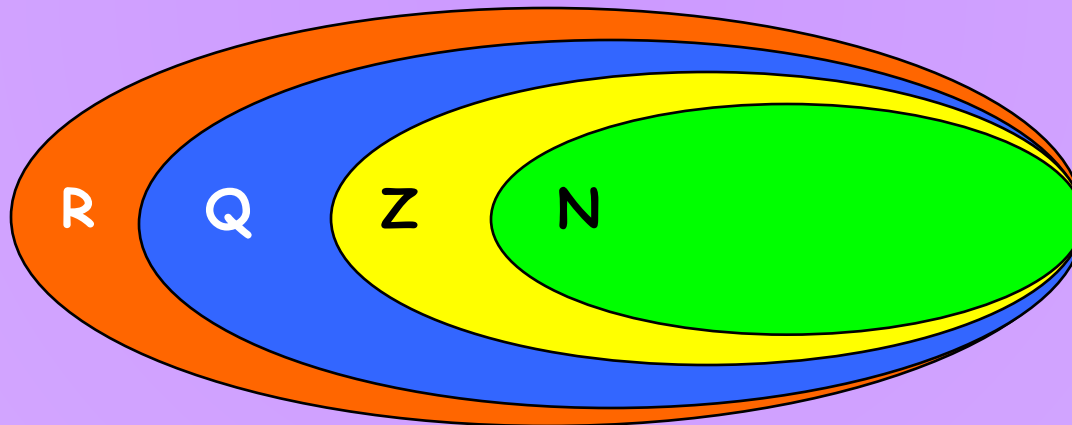
Множество всех действительных чисел Эйлер изобразил с помощью этих кругов:

N -множество натуральных чисел,

Z - множество целых чисел,

Q - множество рациональных чисел,

R - множество всех действительных чисел.



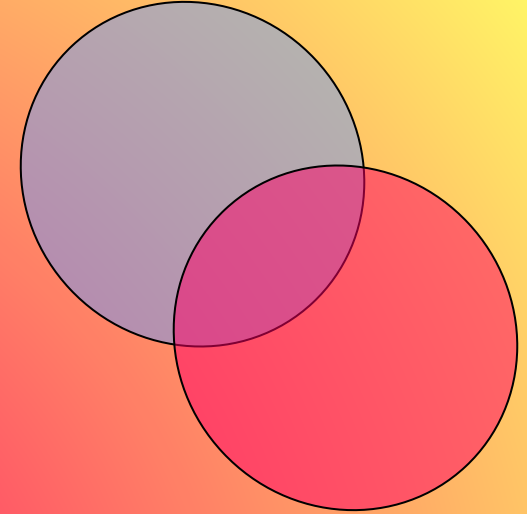
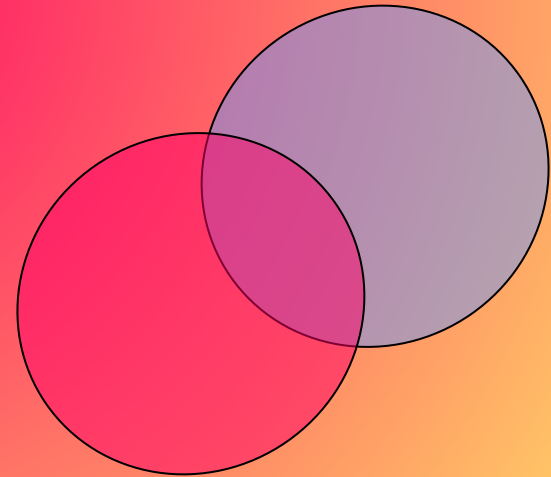
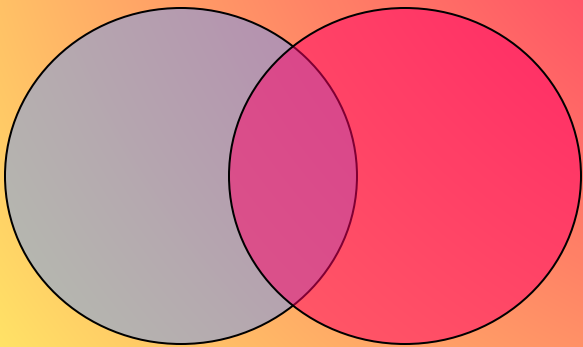
Ну а как же круги Эйлера помогают при решении задач?

Круги Эйлера

Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи.

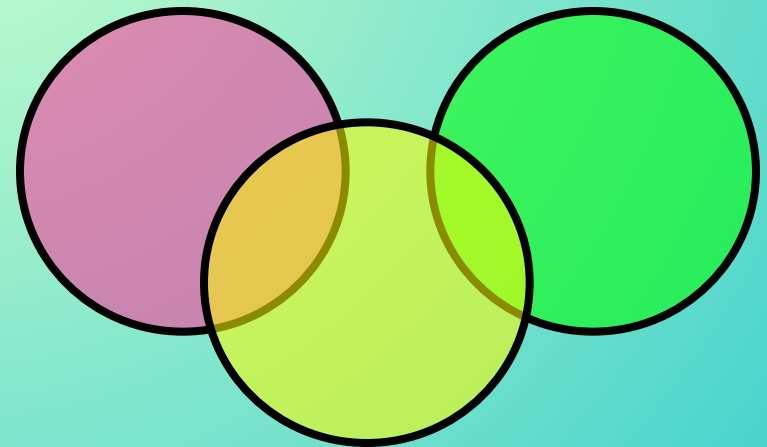
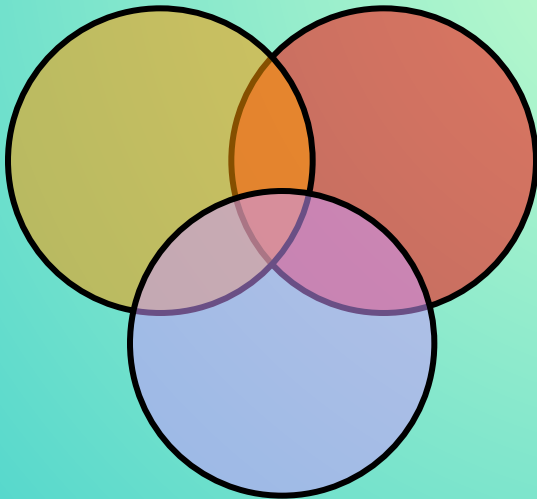
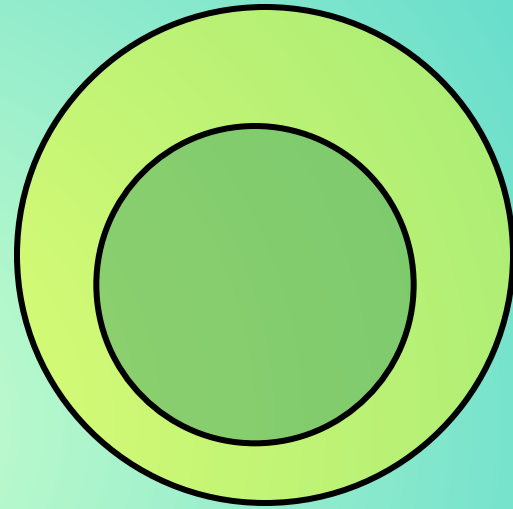
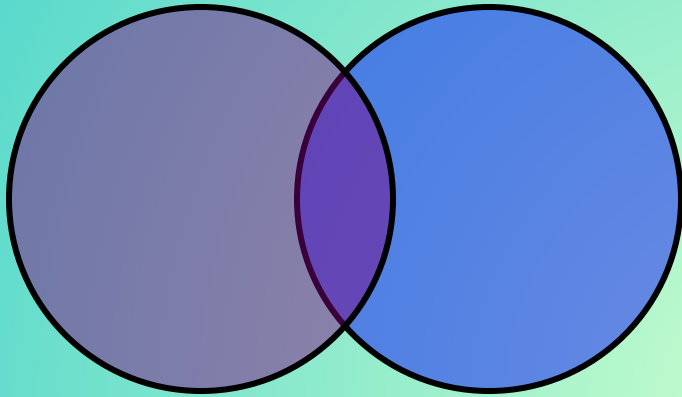


Круги ЭЙЛЕРА —
геометрическая
схема, с
помощью
которой можно
изобразить
отношения между
подмножествами,
для наглядного
представления.





Типы кругов Эйлера



Решение задач

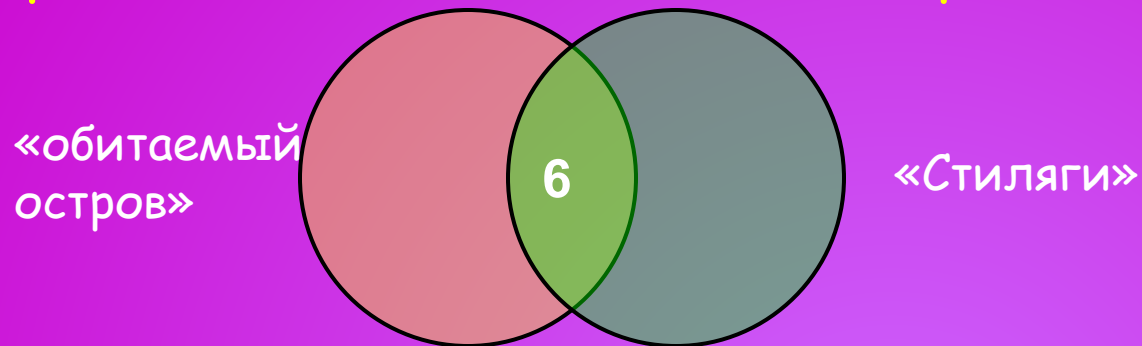
"Обитаемый остров" и "Стиляги"

Некоторые ребята из нашего класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек - фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?



Решение

Чертим два множества таким образом:

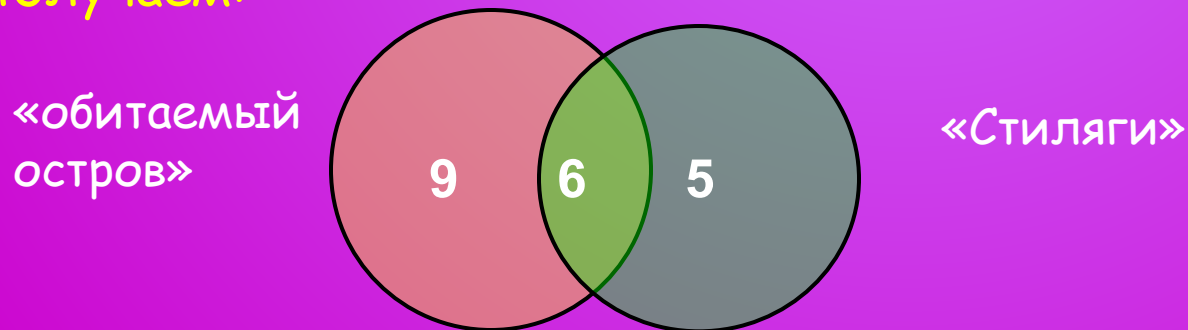


6 человек, которые смотрели фильмы «Обитаемый остров» и «Стиляги», помещаем в пересечение множеств.

$15 - 6 = 9$ – человек, которые смотрели только «Обитаемый остров».

$11 - 6 = 5$ – человек, которые смотрели только «Стиляги».

Получаем:



Ответ 5 человек смотрели только «Стиляги».

«Мир музыки»

В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 - диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

Решение

Изобразим эти множества на кругах Эйлера.



Теперь посчитаем: Всего внутри большого круга 35 покупателей, внутри двух меньших $35 - 10 = 25$ покупателей. По условию задачи 20 покупателей купили новый диск певицы Максим, следовательно, $25 - 20 = 5$ покупателей купили только диск Земфиры. А в задаче сказано, что 11 покупателей купили диск Земфиры, значит $11 - 5 = 6$ покупателей купили диски и Максим, и Земфиры:

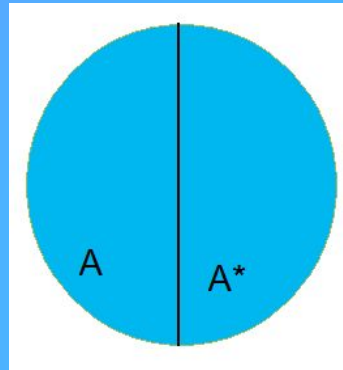
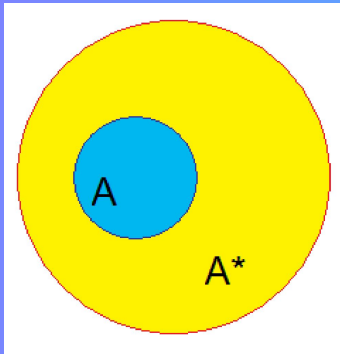


Ответ: 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры.



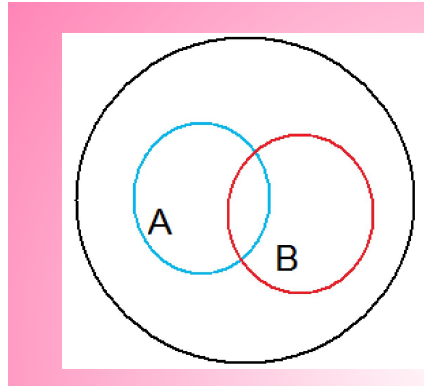
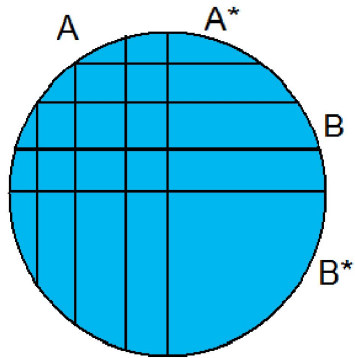
Рассмотрение простейших случаев кругов Эйлера – Венна

а) Пусть дано некоторое множество и указано свойство A . Очевидно, элементы данного множества могут обладать или не обладать данным свойством. Поэтому данное множество распадается на две части, которые можно обозначить через A и A^* . На рисунке можно это изобразить двумя способами.



Большой круг изображает данное множество, маленький круг A – ту часть элементов данного множества, которое обладает свойством A , а кольцеобразная часть A^* – ту часть элементов, которые не обладают свойством A .

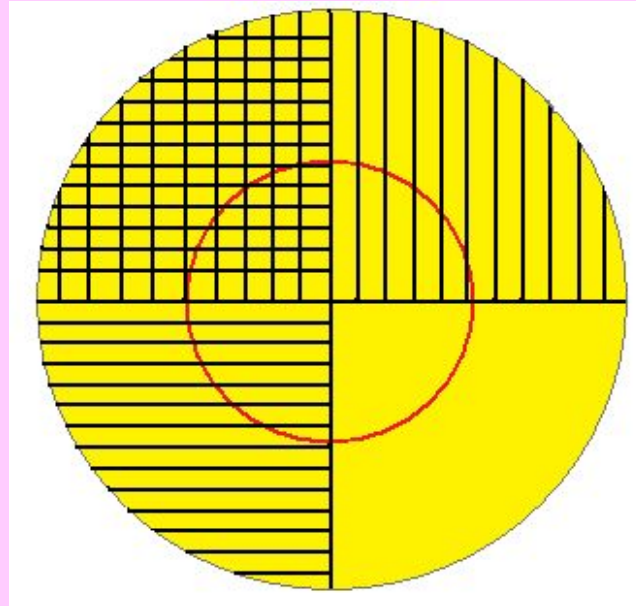
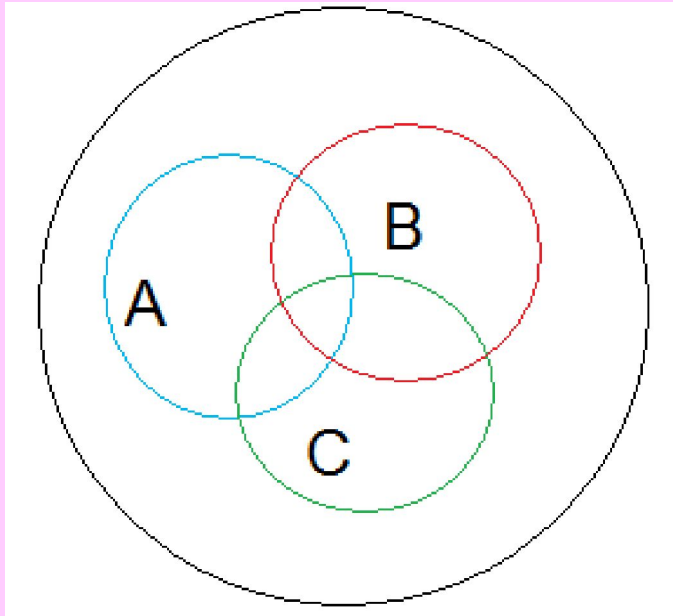
- б) Пусть дано некоторое множество и указаны два свойства: A , B . Так как элементы данного множества могут обладать или не обладать каждым из этих свойств, то возможны четыре случая: AB , AB^* , A^*B , A^*B^* . Следовательно, данное множество распадается на 4 подмножества. Это можно изобразить также двумя способами: в виде кругов или диаграмм.



На первом рисунке круг A – это подмножество тех элементов данного множества, которые обладают свойством A , а область вне круга, т.е. область A^* , - это подмножество тех элементов, которые свойством A не обладают. Аналогично круг B и область вне его.

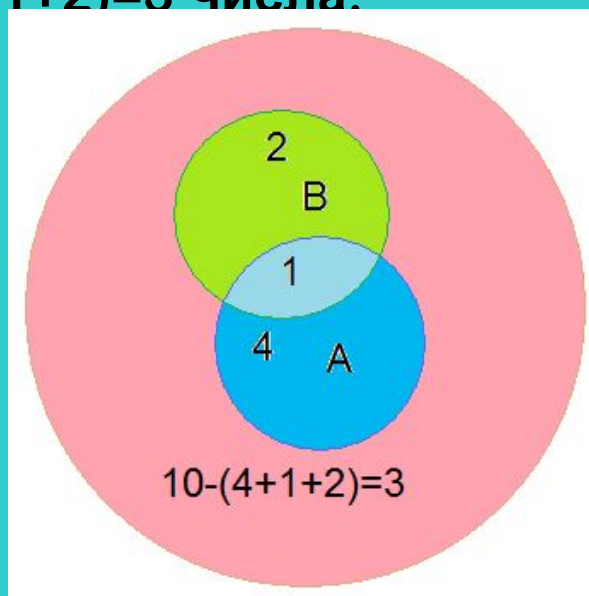
На втором рисунке подмножества A , A^* , B^* , B изображены по-другому: подмножество A – это область слева от вертикально черты, а подмножество A^* - это область справа от этой черты. Аналогично изображены B и B^* : область B – это верхний полукруг, а область B^* - это нижний полукруг.

- в) Пусть дано некоторое множество и указаны три свойства: А, В, С. В этом случае данное множество распадается на восемь частей. Это можно изобразить двумя способами.



- Задачи, решаемые с помощью кругов Эйлера
- Задача №1. Сколько натуральных чисел из первого десятка не делится ни на 2, ни на 3?

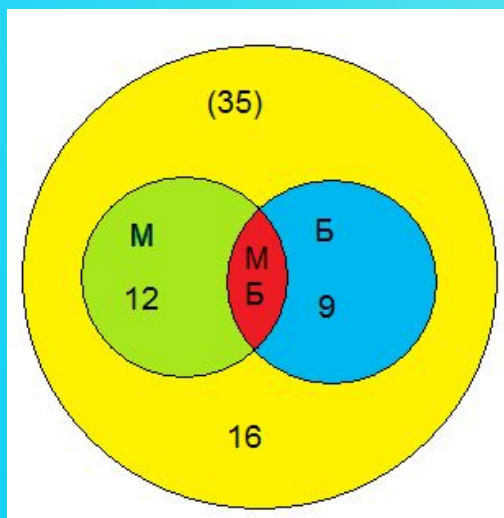
Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться кругами Эйлера. В нашем случае три круга: большой круг – это множество чисел от 1 до 10, внутри большого – два меньших круга, пересекающихся друг с другом. Пусть множество чисел, кратных 2 – это множество А, а множество чисел, кратных 3 – множество В. Рассуждаем. На 2 делится каждое второе число. Значит, таких чисел будет $10:2=5$. На 3 делится 3 числа ($10:3$). На 2 и 3 делятся те числа, которые делятся на 6. Такое число только одно. Поэтому множество А состоит из $5-1=4$ чисел, множество В – $3-1=2$ чисел. Отсюда следует, что в первом десятке содержится $10-(4+1+2)=3$ числа.



- Задача № 2. Задача, решаемая с помощью диаграммы Эйлера – Венна.
- Ребятам поручили изготовить кубики. Несколько кубиков сделали из картона, а остальные из дерева. Кубики были двух размеров: большие и маленькие. Часть из них покрасили в зеленый цвет, другую – в красный. Получилось 16 зеленых кубиков. Зеленых кубиков большого размера было 6. Больших зеленых из картона было 4. Красных кубиков из картона было 8, красных кубиков из дерева – 9. Больших деревянных кубиков было 7, а маленьких деревянных кубиков было 11. Сколько же всего получилось кубиков?
- Решение. Выполняем рисунок.



- **Составление задач, имеющих практическое значение.**
- Задача 1. В классе 35 учеников. В математическом кружке из них 12 занимаются, в биологическом - 9, а 16 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой.
- Решение: Мы видим, что кружки посещают 19 ребят, так как $35 - 16 = 19$, из них 10 человек посещают только математический кружок ($19 - 9 = 10$) и 2 биолога ($12 - 10 = 2$) увлекаются математикой.
- Ответ: 2 биолога.
- С помощью кругов Эйлера легко увидеть и другой способ решения задачи.
- Количество учеников изобразим с помощью большого круга, а внутри поместим круги поменьше.

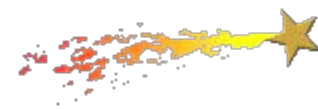


Очевидно, что в общей части кругов окажутся те самые биологи-математики, о которых спрашивается в задаче. Теперь посчитаем: Внутри большого круга 35 учеников, внутри кругов М и Б : $35 - 16 = 19$ учеников, внутри круга М - 12 ребят, значит, в той части круга Б, которая не имеет ничего общего с кругом М, находится $19 - 12 = 7$ учеников, следовательно, в МБ находится 2 ученика ($9 - 7 = 2$). Таким образом, 2 биолога увлекаются математикой.

- 1) $35 - 16 = 19$ (чел.);
- 2) $12 + 9 = 21$ (чел.);
- 3) $21 - 19 = 2$ (чел.).

Ответ: 2 биолога.

- Заполняем диаграмму.
- 1) Надо начинать с того подмножества, для которого указаны три свойства. Это большие зеленый кубики из картона – таких кубиков 4.
- 2) Далее ищем подмножества, для которого указаны два свойства из перечисленных трех. Это большие зеленые кубики – 6. Но это подмножество состоит из картонных и деревянных. Картонных было 4. Значит, деревянных $6-4=2$.
- 3) Больших деревянных кубиков 7. Из них зеленых – 2. Значит, красных будет $7-2=5$.
- 4) Красных деревянных кубиков 9., из них 5 – большие. Значит, маленьких красных кубиков из дерева будет $9-5=4$.
- 5) Маленьких деревянных кубиков 11. Из них красных – 4. Значит, маленьких зеленых кубиков из дерева $11-4=7$.
- 6) Всего зеленых кубиков 16. Зеленые кубики помещены в кольцеобразную часть, состоящую из четырех частей. Значит, маленьких зеленых кубиков из картона $16-(4+2+7)=3$.
- 7) Осталось последнее условие: красных кубиков из картона было 8. Нам и не надо узнать, сколько из них маленьких, сколько больших.
- 8) Считаем: $2+5+8+4+4+7+3=33$. Ответ: всего было изготовлено 33 кубика.





ВЫВОД

В результате работы над данной темой я пришла к следующим выводам:

- 1. Все множества чисел связаны между собой так, что каждое следующее, более объемное, включает в себя предыдущее множество полностью;
- 2. Любое натуральное число является элементом любого следующего множества.
- 3. Применение кругов Эйлера (диаграмм Эйлера-Венна) позволяет легко решить задачи, которые обычным путем разрешимы лишь при составлении системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Литература

«Математическая энциклопедия».

Для подготовки данной работы были использованы материалы с сайта

<http://minisoft.net.ru/>

http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=kr_e.html

http://reshizadachu.ucoz.ru/index/krugi_ehjlera/0-18