

# Кубические уравнения

Выполнил  
студент группы  
СТз-17-1  
Басистых В.Н

# Понятие кубического уравнения

- **Кубическое уравнение** - алгебраическое уравнение третьей степени,

$$ax^3 + bx^2 + cx - d = 0$$

- где  $a, b, c, d$  - коэффициенты, а  $x$  - переменная.
- Число  $x$ , обращающее уравнение в тождество, называется **корнем** или решением уравнения

Любое кубическое уравнение можно привести к более простому виду - каноническому :

$$y^3 + py + q = 0$$

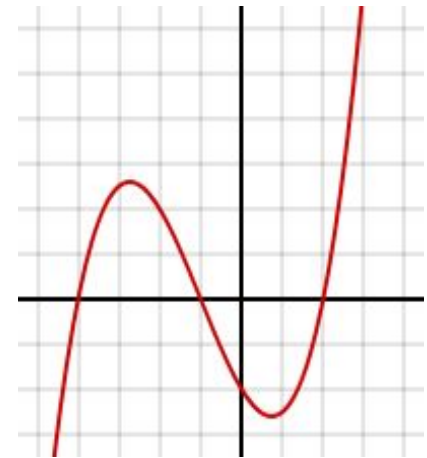


График кубического уравнения

Для нахождения корней кубического многочлена существует несколько способов:

1. С помощью вынесения общего множителя;
2. С помощью деления на многочлен;
3. С помощью теоремы Виета;
4. С помощью схемы Горнера;
5. Решение возвратных уравнений;
6. Графический способ.

# 1. Решение кубических уравнений с помощью вынесения общего множителя за скобки

Алгоритм решения:

1. Перегруппировать члены данного уравнения
2. Вынести общий множитель за скобки
3. Получить произведение равное нулю
4. Решить полученные уравнения.

**Пример:**  $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$

**Решение:**

1. Преобразуем

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 2x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 5x - 3x + 3 = 0$$

2. Попарно группируем и выносим общий множитель за скобку

$$2x^2(x-1) - 5x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

3. Выносим общий множитель  $(x-1)$ , получаем произведение множителей

$$(x-1)(2x^2 - 5x - 3) = 0$$

$$x-1=0 \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

4.  $x-1=0$        $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x_1 = 1 \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_2 = 3 \quad x_3 = -0,5$$

**Ответ:**  $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = -0,5$

## 2. Решение кубических уравнений с помощью деления многочлен на многочлен

Алгоритм решения:

1. Подобрать один корень из делителей свободного члена
2. Поделить многочлен на многочлен
3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

**Пример:**  $x^3+3x^2-6x-8=0$

1.

**Решение:** Рассмотрим делители свободного члена 8: (1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8).  
Найдем делитель при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

$$X=1: 1^3+3*1^2-6*1-8 \neq 0$$

$$X=-1: (-1)^3+3*(-1)^2-6*(-1)-8=0$$

2.

Так как кубическое уравнение можно представить в виде произведения множителей  $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-X_1)(x-X_2)(x-X_3)$ , то разделим многочлен

$x^3+3x^2-6x-8$  на многочлен  $(x+1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-6x-8 & x+1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+2x-8 \\ \hline 2x^2-6x & \\ -2x^2+2x & \\ \hline -8x-8 & \\ -8x-8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3.

получаем  $(x^2+2x-8)$

$$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)$$

$$x^2+2x-8=0$$

$$D=2^2-4*1*(-8)=36$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2*1}$$

$$X_2=2$$

$$X_3=-4$$

**Ответ:**  $x_1=-1; x_2=2; x_3=-4$

# 3. Теорема Виета

Алгоритм решения:

Подобрать корни, удовлетворяющие системе

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -b/a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c/a \\ x_1x_2x_3 = -d/a \end{array} \right.$$

,где  $x_1, x_2, x_3$  – корни уравнения



**Пример:**  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

**Решение:** Подбираем корни:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 * x_2 + x_2 * x_3 + x_1 * x_3 = 26 \\ x_1 * x_2 * x_3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 3 + 4 = 9 \\ 2 * 3 + 3 * 4 + 4 * 2 = 26 \\ 2 * 3 * 4 = 24 \end{cases}$$

**Ответ:**  $x_1=2; x_2=3; x_3=4$

# 4. Схема Горнера

Алгоритм решения:

1. По схеме Горнера найти корень уравнения
2. Решить получившееся квадратное уравнение

Если  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $g(x) = x - c$ , то при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  частное  $q(x)$  имеет вид  $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ , где  $b_0 = a_0$ ,  $b_k = c \cdot b_{k-1} + a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Остаток  $r$  находится по формуле  $r = c \cdot b_{n-1} + a_n$ .

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
$x = c$	$b_0 = a_0$	$b_1 = c \cdot b_0 + a_1$	$b_2 = c \cdot b_1 + a_2$	...	$b_{n-1} = c \cdot b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = f(c) = c \cdot b_{n-1} + a_n$

В первой строке этой таблицы записывают коэффициенты многочлена  $f(x)$ .

Если какая-то степень переменной отсутствует, то в соответствующей клетке таблицы пишется 0. Всегда старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого  $b_0 = a_0$ . Если  $x = c$  является корнем многочлена, то в последней клетке получается 0, т.е. остаток от деления будет равен нулю.

**Пример:** Решить уравнение  $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

**Решение:** Находим делители свободного члена 12:  $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$ . используя схему Горнера, найдем целые корни уравнения:

	$a_0=1$	$a_1=-1$	$a_2=-8$	$a_3=12$	
<del><math>x = 1</math></del>	1	0	-8	4	не корень
<del><math>x = -1</math></del>	1	-2	-6	18	не корень
<u><math>x = 2</math></u>	1	1	-6	0	корень

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3$$

**Ответ:**  $x_1 = 2; x_2 = 3$

## 5. Решение возвратных кубических уравнений

Алгебраическое уравнение вида:  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на симметричных относительно середины позициях, равны, то есть если  $a_{n-k} = a_k$ , при  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Алгоритм решения:

1. Корнем уравнения является  $x = -1$
2. Поделить многочлен на многочлен
3. Найти корни в получившемся квадратном уравнении

**Пример :**  $x^3-2x^2-2x+1=0$

**Решение :**  $x_1 = -1$  , по правилу нечётных степеней для возвратного уравнения.

$$x^3-2x^2-2x+1=(x+1)(x^2-3x+1)$$

$$x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

**Ответ :**  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ;  $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

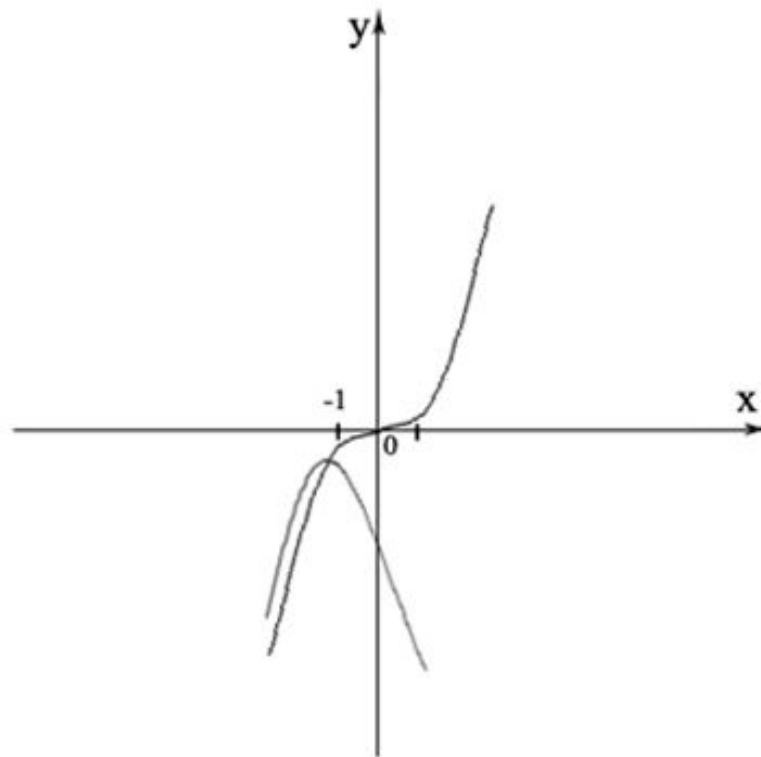
# 6. Графический способ

Алгоритм решения:

- 1. Разбить кубическое уравнение на два уравнения
- 2. Построить графики функций стоящих в левой и правой частях уравнения
- 3. Абсциссы точек пересечения графиков – корни заданного уравнения

*Пример* :  $x^3+4x^2+6x+3=0$

*Решение* : Преобразуем уравнение  $x^3 = -4x^2-6x-3$ . Построим графики функций  $y=x^3$  и  $y=-4x^2-6x-3$



*Ответ* :  $x_1=-1$



# Заключение

Просмотрев множество способов решения кубических уравнений, я остался верен двум на мой взгляд самым надёжным и практичным способам - это теорема Виета и схема Горнера, они позволяют быть уверенным в своем ответе.

Теперь, выбирая между ними, мне стоит лишь посмотреть на сложность коэффициента уравнения.