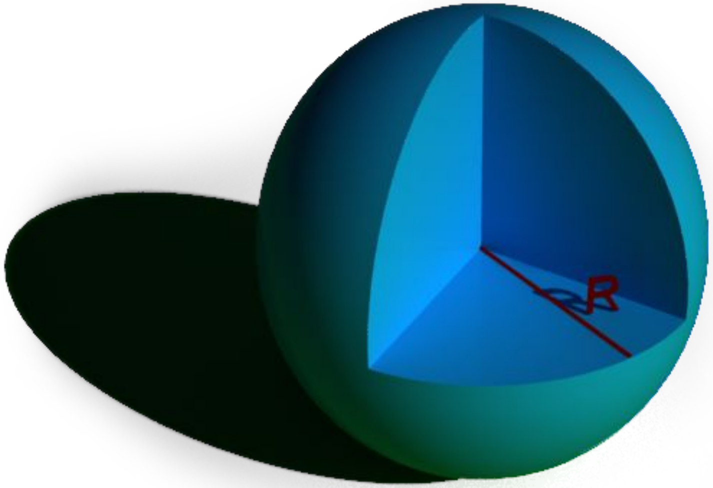
Куля і Сфера

Виконали:
Студенти групи 2-ОК-2
Самойленко В.А.
Фелько С.В.



Ку́ля —

це множина всіх точок простору, що перебувають від заданої точки O на відстані, не більшій за дану відстань R. При цьому точка O називається центром, а R — радіусом кулі. Будь-який відрізок, який сполучає центр кулі з точкою кульової поверхні, також називається радіусом.

Куля в аналітичній геометрії

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2$ рівняння кулі з центром в точці з координатами (a,d,c) та радіусом R .

Взагалі, рівняння кулі у n-вимірному просторі виглядає як

$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n) \leq R^2$ де (a1,a2,….an) — координати її центра.

Куля в 2-вимірному просторі — круг, а в n-вимірному, якщо $n \geq 4$, вона називається гіперкулею.

Площа сфери та об'єм кулі

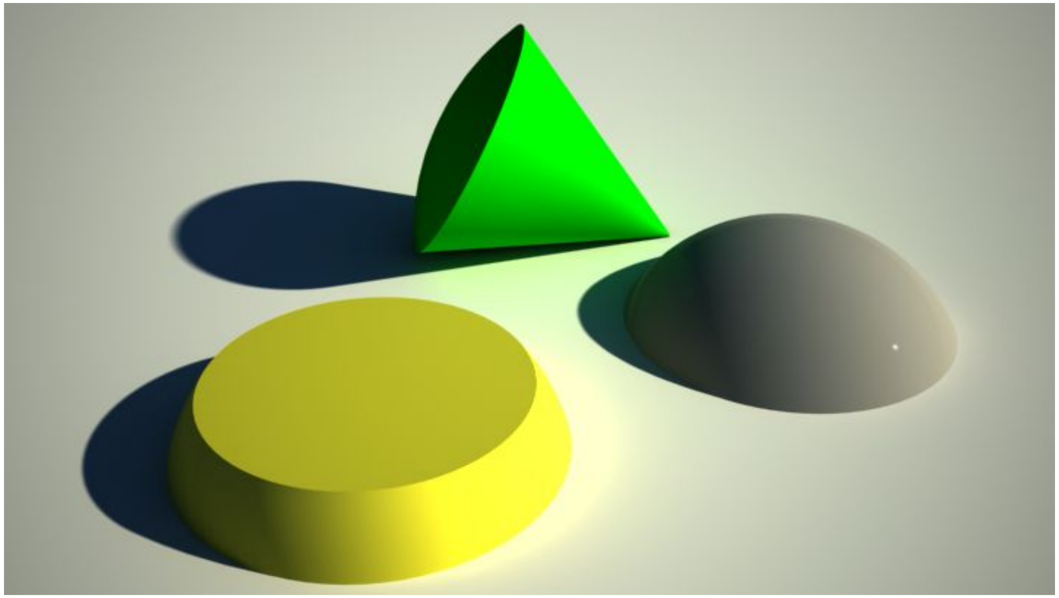
Площу сфери, яка обмежує кулю з радіусом R, можна підрахувати за формулою :

$S = 4\pi R^2$, що приблизно дорівнює $12,6R^2$

Площа поверхні кулі є найменшою серед площ поверхонь стереометричних тіл з однаковим об'ємом.

Об'єм кулі можна знайти за формулою : $V = \frac{4\pi R^3}{3} \approx 4,2R^3$

Переріз кулі площиною



Частини кулі:

- зеленим кольором позначено сектор,
- сірим — сегмент,
- жовтим — зріз кулі.

Сегмент кулі

Сегмент кулі — це та її частина, що утворюється внаслідок перерізу площиною. Основними величинами, які характеризують сегмент, є радіус кулі R та довжина перпендикуляра, опущеного на центр перерізу зі сфери , H . Довжина цього перпендикуляра також дорівнює різниці між радіусом R і відстанню від центра до перерізу l, тобто **H=R - l**.

Таким чином *об'єм сегмента* дорівнює $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$

а *площа поверхні* — $S = 4\pi R^2$

Зріз

Зріз — це стереометричне тіло, утворене перерізами кулі двома паралельними площинами.

Він характеризується такими величинами:

- *Радіус відповідної кулі*, **R** ;
- *Відстань між двома перерізами*, **H** ;
- *Радіуси обох перерізів*, **r**1, **r**2 .

Об'єм зрізу визначається формулою : $V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$

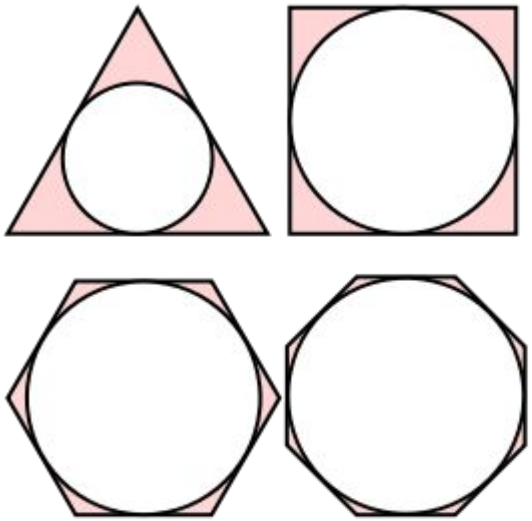
Сектор

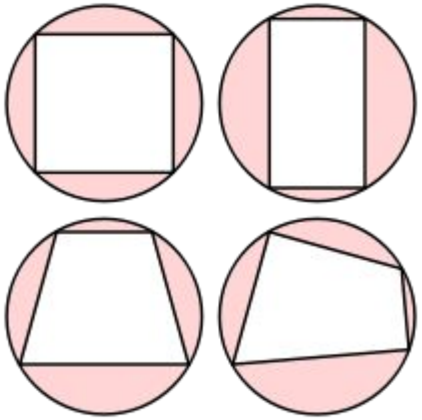
Сектор складається з кульового сегмента та конуса, основа якого збігається з основою сегмента, а вершина — з центром кулі . Сектор характеризують радіус кулі R та довжина перпендикуляра, опущеного на центр основи конуса зі сфери, H .

Об'єм сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

Площа його поверхні: $\pi R(2H + \sqrt{2HR - H^2})$

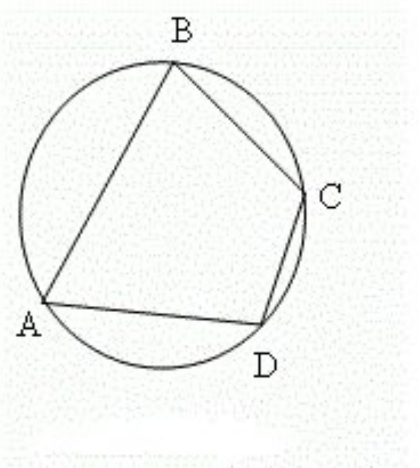
Вписані й описані кулі





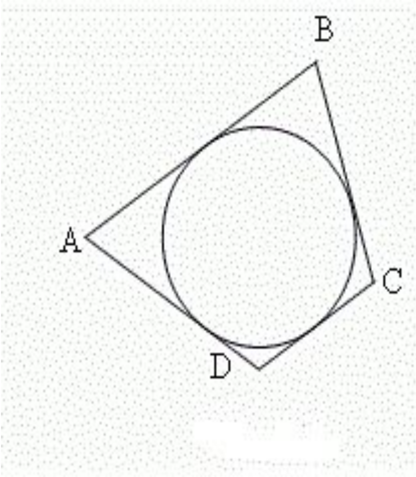
Описана куля

Куля називається описаною навколо багатогранника, якщо всі вершини багатогранника лежать на поверхні кулі (сфери). В цьому випадку багатогранник називають вписаним в кулю. Центр кулі, описаної навколо багатогранника, рівновіддалений від всіх його вершин, тобто є точкою перетину площин, проведених через середини ребер багатогранника (призми, піраміди) перпендикулярно до них. Відстань від центра кулі до вершин багатогранника — його радіус.



Вписана куля

Куля називається вписаною в багатогранник, якщо всі грані багатогранника дотикаються до кулі. Багатогранник у цьому випадку називається описаним навколо кулі (сфери). Центр кулі, вписаної у багатогранник, рівновіддалений від усіх його граней. Він є точкою перетину півплощин, проведених через ребра двогранних кутів, утворених двома суміжними гранями, які поділяють цей кут навпіл. Відстань від центра кулі до граней — його радіус.



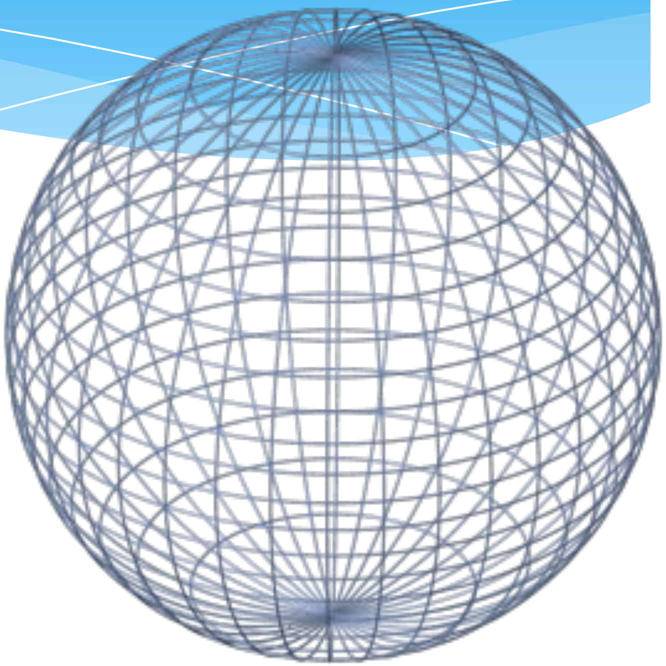
Додаткові відомості

Куля так само, як циліндр і конус, є тілом обертання. Вона утворюється при обертанні півкруга навколо його діаметра як осі. Цей діаметр називають віссю кулі, а його кінці — полюсами кулі.

Відрізок, який сполучає дві точки кульової поверхні і проходить через центр кулі, називається діаметром. Кінці будь-якого діаметра називаються діаметрально протилежними точками кулі.

Сфера

Сфе́ра (гр. σφαῖρα) - замкнута поверхня, геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки, що є центром сфери.



Рівняння

У аналітичній геометрії сфери з координатами O (x0, y0, z0) і радіусом r є геометричним місцем усіх точок (x, y, z), що $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$

У сферичній системі координат будь-яку точку сфери можна подати як:

$$x = x_0 + r\sin\theta\ \cos\varphi$$
$$y = y_0 + r\sin\theta\ \sin\varphi \qquad (0\le\varphi\le 2\pi, 0<\theta\le\pi)$$
$$z = z_0 + r\cos\theta$$

Сфера довільного радіусу з центром у початку координат задається диференціальним рівнянням:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0.$$

Це рівняння відображає факт, що вектори швидкості та координат точки, що рухається по поверхні сфери постійно ортогональні один до одного.

Формули

Площа поверхні: $S_O = 4\pi r^2$

Замкнений об'єм: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Площа сегмента: $V_{KS} = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h)$

Момент інерції: $J = \frac{2}{5}mr^2$

У сфери найменша площа поверхні з-поміж всіх тіл, що замикають даний об'єм, та найбільший замкнений об'єм при даній площі поверхні. З цієї причини, сфера часто з'являється у природі: краплі води в невагомості, планети, глобули та інші.