Оглавление

- Квадратное уравнение и его корни.
- Неполные квадратные уравнения.
- Приведенное квадратное уравнение.
- Теорема Виета.
- Уравнения, сводящиеся к квадратным.
- Решение задач с помощью квадратных уравнений.
- Задания для самостоятельной работы.

Квадратным уравнением называется уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – заданные числа, $a\neq0$, x -неизвестное.

Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения обычно называют так: a – первым или старшим коэффициентом, b – вторым коэффициентом, c – свободным членом.

Например, в уравнении $3x^2-x+2=0$ старший (первый) коэффициент $a=3$, второй коэффициент $b=-1$, а свободный член $c=2$.

Решение многих задач математики, физики, техники сводится к решению квадратных уравнений:

$2x^2+x-1=0$, $x^2-25=0$, $4x^2=0$, $5t^2-10t+3=0$.

При решении многих задач получаются уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований сводятся к квадратным. Например, уравнение $2x^2+3x=x^2+2x+2$ после перенесения всех его членов в левую часть и приведения подобных членов сводится к квадратному уравнению $x^2+x-2=0$.

Рассмотрим уравнение общего вида: ***ax²+bx+c=0, где*** a≠0.

Корни уравнения находят по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Выражение $D=b^2-4ac$

называют *дискриминантом* квадратного уравнения.

Если D<0, то уравнение не имеет действительных корней; если D=0, то уравнение имеет один действительный корень; если D>0, то уравнение имеет два действительных корня.

В случае, когда D=0, иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.

Неполные квадратные уравнения.

Если в квадратном уравнении **$ax^2+bx+c=0$** второй коэффициент *b* или свободный член *c* равны нулю, то квадратное уравнение называется *неполным.*

Неполное квадратное уравнение может иметь один из следующих видов:

$$ax^2=0$$

$$ax^2+c=0, c\neq 0$$

$$ax^2+bx=0, b\neq 0.$$

Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения - проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называется ***приведенным.*** В этом уравнении старший коэффициент равен единице: a=1.

Корни приведенного квадратного уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Этой формулой удобно пользоваться, когда p – четное число.

Пример: Решить уравнение $x^2-14x-15=0$. По формуле находим:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49+15} = 7 \pm 8$$

Ответ: $x_1=15$, $x_2=-1$.

Теорема Виета. Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то есть $x_1+x_2=-p$, $x_1 x_2 = q$ *(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).*

Исследование связи между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

уравнение	a	p	q	X_1	X_2	X_1+X_2	X_1X_2
$X^2-X-6=0$	1	-1	-6	3	-2	1	-6
$X^2+6X+5=0$	1	6	5	-1	-5	-6	5
$X^2-6X+8=0$	1	-6	8	4	2	6	8
$X^2+4X-12=0$	1	4	-12	2	-6	-4	-12

Утверждение №1:

Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

Тогда числа x_1, x_2 , p, q связаны равенствами:

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1 x_2=q$$

Утверждение № 2:

Пусть числа x_1, x_2, p, q связаны равенствами $x_1+x_2=-p$, $x_1 x_2=q$.

Тогда x_1 и x_2 – корни уравнения

$$x^2+px+q=0$$

Следствие: $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$

Ситуации, в которых может использоваться *теорема Виета*.

- Проверка правильности найденных корней.
- Определение знаков корней квадратного уравнения.
- Устное нахождение целых корней приведенного квадратного уравнения.
- Составление квадратных уравнений с заданными корнями.
- Разложение квадратного трехчлена на множители.

Биквадратные уравнения

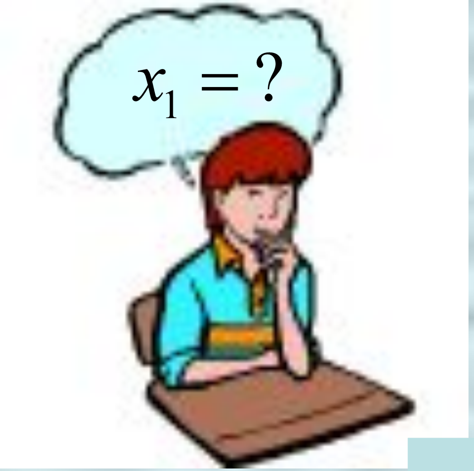
Биквадратным называется уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где *a≠0*. Биквадратное уравнение решается методом введения новой переменной: положив $x^2=t$, получим квадратное уравнение

$$at^2+bt+c=0$$

Пример: Решить уравнение

$$x^4+4x^2-21=0$$

Положив $x^2=t$, получим квадратное уравнение $t^2+4t-21=0$, откуда находим $t_1=-7$, $t_2=3$. Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2=-7$, $x^2=3$.



Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим:

$$x_1=-\sqrt{3};\, x_2=\sqrt{3}$$

которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.

Решение задач с помощью квадратных уравнений

Задача 1:

Автобус отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 40 км. Через 10 минут вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найти скорость такси и автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

	Скорость V (км/ч)	Время t (ч)	Путь S (км)
Автобус	x	$\frac{40}{x}$ На 10 мин	40
Такси	X+20	$\frac{40}{x+20}$	40

10 мин = $\frac{1}{6}$ ч

Составим и решим уравнение: $\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}$

Умножим обе части уравнения на 6х(х+20), получим:

$$40 \cdot 6 \cdot (x+20) - 40 \cdot 6x = x(x+20)$$

$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 60, x_2 = -80.$

При этих значениях х знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны 0, поэтому $x_1 = 60, x_2 = -80$ являются корнями уравнения. Так как скорость автобуса положительна, то условию задачи удовлетворяет только один корень: х=60. Поэтому скорость такси 80 км/ч.

<u>Ответ:</u> Скорость автобуса 60 км/ч, скорость такси 80 км/ч.

Задача 2:

На перепечатку рукописи первая машинистка тратит на 3 ч меньше, чем вторая. Работая одновременно, они закончили перепечатку всей рукописи за 6ч 40 мин. Сколько времени потребовалось бы каждой из них на перепечатку всей рукописи?

	Количество работы в час	***Время t (ч)***	***Объем работы***
Первая машинистка	$\frac{1}{x}$ Вместе за 6ч 40мин	x	1
Вторая машинистка	$\frac{1}{x+3}$	x+3	1

6 ч 40 мин = 6 $\frac{2}{3}$ ч

Составим и решим уравнение: $6\frac{2}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3})=1$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}$$

Умножая обе части уравнения на 20х(х+3), получаем:

$$20(x+3)+20x=3x(x+3)$$

$$40x+60=3x^2+9x$$

$$3x^2-31x-60=0$$

Корни этого уравнения: $x_1=12, x_2=-\frac{5}{3}.$

При этих значениях х знаменатели дробей, входящих в уравнение, не равны 0, поэтому $x_1=12, x_2=-\frac{5}{3}$ - корни уравнения. Так как время положительно, то х=12ч. Следовательно

Первая машинистка затрачивает на работу 12 ч, вторая – 12 ч + 3 ч = 15 ч

Ответ:12 ч и 15 ч.

Задания для самостоятельной работы:

1. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
2. $4x^2 - 11x + 6 = 0$
3. $x^2 + 2x - 15 = 0$
4. $x^2 - 7x + 12 = 0$
5. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
6. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

7. Найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 210.

Желаем удачи!!!

Франсуа Виет

Франсуа Виет родился в 1540 году во Франции. Отец Виета был прокурором. Сын выбрал профессию отца и стал юристом, окончив университет в Пуату. В 1563 году он оставляет юриспруденцию и становится учителем в знатной семье. Именно преподавание побудило в молодом юристе интерес к математике.

Виет переезжает в Париж, где легче узнать о достижениях ведущих математиков Европы. С 1571 года Виет занимает важные государственные посты, но в 1584 году он был отстранен и выслан из Парижа. Теперь он имел возможность всерьез заняться математикой.

В 1591 году он издает трактат «Введение в аналитическое искусство», где показал, что, оперируя с символами, можно получить результат, применимый к любым соответствующим величинам. Знаменитая теорема была обнародована в том же году.

Громкую славу получил при Генрихе III во время Франко-Испанской войны. В течение двух недель, просидев за работой дни и ночи, он нашел ключ к Испанскому шифру. Умер в Париже в 1603 году, есть подозрения, что он был убит.