

# Квадратные уравнения

---

**Квадратное уравнение имеет  
действительные положительные корни,  
если**

$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0. \end{array} \right.$$

---

**Квадратное уравнение имеет  
действительные отрицательные  
корни, если**

$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0. \end{array} \right.$$

---

**Квадратное уравнение имеет действительные корни  
различных знаков,  
причем положительный корень имеет больший модуль,  
если**

$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0. \end{array} \right.$$

---

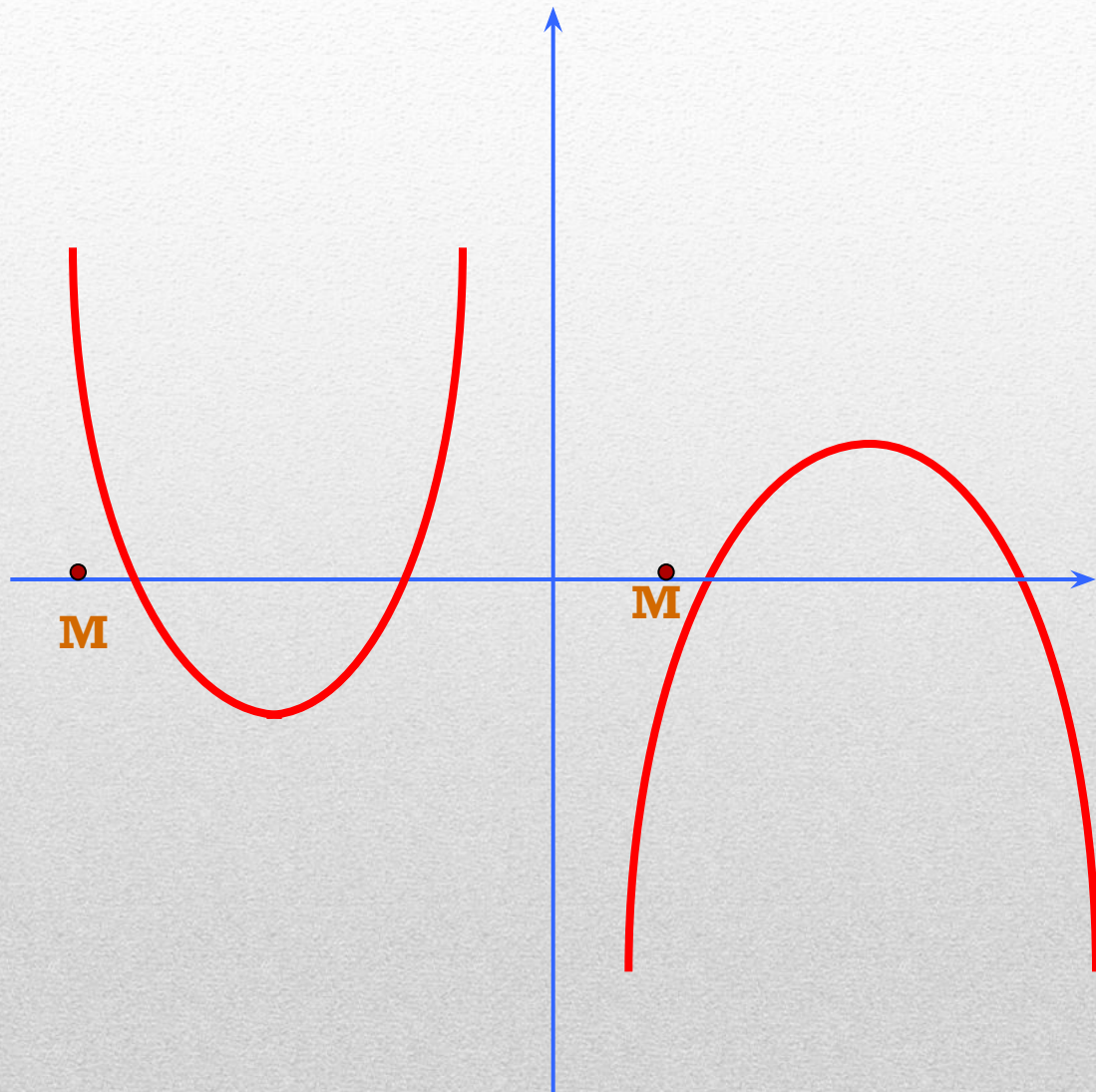
**Квадратное уравнение имеет действительные корни  
различных знаков,  
причем отрицательный корень имеет больший модуль,  
если**

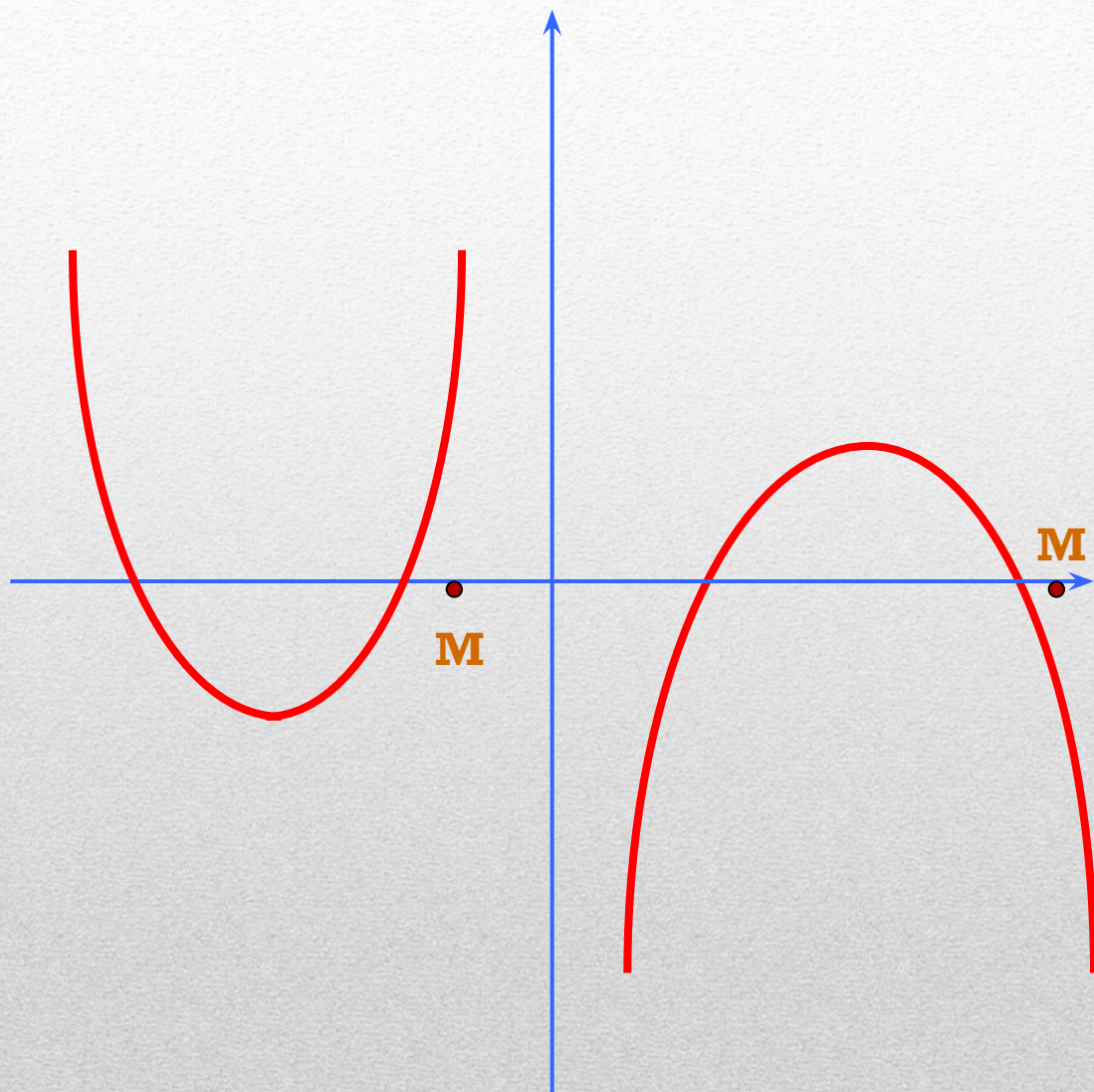
$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0. \end{array} \right.$$

---

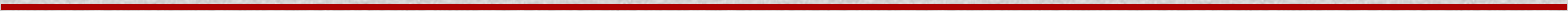
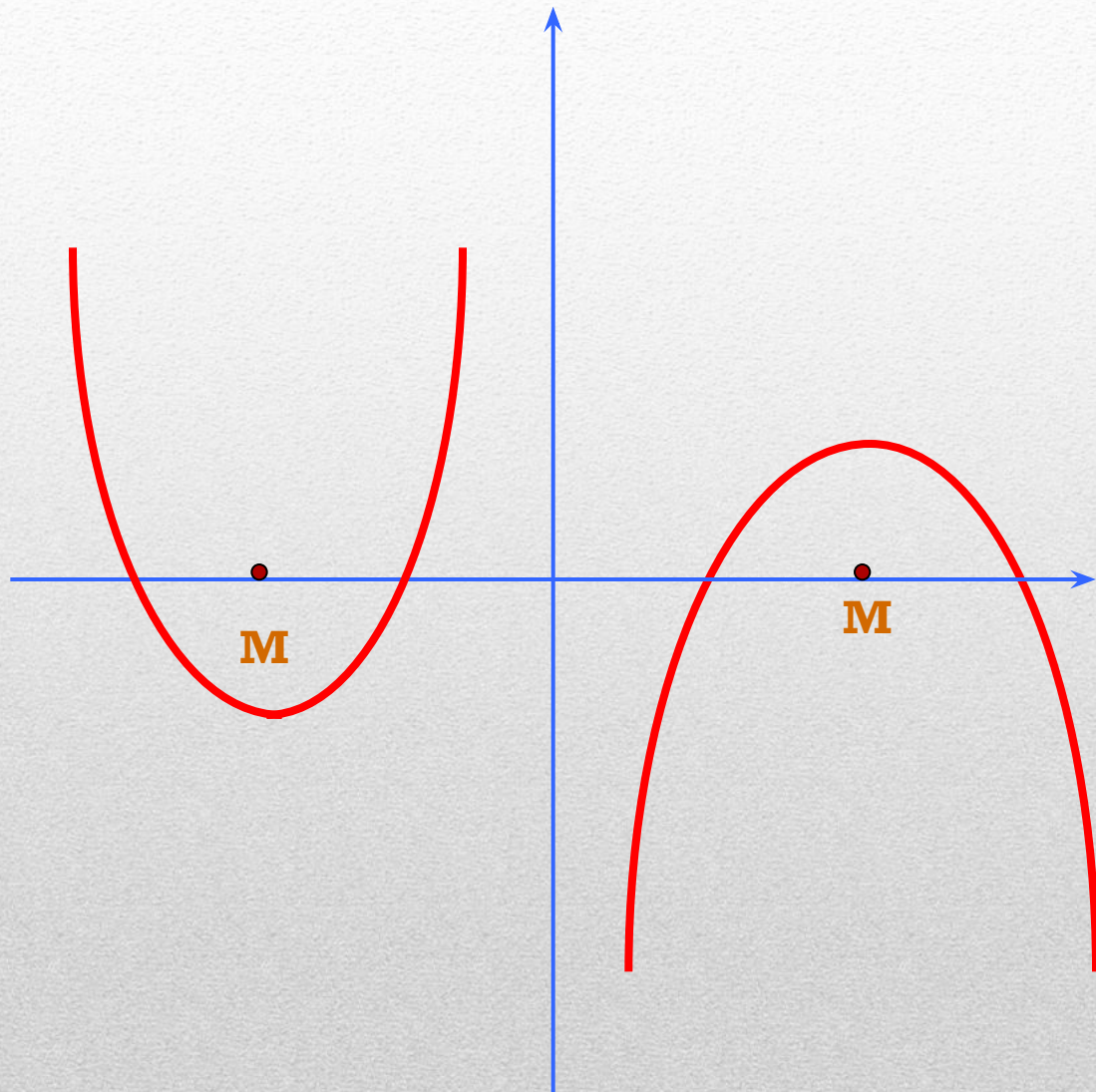
Расположение корней относительно заданной точки определяется направлением ветвей соответствующей параболы, координатами вершины и значениями в заданных точках. В этих задачах хорошо работают графические иллюстрации.

---









**Оба корня квадратного трехчлена МЕНЬШЕ  
числа  $M$ ,  
тогда и только тогда, когда**

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0. \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0. \end{array} \right.$$

---

**Оба корня квадратного трехчлена  
больше числа  $M$ ,  
тогда и только тогда, когда**

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > M, \\ f(M) > 0. \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > M, \\ f(M) < 0. \end{array} \right.$$

---

**Один из корней квадратного трехчлена  
меньше числа  $M$ ,  
а другой больше числа  $M$ ,  
тогда и только тогда, когда**

$$\begin{cases} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(M) < 0. \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

---

При каких значениях  
параметра  $m$  уравнение

$$(m - 1)x^2 + (m + 4)x + m + 7 = 0$$

имеет не более одного  
действительного корня?

---

При каких значениях  
параметра  $m$  корни  
уравнения

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$$

различны и положительны?

---

При каких значениях параметра  $a$   
корни уравнения

$$(a - 1)x^2 - (4a + 5)x + a - 3 = 0$$

таковы, что сумма  
их квадратов равна 1,75?

---

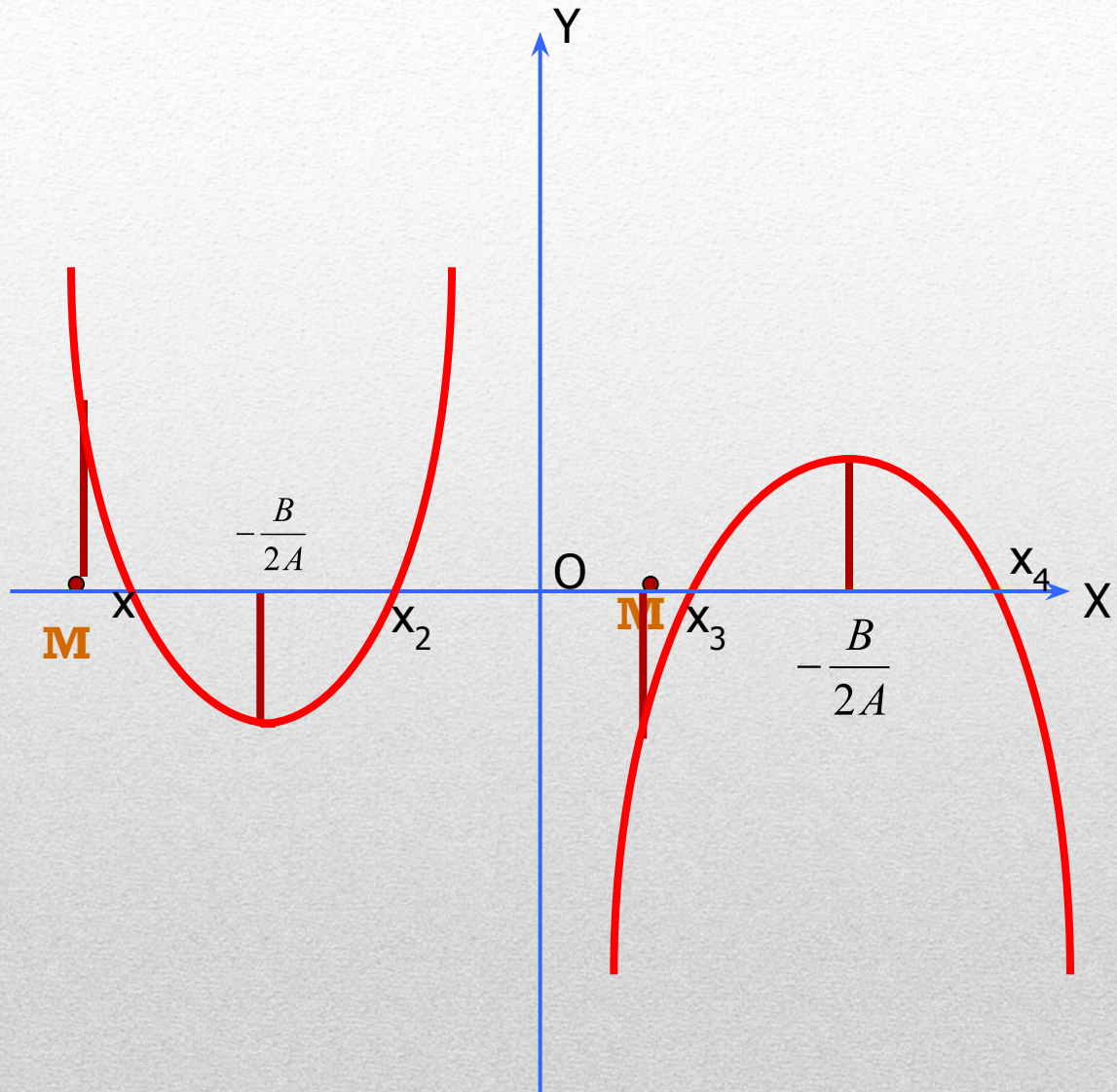
Нахождение значений  
параметра,  
при которых решения  
удовлетворяют некоторому  
условию.

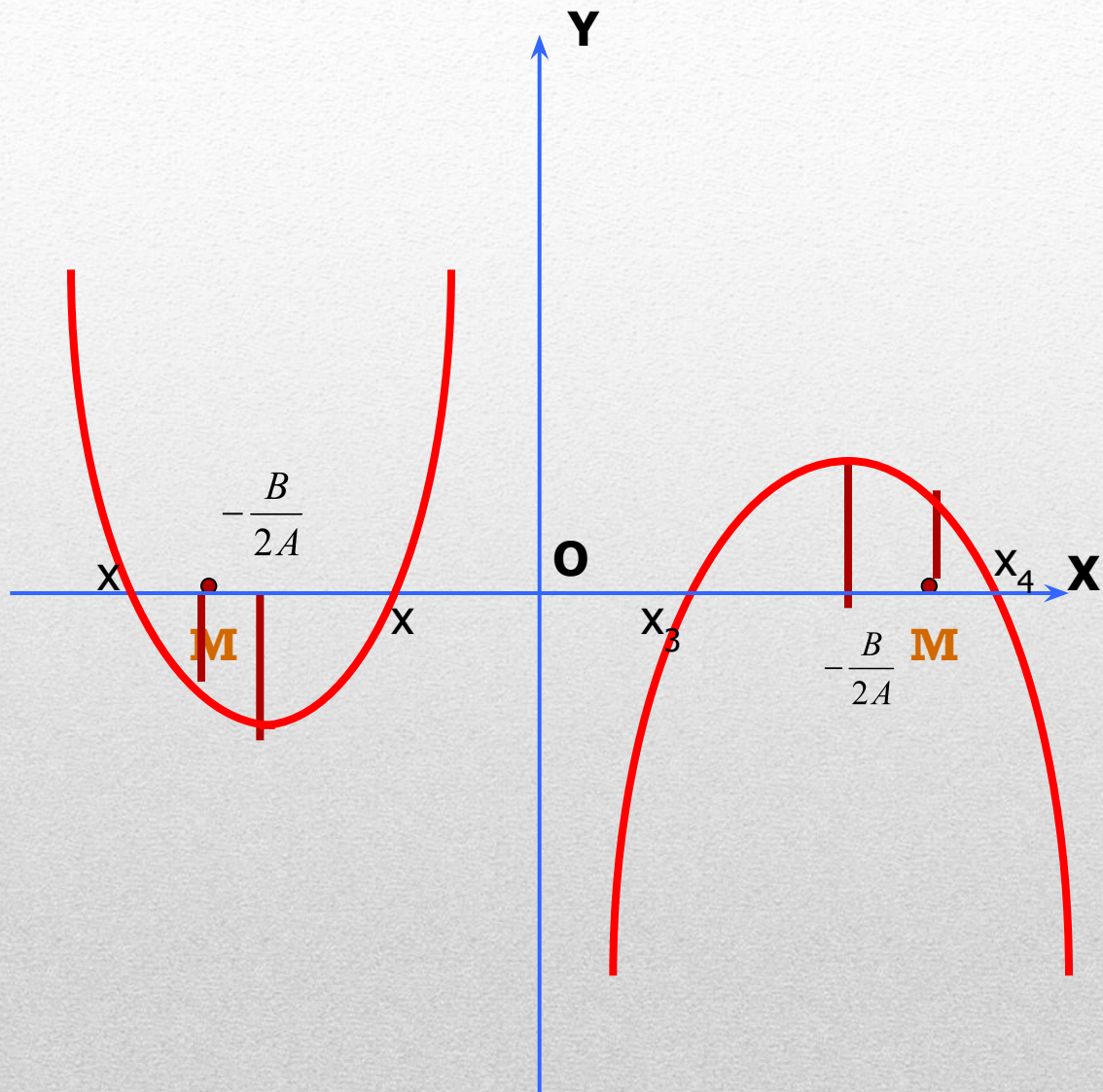
---

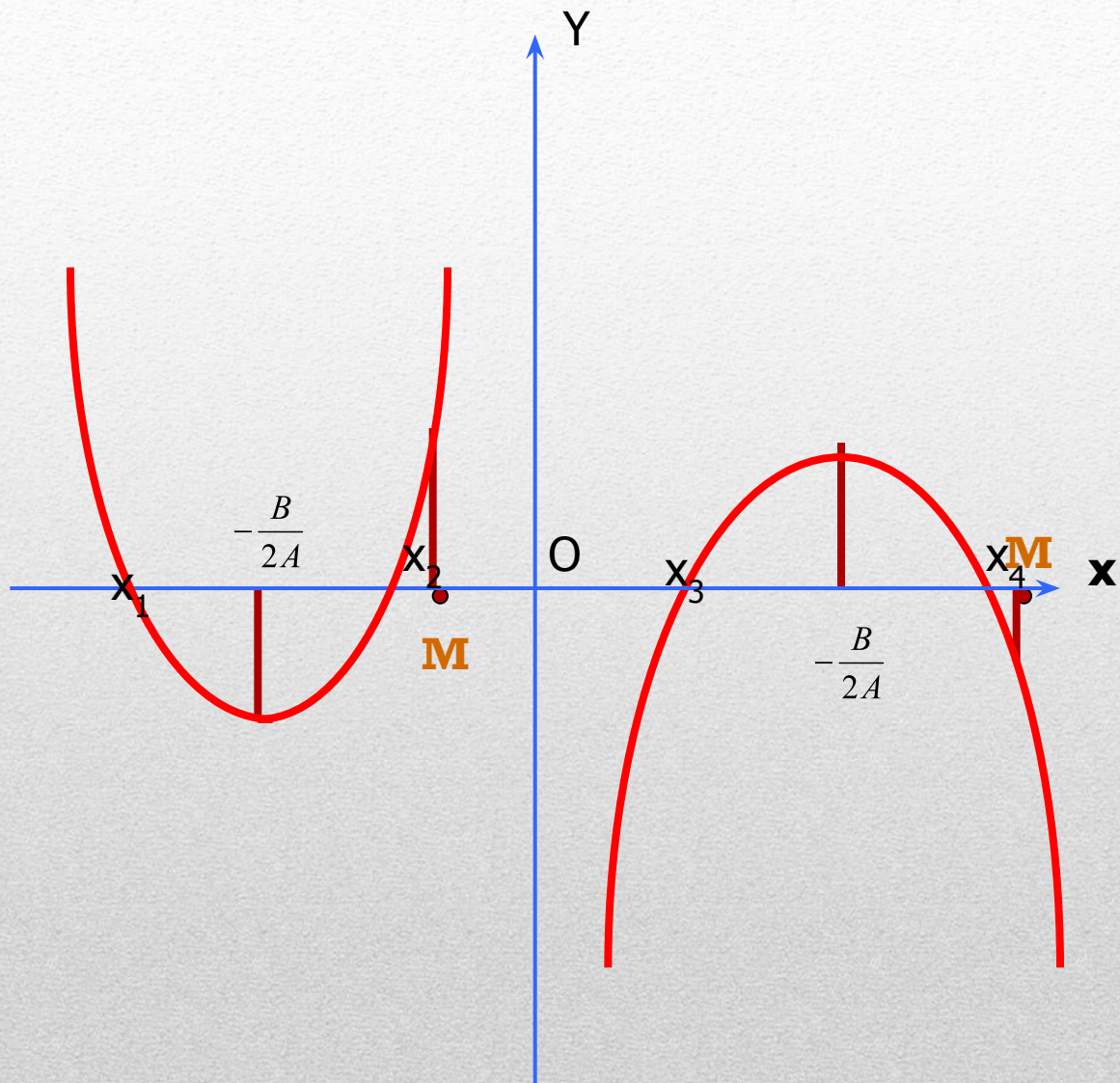


Решение уравнений  
для всех значений параметра  $a$

---







Оба корня квадратного уравнения

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$$

**больше** заданного числа **M** тогда и только тогда, когда имеет место система

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} > M. \end{cases}$$

Оба корня квадратного уравнения

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$$

**меньше** заданного числа **M** тогда и только тогда, когда имеет место система

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} < M. \end{cases}$$

Заданное число **M** лежит между корнями

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$$

тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$Af(M) < 0$$

При каких значениях параметра  $a$  корни квадратного уравнения  
 $x^2 + (a + 1)x + 3 = 0$   
лежат по разные стороны от числа  $2$ ?

### Решение.

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 + (a + 1)x + 3$ .

$$f(2) < 0;$$

$$f(2) = 4 + 2a + 2 + 3 = 2a + 9 < 0$$

$$2a < -9$$

$$a < -4.5$$

Ответ.  $a \in (-\infty; -4.5)$

---

При каких значениях параметра  $a$  оба корня квадратного уравнения

$$(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$$

больше  $\frac{1}{2}$ .

**Решение.**

Рассмотрим функцию  $f(x) = (2-a)x^2 - 3ax + 2a$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} > M. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (2-a)\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 2a\right) > 0, \\ 9a^2 - 8a(2-a) > 0, \\ \frac{3a}{2-a} > \frac{1}{2}; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (2-a)\left(\frac{2}{4} + \frac{a}{4}\right) > 0, \\ a^2 - 16a > 0, \\ \frac{3a}{2-a} - \frac{1}{2} > 0; \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2-a)(a+2) > 0, \\ a(a-16) > 0, \\ \frac{6a-2+a}{2-a} > 0; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a \in (-2; 2) \\ a \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty), \\ \frac{7a-2}{2-a} > 0; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a \in (-2; 2) \\ a \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty), \\ a \in \left(\frac{2}{7}; 2\right); \end{array} \right.$$

Решений нет.

**Ответ.** Решений нет.

Найти все значения параметра  $a$ , при которых  
оба корня квадратного уравнения

$$x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2) = 0$$

больше 3.

Решение.

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2)$

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} > M. \end{cases} \iff \begin{cases} 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0, \\ 36a^2 - 8 - 8a - 36a^2 > 0, \\ \frac{6a}{2} > 3. \end{cases} \iff \begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a + 1 > 0, \\ a > 1. \end{cases} \iff \begin{cases} a \in (-\infty; 1) \cap \left(1\frac{2}{9}; +\infty\right), \\ a > -1, \\ a > 1. \end{cases}$$

$$a \in \left(1\frac{2}{9}; +\infty\right)$$

Ответ:  $\left(1\frac{2}{9}; +\infty\right)$



Найти все значения параметра  $a$ , которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$$

меньше  $-1$ .

Решение.

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2)$ .

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} < M. \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 4a + 1 - 2a + 4a^2 > 0, \\ 16a^2 - 4 + 8a - 16a^2 > 0, \\ -\frac{4a}{2} < -1. \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cap (1; +\infty) \\ a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ.  $a \in (1; +\infty)$

---