

Квадратные уравнения

Учитель математики

ГБОУ Лицей №126 г.Санкт-Петербург

Ольшина Марина Валерьевна

Цели:

1. Систематизация знаний по теме «Квадратные уравнения»; интереса к предмету.
2. Развитие

Задачи:

1. **Знать** определение квадратного уравнения, типы, методы решения;
2. **Понимать** отличительные особенности квадратных уравнений;
3. **Применять** полученные знания при решении рациональных, иррациональных уравнений, сокращении дробей, решении задач.



ForexAW.com

Квадратные
уравнения
умели решать
около 2000 лет
до н. э.
вавилоняне.

ДИОФАНТ



325 – 409 г.г. по Р. Х.
знаменитый
александрийский
математик.

✧ В арифметике Диофанта отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

✧ При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные.

Задача Диофанта

Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96.

Его произведение больше числа, а сумма равна 100



Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96.

Значит, одно из этих чисел будет больше половины их суммы, т. е. $(10 + x)$,

другое же меньше, т. е. $(10 - x)$.

Разность между ними $2x$.

Отсюда уравнение:

$$(10+x)(10-x) = 96,$$

$$100 - x^2 = 96.$$

$$x^2 - 4 = 0$$

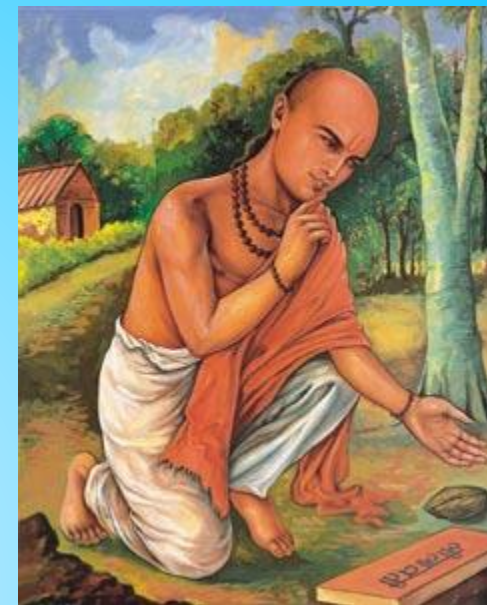
$$x = 2$$

Одно из искомых чисел равно **12**, другое **8**.

Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

Интересные способы решения
квадратных уравнений
встречаются в трудах индийского
ученого Бхаскары

(600 – около 680г.г.).



И арабского ученого
Ал – Хорезми

(780 – около 850г.г.)

Задача знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары:

Обезьянок резвых стая всласть поевши, развлекалась, их в квадрате часть восьмая на поляне забавлялась, а двенадцать по лианам стали прыгать, повисая. Сколько ж было обезьянок, ты скажи мне, в этой стае?



Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений.

Бхаскара пишет:

$$\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$$

$$x^2 - 64x = -768$$

и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 1024, получая затем:

$$x^2 - 64x + 1024 = -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256,$$

$$x - 32 = \pm 16,$$

$$x_1 = 16, \quad x_2 = 48.$$



Задача Ал – Хорезми:

Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень (подразумевается корень уравнения $x^2 + 21 = 10x$).

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.



Определение квадратного уравнения

Квадратным уравнением

называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a, b, c -любые действительные числа, причем

$$a \neq 0.$$

Определение корня

- Корнем квадратного уравнения
 $ax^2 + bx + c = 0$

называют такое значение переменной x ,
при котором квадратный трехчлен
 $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль;

Типы квадратных уравнений

- полные

$$b \neq 0, c \neq 0$$

- неполные

а) $b = 0$

б) $c = 0$

в) $b = 0; c = 0$

Данные уравнения разбейте на полные и неполные:

а) $9x^2=0$;

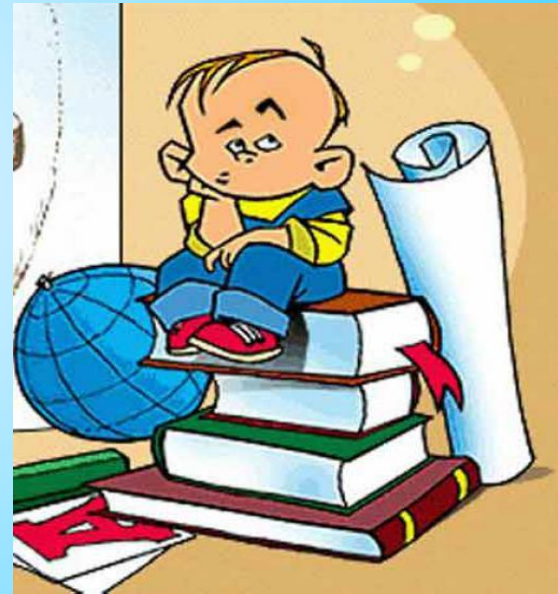
б) $3x + x^2 + 1 = 0$;

в) $2x^2 - 32 = 0$;

г) $x^2 + 4x = 0$;

д) $2x^2 + 5x - 7 = 0$;

е) $12 - x^2 + 3x = 0$.



ПОЛНЫЕ:

б) $3x+x^2+1=0$;

д) $2x^2+5x-7=0$;

е) $12-x^2+3x=0$.

НЕПОЛНЫЕ:

а) $9x^2=0$;

в) $2x^2-32=0$;

з) $x^2+4x=0$.



Способы решения неполных квадратных уравнений

$$b=0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

если $-\frac{c}{a} \geq 0$, то

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$c=0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = -\frac{b}{a}$$

$$b=0; c=0$$

$$ax^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Решите уравнения:

$$a) x^2 = 9; \quad x_1 = -3; x_2 = 3$$

$$б) 10x - x^2 = 0; \quad x_1 = 0; x_2 = 10$$

$$в) 2x^2 - 8 = 0; \quad x_1 = -2; x_2 = 2$$

$$г) 3x^2 + 27 = 0. \quad \text{корней}$$

нет

Формулы корней полного квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac$$

```
graph TD; A["D = b^2 - 4ac"] --> B["D < 0"]; A --> C["D = 0"]; A --> D["D > 0"];
```

$$D < 0$$

Корней
нет

$$D = 0$$

Один
корень

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$D > 0$$

Два корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Формула четного коэффициента

$$b=2k$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$a=1$$

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$$

Теорема Виета

x_1, x_2 - корни квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$a = 1$$

$$x_1 + x_2 = -b; \quad x_1 \cdot x_2 = c$$

1. Найдите корни квадратного уравнения,
не используя формулы корней:

$$a) x^2 - 5x + 6 = 0; \quad x_1 = 2; x_2 = 3$$

$$б) x^2 + 3x - 4 = 0; \quad x_1 = -4; x_2 = 1$$

$$в) x^2 - 5x + 10 = 0. \quad \text{Корней нет}$$

2. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа 3 и -7:

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

Применение квадратных уравнений

- решение рациональных уравнений;
- решение иррациональных уравнений;
- решение задач;
- разложение квадратного трехчлена на множители;
- сокращение дробей.

Задание:

1. Решите уравнения:

а) $\frac{3}{x^2 + 2} = \frac{1}{x}$;

б) $x^2(x^2 - 15) - 16 = 0$;

в) $x - \sqrt{2 - x} = 0$.

2. Сократите дробь:

$$\frac{5x^2 + 3x - 2}{25x^2 - 4}$$

3. При каком значении параметра a уравнение $x^2 - ax + 9 = 0$ имеет один корень?

Проверь себя!

$$1.a) \frac{3}{x^2 + 2} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x(x^2 + 2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2; \\ x \neq 0 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 1;2.



Проверь себя!

$$б) x^2(x^2 - 15) - 16 = 0$$

$$x^4 - 15x^2 - 16 = 0$$

$$y = x^2$$

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 16 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

$$x^2 = 16$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

$$x^2 = -1$$

Корней нет



Ответ: -4;4.

Проверь себя!

$$в) x - \sqrt{2-x} = 0$$

$$x = \sqrt{2-x}$$

$$x^2 = 2-x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Проверка:

$$x = -2$$

$$-2 - \sqrt{2 - (-2)} \neq 0$$

-2-посторонний корень

$$x = 1$$

$$1 - \sqrt{2-1} = 0$$

Ответ: 1.

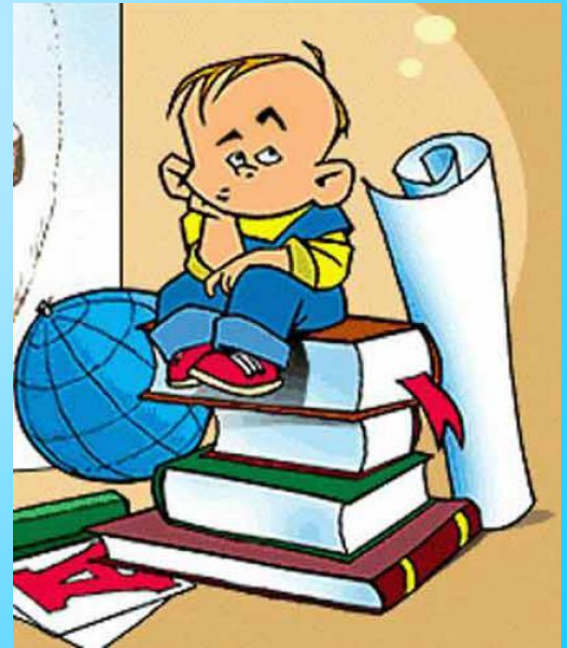
Проверь себя!

2. Сократить дробь:

$$\frac{5x^2 + 3x - 2}{25x^2 - 4} = \frac{5(x - \frac{2}{5})(x + 1)}{(5x - 2)(5x + 2)} = \frac{(5x - 2)(x + 1)}{(5x - 2)(5x + 2)} = \frac{x + 1}{5x + 2}$$

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{5} \\ x = -1 \end{array} \right.$$



Проверь себя!

$$3. x^2 - ax + 9 = 0$$

Квадратное уравнение имеет один корень, если

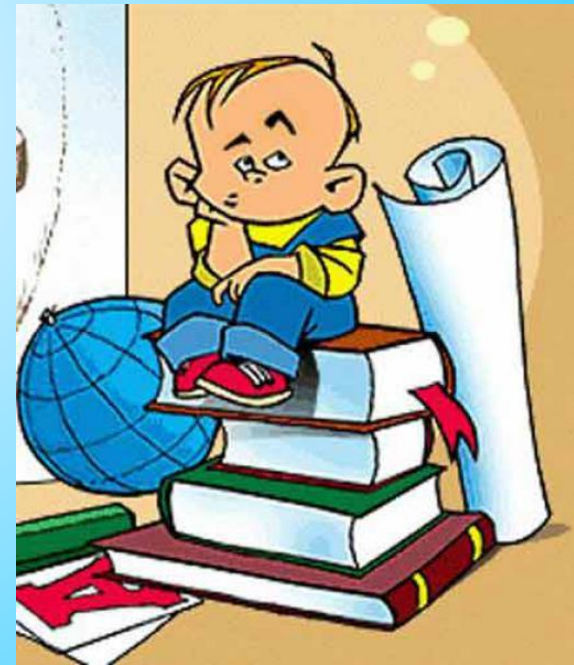
$$D=0; D = a^2 - 36$$

$$a^2 - 36 = 0$$

$$a^2 = 36$$

$$\begin{cases} a = -6 \\ a = 6 \end{cases}$$

Ответ: $a=-6; a=6$.



Составьте математическую модель для решения задачи:

В прямоугольном треугольнике один катет меньше гипотенузы на 4 см, а другой – на 8 см. Найдите гипотенузу.

$$(x - 4)^2 + (x - 8)^2 = x^2$$

Домашнее задание:

1. Решите уравнения: а) $\frac{7}{x+1} - \frac{6}{x} = 0;$

б) $x^2(x^2 + 3) = 4;$

в) $\sqrt{5x-4} - x = 0$

2. Сократите дробь:

$$\frac{2x^2 + 11x - 21}{4x^2 - 9}$$

3. При каком значении параметра a уравнение $x^2 + 2ax + 9 = 0$ имеет один корень?

Использованные ресурсы

1. Ш.А.Алимов. Алгебра. Учебник для 8 класса.

М. : Просвещение, 2007

2. М.В.Ткачева. Алгебра 8 класс. Дидактические материалы к учебнику Алимова. -М. : Просвещение, 2011.

3. Изображения:

Диофант <http://lunkina.hop.ru/diofant.jpg>

Бхаскара

<http://living-smartly.com/wp-content/uploads/2013/02/Bhaskarach%C4%81rya.jpg>

Ал-Хорезми

http://rudocs.exdat.com/pars_docs/tw_refs/384/383503/383503_html_64e7f358.jpg

Вавилон http://forexaw.com/TERMs/Geografiya/img228249_4-9_Mesopotamiya.jpg

Веселая картинка

<http://mobka.info/sys/data/avators/3/gsiGQM.jpg>