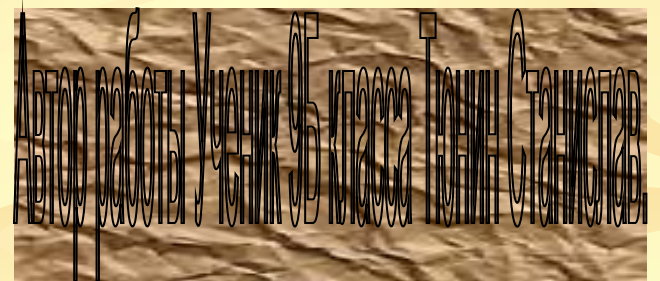


Квадратные уравнения.





(Чосер, английский поэт, средние века.)



Цель работы:

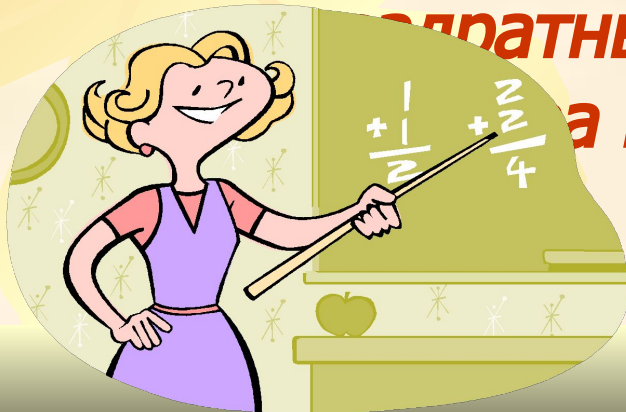
1. Изучить тему «Квадратные уравнения».
2. Исследовать зависимость между коэффициентами и корнями квадратного уравнения.

План работ

1. Изучить теорию вопроса:

- Квадратные уравнения. Виды квадратных уравнений.
- Методы решения квадратных уравнений.
- Зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

2. Приёмы рационального решения квадратных уравнений, используя связь между корнями и коэффициентами.



Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ где x – переменная, a , b и c – некоторые числа, причём $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Первый
коэффициент

Второй
коэффициент

Свободный
член

Классификация .

Квадратные уравнения.

неполное

$$c = 0;$$
$$ax^2 + bx = 0$$

$$b = 0; c = 0;$$
$$ax^2 = 0$$

$$b = 0;$$
$$ax^2 + c = 0$$

полное

$$ax^2 + bx + c = 0$$

приведённое

$$x^2 + px + q = 0$$

«ДИСКРИМИНАНТ» - РАЗЛИЧИТЕЛЬ.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0$$

Уравнение имеет
два действительных
корня.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = 0$$

Уравнение имеет
два равных
действительных
корня.

$$x_{1,2} = -b / 2a$$

$$D < 0$$

Уравнение не имеет
корней.

Приёмы устного решения квадратных уравнений.

$$a x^2 + b x + c = 0.$$

Основа: $f(x) = a x^2 + b x + c;$
 $f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c.$

1. Если $a + b + c = 0$, то один корень уравнения $x = 1$, а второй $x = c/a$.

2. Если $a - b + c = 0$, то один корень уравнения $x = -1$, а второй $x = -c/a$.

3. Если $a = c$, $b = a^2 + 1$, то один корень уравнения $x = -a$, а второй $x = -1/a$.

4. Если $a = c$, $b = -(a^2 + 1)$, то один корень уравнения $x = a$, а второй $x = 1/a$.

Теорема Виета.

- Если x_1 и x_2 корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 x_2 = q$.

Обратное утверждение:

- Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, $mn = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Обобщённая теорема:

- Числа x_1 и x_2 являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Следствие: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

Исследование знаков корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если $D > 0$.

| $q > 0$ | | | $q < 0$ | | | $q = 0$ |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|---|---|---|---|
| $p > 0$ | $p < 0$ | $p = 0$ | $p > 0$ | $p < 0$ | $p = 0$ | |
| $x_1 < 0,$ $x_2 < 0.$ | $x_1 > 0,$ $x_2 > 0.$ | $x^2 + q = 0$ Корней нет | $x_1 < 0,$ $x_2 > 0,$ Причём $ x_1 > x_2 $ | $x_1 > 0,$ $x_2 < 0,$ Причём $ x_1 > x_2 $ | $x^2 + q = 0$ $x^2 = -q$ $x_1 = -\sqrt{-q}$ $x_2 = -x_1$ | $x^2 + px = 0$ $x(x + p) = 0,$ $x_1 = 0$ или $x_2 = -p.$ |

Ситуации, в которых может использоваться теорема Виета.

- Проверка правильности найденных корней.
- Определение знаков корней квадратного уравнения.
- Устное нахождение целых корней приведённого квадратного уравнения.
- Составление квадратных уравнений с заданными корнями.
- Разложение квадратного трёхчлена на множители.

Методы решения полных квадратных уравнений.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Общая формула
корней:
 $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$

Теорема Виета:
 $x_1 + x_2 = -b/a,$
 $x_1 x_2 = c/a$

Общая формула с
чётными
коэффициентами:
 $x_{1,2} = (-b/a \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac})/a$

Если $a + b + c = 0,$
то $x_1 = 1; x_2 = c/a.$

Если $a \pm b + c \neq 0,$
то решить уравнение
 $x^2 + bx + c = 0$
и разделить полученные
корни на $a.$

Если $a - b + c = 0,$
то $x_1 = -1; x_2 = -c/a.$

Методы решения уравнений, сводящихся к квадратным.

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0.$$

Метод введения новой переменной:

- 1) Замена: $f(x) = t$.
- 2) Решаем уравнение: $at^2 + bt + c = 0$.
- 3) Решаем уравнение: $f(x) = t$.

Уравнение с переменной в знаменателе:
 $p(x) / q(x) = 0$.

$$\begin{cases} p(x) = 0, \\ q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Рациональное уравнение $f(x) = q(x)$, где $f(x)$ и $q(x)$ – дробные выражения.

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. Решить получившееся целое уравнение;
4. Исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Биквадратное уравнение:
 $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Штифель (1486 – 1567) в 1544 году сформировал общее правило решения квадратных уравнений, приведённых к единому каноническому виду

$$x^2 + bx = c$$

при всевозможных комбинациях знаков и коэффициентов *b* и *c*.

Франсуа Виет (1540 – 1603) вывел формулы решения квадратного уравнения в общем виде, однако он признавал только положительные числа.

Итальянские учёные Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI веке учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни.

В XVII веке благодаря трудам **Жиррара, Декарта, Ньютона** и других учёных, способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

Литература

1. Алгебра. 8 класс. Под редакцией Теляковского С. А. М., Просвещение, 2002 г.
2. Сборник задач по алгебре. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. М., 1996 г.
3. Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. М., Просвещение, 2003 г.



The background features a textured, light brown surface with several stylized, overlapping yellow leaves. The leaves have a simple, flat design with visible veins. The text is centered horizontally and partially overlaid by the leaves.

Научился сам - научи другого.