Квадратные уравнения: методы решения.

«Уравнение - это золотой ключ, открывающий все математические сезамы».

С. Коваль.

ПЛАН УРОКА

1. Теоретическая разминка.
2. Энциклопедия квадратных уравнений.
3. Думающий колпак.
4. Историческая справка.
5. Копилка ценных мыслей.
6. Домашнее задание.

Вопросы теоретической разминки:

1. Сформулируйте определение квадратного уравнения.
2. Объясните, в чём заключается смысл ограничения в определении квадратного уравнения (а ≠ 0).
3. Перечислите виды квадратных уравнений.
4. Какое квадратное уравнение называется неполным? Приведите пример. подробнее
5. Какое квадратное уравнение называется приведённым? Приведите пример.
6. Способы решения полного квадратного уравнения? подробнее

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Специальные методы:

1. Метод выделения квадрата двучлена.
2. Метод «переброски» старшего коэффициента.
3. На основании теорем.

Общие методы:

Разложение на множители;

Введение новой переменной;

Графический метод.

ДУМАЮЩИЙ КОЛПАК

Большим и указательным пальцами мягко оттягивают назад и прижимают, массируя, раковины ушей.

УЧЕБНЫЕ ИНСТРУКЦИИ

- Держите голову прямо, чтобы подбородку было удобно.
- Упражнение повторяют трижды или более раз.

Впервые ввёл термин «квадратное уравнение» немецкий философ **Кристиан Вольф.**

Кристиан Вольф - знаменитый немецкий философ, родился в 1679 г. в Бреславле, в семье простого ремесленника, изучал в Йене сначала богословие, потом математику и философию.

http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%B0%D0%BD_%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%84

Сильвестр Джеймс Джозеф – английский математик, который ввел термин «дискриминант».

http://www.persons-info.com/index.php?pid=10965

В 13 – 16 веках даются отдельные методы решения различных видов квадратных уравнений. Слияние этих методов произвел в 1544 году немецкий математик – Михаэль Штифель. Это было настоящее событие в математике.

http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B5%D0%BB%D1%8C,_%D0%9C%D0%B8%D1%85%D0%B0%D1%8D%D0%BB%D1%8C

Домашнее задание

- Решите уравнение $3x^2 + 5x + 2 = 0$:

  1. используя формулу дискриминанта – «3»,
  2. двумя способами – «4»,
  3. тремя способами – «5».

Дополнительно.

- Решите уравнение $(x^2-x)^2 - 14(x^2-x) + 24 = 0$ методом введения новой переменной.

Энциклопедия квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a \neq 0)$$

подробнее

РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

в=0	с=0	в,с=0
$ax^2+c=0$	$ax^2+вx=0$	$ax^2=0$
подробнее	подробнее	подробнее

$\frac{-c}{a}$

Алгоритм решения

в=0

$ax^2+c=0$

1. Переносим с в правую часть уравнения.

$$ax^2 = -c.$$

2. Делим обе части уравнения на а≠0.

$$x^2 = \frac{-c}{a}.$$

3. Если $-c/a>0$ -два решения:

$x_1 = \sqrt{(-c)/a}$ и $x_2 = -\sqrt{(-c)/a}$

Если $\frac{-c}{a} < 0$ - нет решений.

Алгоритм решения

с=0

$ах^2$+вх=0

1. Выносим х за скобки:

   х (ах + в) = 0.

2. «Разбиваем» уравнение на два:

   х = 0, ах + в = 0.

3. Два решения:

   х = 0 и х = $\frac{-b}{a}$ (а≠0).

Алгоритм решения

в,с=0

$ax^2=0$

1. Делим обе части уравнения на $a \neq 0$.

$$x^2 = 0$$

2. Одно решение: $x = 0$.

Подведём итог!

Неполные квадратные уравнения:

$ax^2 = 0$	$x = 0$
$ax^2 + bx = 0,$ $(b \neq 0)$	$x = 0,$ $x = -\frac{b}{a}$
$ax^2 + c = 0,$ $(c \neq 0)$	Если $-\frac{c}{a} < 0$, то **корней нет** Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

D < 0

Корней нет

D = 0

$$x = -\frac{b}{2a}$$

D > 0

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

b = 2k (чётное число)

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$(D_1 \geq 0)$$

Теорема Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = q$

если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Метод выделения квадрата двучлена.

Суть метода: привести квадратное уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.

Пример: $x^2 - 6x + 5 = 0.$

подробнее

Метод «переброски» старшего коэффициента.

Корни квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad y^2 + by + ac = 0$$

связаны соотношениями

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}$$

подробнее

Пример: $2x^2 - 9x - 5 = 0.$

На основании теорем:

Если в квадратном уравнении *$a+b+c=0$*, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Если в квадратном уравнении *$a+c=b$*, то один из корней равен -1, а второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

Примеры: $200x^2 + 210x + 10 = 0.$

подробнее

Метод разложения на множители

Цель: привести квадратное уравнение общего вида к виду

$A(x)\cdot B(x)=0$,

где A(x) и B(x) – многочлены относительно x.

Способы:

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

Пример: $4x^2 + 5x + 1 = 0.$

подробнее

Введение новой переменной.

Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной.

Пример: $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2.$

подробнее

Графический метод

Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ необходимо построить графики функций

$y = f(x)$, $y = g(x)$

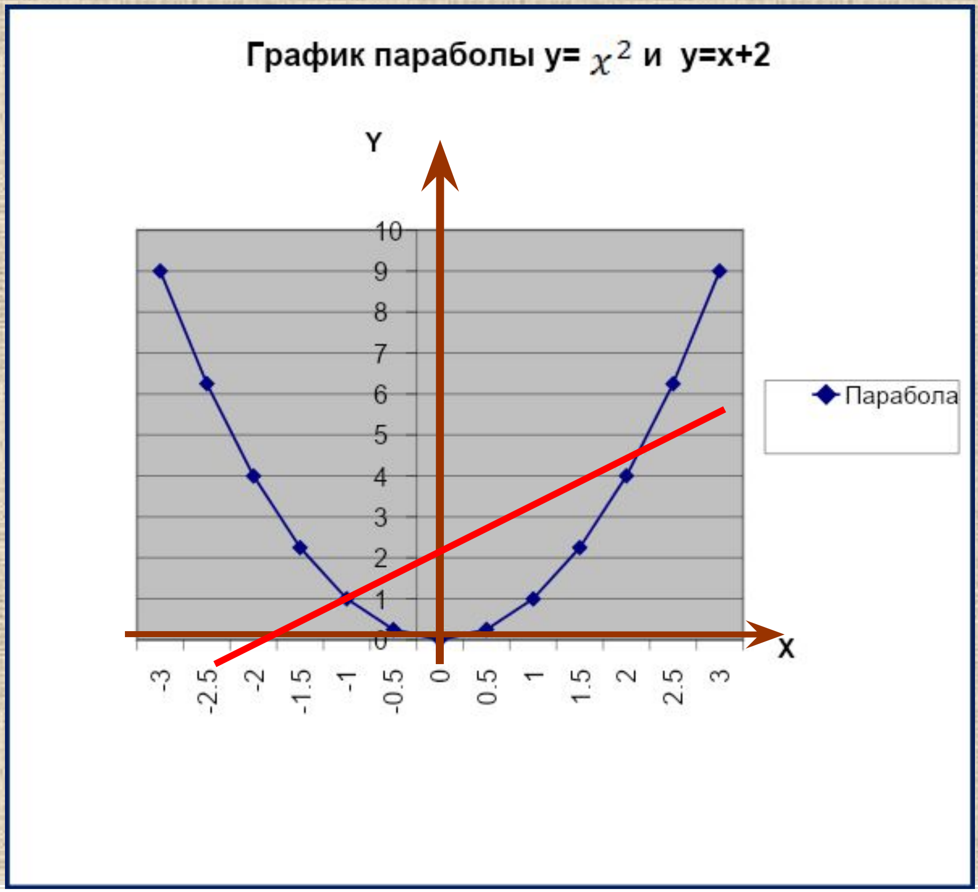
и найти точки их пересечения;

абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения.

Пример: $x^2 = x + 2.$

подробнее

Графический метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества.



Метод выделения квадрата двучлена.

Решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$x^2 - 6x + 5 = 0.$

$(x - 3)^2 – 4 = 0.$

$(x - 3)^2 = 4.$

$x – 3 = 2$; $x – 3 = -2.$

$x = 5$, $x = 1.$

Ответ: 5; 1.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Метод “переброски” старшего коэффициента

Решите уравнение $2x^2 - 9x - 5 = 0.$

$y^2 - 9y - 10 = 0.$

D>0, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: -1; 10, далее возвращаемся к корням исходного уравнения: - 0,5; 5.

Ответ: 5; -0,5.

$ax^2 + bx + c = 0$ **и** $y^2 + by + ac = 0$

связаны соотношениями: $x_1 = \frac{y_1}{a}$ $\quad x_2 = \frac{y_2}{a}$

Теорема 1. Если в квадратном уравнении $a + b + c = 0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Решите уравнение $137x^2 + 20x – 157 = 0$.

$137x^2 + 20x – 157 = 0$.

$a = 137$, $b = 20$, $c = -157$.

$a + b + c = 137 + 20 – 157 = 0$.

$x_1 = 1$, $x_2 = -157/137$.

Ответ: 1; **-157/137**.

Теорема 2. **Если в квадратном уравнении $a + c = b$, то один из корней равен -1, а второй по теореме Виета равен** $\left(-\frac{c}{a}\right)$

Решите уравнение $200x^2 + 210x + 10 = 0$.

$200x^2 + 210x + 10 = 0.$

$a = 200,\ b = 210,\ c = 10.$

$a + c = 200 + 10 = 210 = b.$

$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{10}{200}$

Ответ: -1; -0,05

Метод разложения на множители.

Решите уравнение $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

$4x^2 + 5x + 1 = 0.$

$4x^2 + 4x + x + 1 = 0.$

$4x(x+1) + (x+1) = 0.$

$4x(x + 1) = 0.$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а второй при этом не теряет смысла, или когда оба равны нулю.

$4x = 0$ и $x + 1 = 0.$

$x = 0$, $x = -1.$

Ответ: 0; -1.

Метод введения новой переменной.

Решите уравнение **$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.**

$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.

Пусть: $t = 2x + 3$.

Произведем замену переменной: $t^2 = 3t - 2$.

$t^2 - 3t + 2 = 0$. $D > 0$.

По теореме, обратной теореме Виета: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Произведем обратную замену и вернемся к переменной x, получим следующие корни:

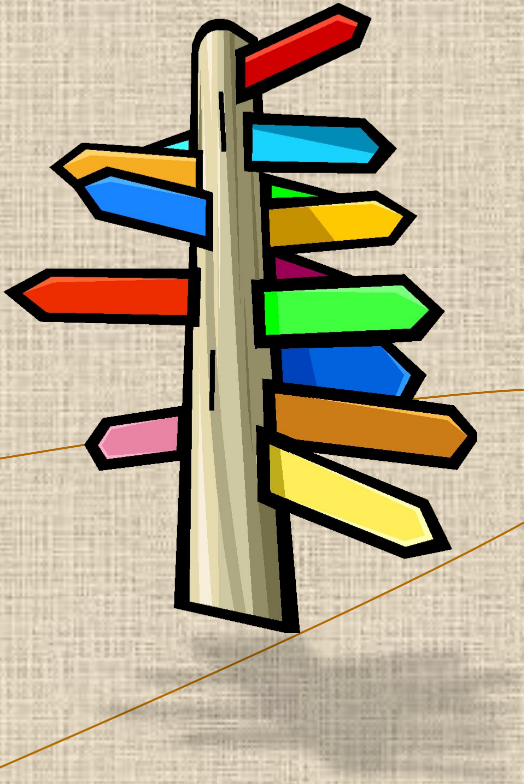
-1; -0,5.

Ответ: -1; -0,5.

	№ уравнения	№ метода
1	$100x^2 + 53x - 153 = 0$	
2	$20x^2 - 6x = 0$	
3	$299x^2 + 300x + 1 = 0$	
4	$3x^2 - 5x + 4 = 0$	
5	$7x^2 + 8x + 2 = 0$	
6	$35x^2 - 8 = 0$	
7	$4x^2 - 4x + 3 = 0$	
8	$(x - 8)^2 - (3x + 1)^2 = 0$	
9	$4(x - 1)^2 + 0,5(x - 1) - 1 = 0$	
10	$12x^2 = 0$	

1. в,с=0 $ax^2=0$
2. с=0 $ax^2+вx=0$
3. в=0 $ax^2+c=0$
4. b - нечётное $ax^2+bx+c=0$
5. b - чётное $ax^2+bx+c=0$
6. Теорема Виета.
7. Метод выделения квадрата двучлена.
8. Метод «переброски» старшего коэффициента.
9. Т1 или Т2.
10. Метод разложения на множители.
11. Метод введения новой переменной.

№ метода	шифр
1	!
2	те
3	но
4	тик
5	нем
6	ке
7	до
8	го
9	ма
10	по
11	эт
12	ру
13	-



№ уравнения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Слог										

http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/158739/%D0%92%D0%B5%D0%B9%D0%B5%D1%80%D1%88%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81

Математик немного поэ

Т. Вейерштрасс