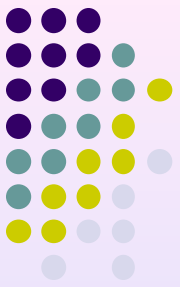


Решение квадратных уравнений с параметрами



$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (A \neq 0) \quad (1)$$

A, B, C- выражения, зависящие от параметров

Схема исследования уравнения

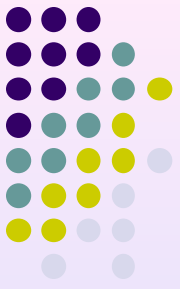
1) Если $A=0$, то $B \cdot x + C = 0$, $x = -\frac{C}{B}$,

2) Если $A \neq 0$, то находим дискриминант $D = b^2 - 4ac$,

а) $D > 0$ $x_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

б) $D < 0$, то уравнение не имеет решений

в) $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{B}{2A}$,



Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$

имеет 1 корень (совпадающие корни) ?

Решение. Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет 1 корень $D = 0$.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) = 0$$

$$a_1 = 0, a_2 = 20.$$

Ответ. $a = 0, a = 20$.



Пример 1.

Найти все значения параметра a , для которых уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3 = 0$

а) имеет 2 различных корня;

б) не имеет корней;

в) имеет 2 равных корня.

Решение.

Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому $a-1 \neq 0$.

Найдем дискриминант уравнения $D = 4(2a+1)^2 - 4 \cdot (a-1)(4a+3) = 4(5a+4)$

а) $D > 0, a \neq 1 \quad 4(5a+4) > 0,$

$$\underline{a > -4/5.}$$

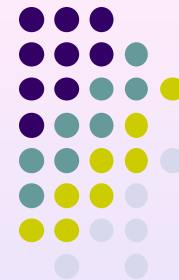
б) $D < 0, \quad \underline{a < -4/5}$

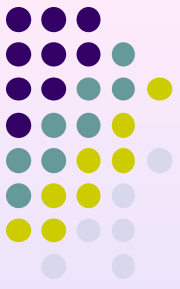
в) $D = 0, \quad \underline{a = -4/5}$

Ответ: если $a > -4/5$ и $a \neq 1$, то два различных корня,

если $a < -4/5$, то нет корней,

если $a = -4/5$, то два равных корня.





Пример 2.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a^2 - a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0 \quad \text{не имеет решений?}$$

Решение.

$$1) \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad a = 2, a = -1$$

$$\text{При } a=2, \quad 3x+1=0, \quad x = -1/3$$

при $a = -1$, $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$, не имеет решений.

$$2) \quad a^2 - a - 2 \neq 0 \quad a \neq 2, \quad a \neq -1$$

В данном случае уравнение является квадратным и не имеет решений, если дискриминант меньше нуля

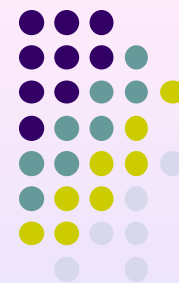
$$D = (a + 1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a - 3)(a + 1)$$

$$D < 0 \quad -3(a - 3)(a + 1) < 0,$$

$$(a - 3)(a + 1) > 0,$$

Теперь с учетом первого случая получаем

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$$

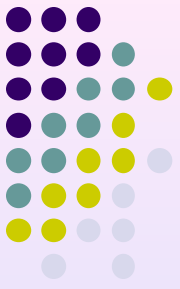


Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение?



Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

Решение.

По условию задачи уравнение обязательно является квадратным, поэтому рассмотрим два случая

1) $a + 6 = 0,$
 $a = -6$

Если $a = -6,$ то $-12x + 1 = 0,$
 $x = 1/12.$

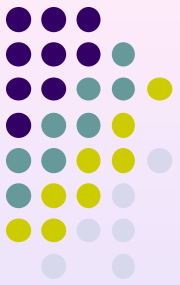
2) Если $a \neq -6,$ то квадратное уравнение имеет единственное решение, если $D = 0$

$$D = 4a^2 - 4(a + 6) = 4(a^2 - a - 6),$$

$$a^2 - a - 6 = 0,$$

$$a_1 = 3, a_2 = -2$$

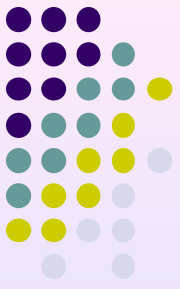
Ответ: при $a \in \{-6, -2; 3\}$



Пример 4.

Для всех значений параметра a решить уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$



Пример 4.

Для всех значений параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

Решение.

1) $a - 1 = 0$, $a = 1$. Если $a = 1$, то уравнение имеет вид $-2x + 3 = 0$, $x = 3/2$.

2) Если $a \neq 1$. Найдем дискриминант уравнения

В зависимости от значения D возможны случаи. $D = 4a^2 - 4(a-1)(a+2) = -4a + 8$,

а) $\begin{cases} D < 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a + 8 < 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} a > 2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a > 2$ Уравнение не имеет корней

б) $\begin{cases} D = 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a + 8 = 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ тогда $x = \frac{a}{a-1} = 2$

в) $\begin{cases} D > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a + 8 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} a < 2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{-4a+8}}{2(a-1)} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$

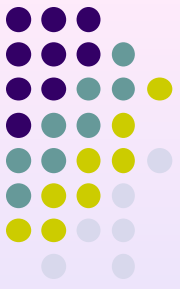
Ответ: если $a=1$, то $x = 3/2$.

$a=2$, то $x=2$,

$a > 2$, то -нет решений

$a < 2$ и $a \neq 1$, то

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$$



Теорема Виета

Если x_1, x_2 корни квадратного уравнения

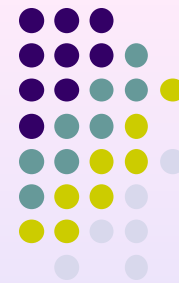
$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}. \end{cases}$$



Равенства, которые необходимо знать



Если x_1, x_2 . корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad , \text{ то}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

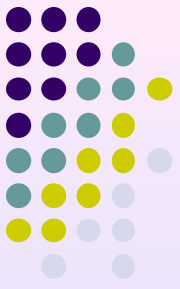
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2),$$

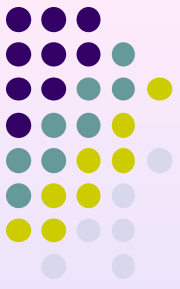
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$



Пример 1. Найти сумму и произведение корней уравнения $3x^2 + 4x - 5 = 0$.





Пример 1. Найти сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Решение. 1) **Проверка:** имеет ли уравнение действительные корни?

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 16 + 60 = 76,$$

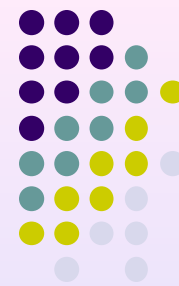
$$76 > 0$$

Уравнение имеет действительные корни.

2) Нахождение суммы и произведения корней уравнения с использованием теоремы Виета.

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}.$$

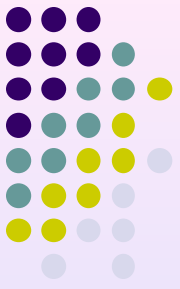




Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$





Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Решение. *Проверка: имеет ли уравнение действительные корни?*

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

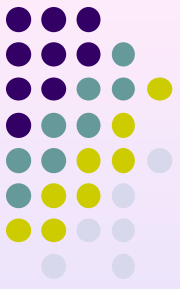
$$D < 0$$

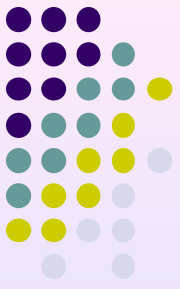
Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. *Уравнение не имеет действительных корней.*



Пример 3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + ax + 5a = 0$ равно 10 ?





Пример 3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + ax + 5a = 0$ равно 10?

Решение. 1) Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \geq 0$$
$$\underline{a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty)}.$$

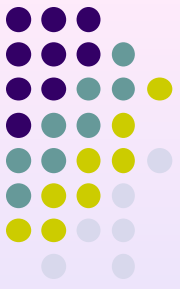
2) По теореме Виета произведение корней уравнения

$$\text{равно 10, если } \begin{cases} D \geq 0, \\ 5a = 10. \end{cases}$$

$$\text{Решение системы: } \begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty), \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in \emptyset}.$$

Ответ: $a \in \emptyset$.





Пример 4 Не решая уравнения $3kx^2 - (k+1)x - 3k^2 = 0$

найти $x_1^{-1} + x_2^{-1}$, где

$x_1; x_2$ корни уравнения

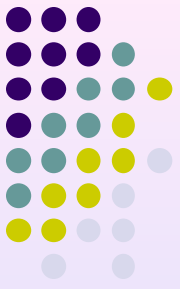
Ответ: $-\frac{k+1}{3k^2}$

Пример 5.

При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2(a+1)x + a^2 = 0$ равна 4?

Ответ: при $a = 0$





Пример 6 При каких значениях параметра p разность корней уравнения $x^2 - px - 20p = 0$ равна 9.

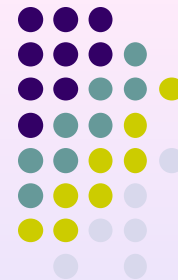
Ответ: при $p = -81$ и $p = 1$



Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

- Уравнение имеет корни одного знака, если
- Уравнение имеет положительные корни, если
- Уравнение имеет отрицательные корни, если
- Уравнение имеет корни разных знаков, если



$$D \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{A} > 0. \end{array} \right.$$

$$D \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{B}{A} > 0, \end{array} \right.$$

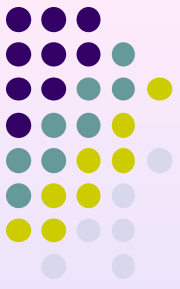
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{A} > 0. \end{array} \right.$$

$$D \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{B}{A} < 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{A} > 0. \end{array} \right.$$

$$\frac{C}{A} < 0$$



Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$ имеет корни разных знаков ?

Решение. 1) Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \quad , D > 0$$
$$\underline{a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty)}.$$

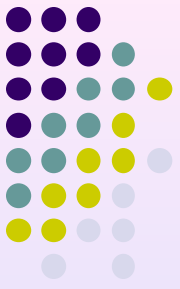
2) Уравнение имеет корни разных знаков, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ 5a < 0. \end{cases}$$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty), \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (-\infty; 0)}.$

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$.





Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - 2(a-2)x + a + 3 = 0 \quad \text{имеет}$$

а) корни разных знаков;

б) корни одного знака;

в) положительные корни

Решение.

По формулам Виета

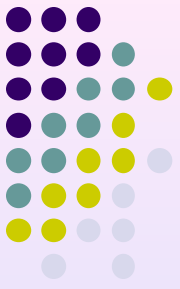
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(a-2)}{a-1}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a+3}{a-1}. \end{cases}$$

а) исходное уравнение имеет корни разных знаков, если выполняется условие

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{C}{A} < 0. \end{cases} \quad \underline{\underline{\begin{cases} a+3 \\ a-1 \end{cases} < 0.}}$$

$$a \in (-3; 1).$$





б) исходное уравнение имеет корни одного знака, если выполняется условие

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(7 - 6a) \geq 0, \\ \frac{a + 3}{a - 1} > 0; \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -3) \cup (1; \frac{7}{6}]$$

в)) исходное уравнение имеет положительные корни, если выполняется условие

$$a \in (-3; 1). \begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

Ответ: если $a \in (-3; 1)$, то уравнение имеет корни разных знаков,
если $a \in (-\infty; -3) \cup (1; \frac{7}{6}]$, то корни – одного знака;

если $a \in (-\infty; -3)$ то положительные корни.

