Решение квадратных уравнений с параметрами

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \qquad (A \neq 0) \qquad (1)$$

А, В, С- выражения, зависящие от параметров

Схема исследования уравнения

1)Если А=0, то В ·х + с = 0 , х = $-\frac{C}{B}$,

2)Если А≠0, то находим дискриминант $D = b^2 - 4ac$,

а) Д > 0 $x_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

б) Д < 0, то уравнение не имеет решений

в) Д = 0, то уравнение имеет единственное решение х=- $\frac{B}{2A}$,

Пример 1. При каких значениях параметра а уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$

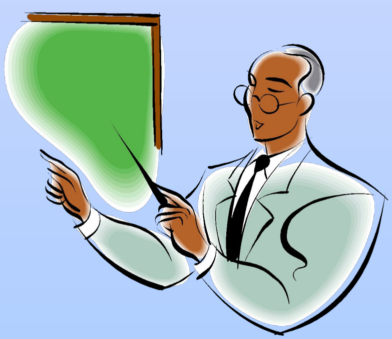
имеет 1 корень (совпадающие корни) ?

Решение. ***Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет 1 корень D = 0 .***

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a-20) = 0$$

$$a_1 = 0,\ a_2 = 20.$$

Ответ. $a = 0, a = 20.$



Пример 1. *Найти все значения параметра а, для которых уравнение* $(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0$

а) *имеет 2 различных корня;*

б) не имеет корней;

в) имеет 2 равных корня.

Решение.

Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому а-1 ≠0.

Найдем дискриминант уравнения $D=4(2a+1)^2-4\cdot(a-1)(4a+3)=4(5a+4)$

а) Д > 0, а≠1 4(5а+4)) > 0 ,

а > -4/5.

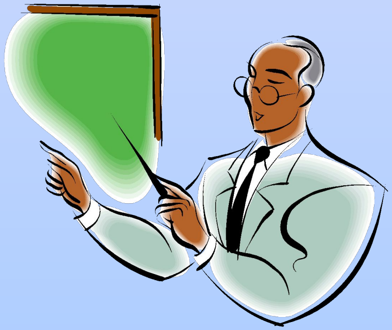
б) Д < 0, а < -4/5

в) Д = 0, а =-4/5

Ответ: если а > -4/5 и а≠1 , то два различных корня,

если а < -4/5, то нет корней,

если а =-4/5, то два равных корня.



Пример 2.

При каких значениях параметра а уравнение

$(a^2 - a - 2)x^2 + (a+1)x + 1 = 0$ ***не имеет решений ?***

Решение.

1) $a^2 - a - 2 = 0$ ***a = 2, a = -1***

При a=2, 3x+1=0, x = - 1/3

при a = -1, $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$ ***, не имеет решений.***

2) $a^2 - a - 2 \neq 0$ ***a*** $\neq$ ***2 , a*** $\neq$ ***-1***

В данном случае уравнение является квадратным и не имеет решений, если дискриминант меньше нуля

Д = $(a+1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a-3)(a+1)$

Д<0

$$-3(a-3)(a+1) < 0,$$

$$(a-3)(a+1) > 0,$$

$$a \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$$

Теперь с учетом первого случая получаем

Ответ: $a \in (-\infty;-1] \cup (3;+\infty)$

Пример 3.

При каких значениях параметра а уравнение

$$(a+6)x^2+2ax+1=0$$

имеет единственное решение?

Пример 3.

При каких значениях параметра а уравнение

$$(a+6)x^2+2ax+1=0$$

имеет единственное решение?

Решение.

По условию задачи уравнение необязательно является квадратным, поэтому рассмотрим два случая

1) $$a+6=0,$$
$$a=-6$$

Если а = -6,то -12x+1=0,

x = 1/12.

2) *Если а ≠ -6, то квадратное уравнение имеет единственное решение, если Д =0*

$$Д=4a^2-4(a+6)=4(a^2-a-6),$$
$$a^2-a-6=0,$$
$$a_1=3, a_2=-2$$

Ответ: при $a\in\{-6,-2;3\}$

Пример 4.

Для всех значений параметра а решить уравнение

$$(\mathrm{a}-1)\mathrm{x}^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

Пример 4.

Для всех значений параметра а уравнение

$$(a-1)x^2-2ax+a+2=0$$

Решение.

1) $\begin{aligned} &a-1=0,\\ &a=1\end{aligned}$ *Если а = 1,то уравнение имеет вид -2х+3=0, х = 3/2.*

2) *Если а ≠ 1. Найдем дискриминант уравнения*

$$Д=4a^2-4(a-1)9a+2)=-4a+8,$$

В зависимости от значения Д возможны случаи.

а) $\begin{cases} Д<0 \\ a\neq 1, \end{cases} \begin{cases} -4a+8<0 \\ a\neq 1, \end{cases} \begin{cases} a>2, \\ a\neq 1, \end{cases} a>2$ *Уравнение не имеет корней*

б) $\begin{cases} Д=0, \\ a\neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a+8=0, \\ a\neq 1, \end{cases} a=2.$ *тогда* $x=\dfrac{a}{a-1}=2$

в) $\begin{cases} Д>0 \\ a\neq 1, \end{cases} \begin{cases} -4a+8>0 \\ a\neq 1, \end{cases} \begin{cases} a<2, \\ a\neq 1, \end{cases}$

$$x_{1;2}=\frac{2a\pm\sqrt{-4a+8}}{2(a-1)}=\frac{a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$$

Ответ: если а=1,то х = 3/2.

а=2, то х=2,

а>2, то -нет решений

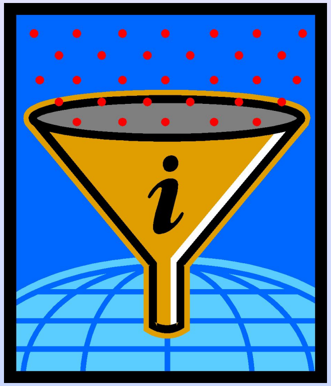
а<2 и $a\neq 1$, то

$$x_{1;2}=\frac{a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$$

Теорема Виета

Если x_1, x_2. **корни квадратного уравнения**

$$\mathrm{A}x^2 + Bx + C = 0 \qquad x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

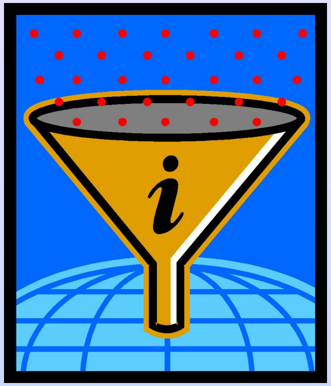


то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{C}{A}. \end{cases}$

Равенства, которые необходимо знать

Если $x_1, \; x_2.$ **корни квадратного уравнения**

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$$ **, то**



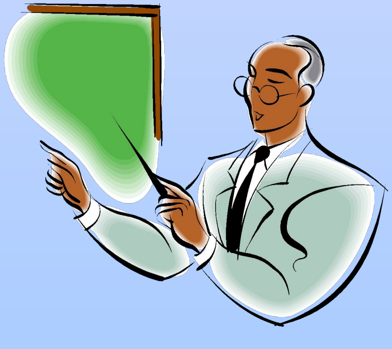
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2),$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$

Пример 1. *Найти сумму и произведение корней уравнения* $3x^2+4x-5=0.$



Пример 1. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$3x^2+4x-5=0.$$

Решение. 1) **Проверка:** *имеет ли уравнение действительные корни?*

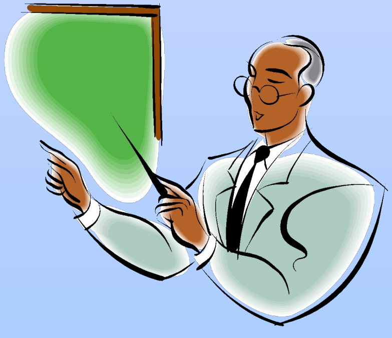
$$D=4^2-4\cdot 3\cdot(-5)=16+60=76,$$

$$76>0$$

Уравнение ***имеет действительные корни.***

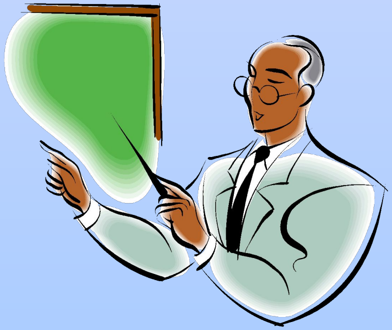
2) *Нахождение* ***суммы*** *и* ***произведения*** *корней уравнения с использованием теоремы Виета.*

$$x_1+x_2=-\frac{4}{3},\;\; x_1\cdot x_2=-\frac{5}{3}.$$



Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$



Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$

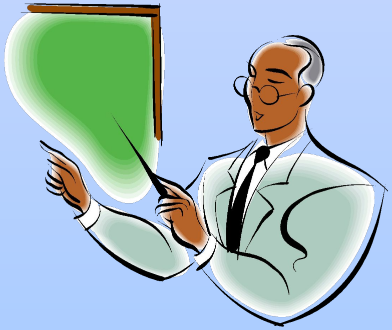
Решение. **Проверка:** *имеет ли уравнение действительные корни?*

$$Д = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

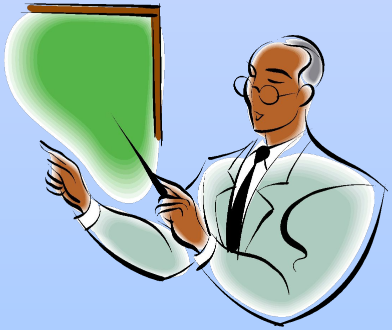
$$Д < 0$$

Уравнение ***не имеет действительных корней.***

Ответ. *Уравнение не имеет действительных корней.*



Пример 3. ***При каких значениях параметра а произведение корней уравнения*** $x^2 + ax + 5a = 0$ ***равно 10 ?***



Пример 3. *При каких значениях параметра а произведение корней уравнения* $x^2 + ax + 5a = 0$ *равно 10 ?*

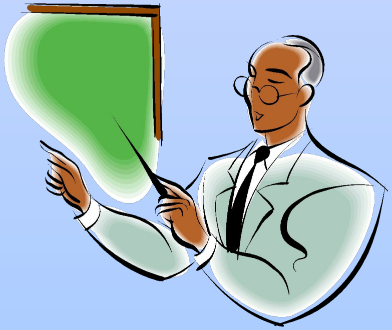
Решение. *1) Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет действительные решения.*

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a-20)$$ Д≥ 0

$$a \in (-\infty;0] \cup [20;+\infty).$$

2) По теореме Виета ***произведение*** *корней уравнения равно 10, если* $\begin{cases} D \ge 0, \\ 5a = 10. \end{cases}$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty;0] \cup [20;+\infty), \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing.$



Ответ: $a \in \varnothing.$

Пример 4 *Не решая уравнения* $3к\,x^2 - (к+1)x - 3к^2 = 0$

найти $x_1^{-1} + x_2^{-1}$, ***где***

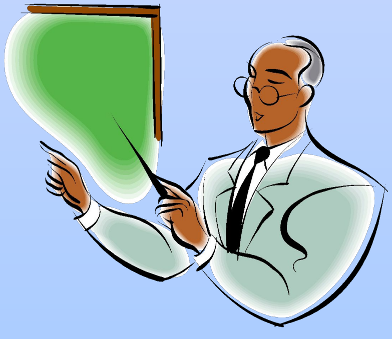
$x_1 ; x_2$ корни уравнения

Ответ: $-\dfrac{к+1}{3к^2}$

Пример 5.

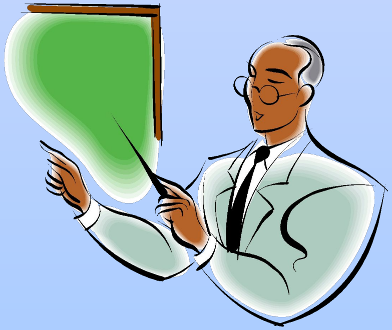
При каких значениях параметра а сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2(a+1)\,x + a^2 = 0$ ***равна 4?***

Ответ: при а = 0

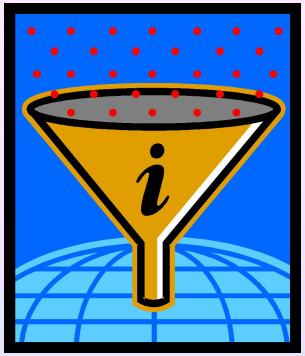


Пример 6 *При каких значениях параметра p разность корней уравнения* $x^2 - px - 20p = 0$ *равна 9.*

***Ответ*:** при p = -81и p =1



Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена



$$\mathrm{A}x^2 + Bx + C = 0$$

- Уравнение имеет корни одного знака, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ \dfrac{C}{A} > 0. \end{cases}$

- Уравнение имеет положительные корни, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{B}{A} > 0, \\ \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} > 0. \end{cases}$

- Уравнение имеет отрицательные корни, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{B}{A} < 0, \\ \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} > 0. \end{cases}$

- Уравнение имеет корни разных знаков, если $\dfrac{C}{A} < 0$

Пример 1. *При каких значениях параметра а уравнение* $x^2 + ax + 5a = 0$ *имеет корни разных знаков ?*

Решение. *1) Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет действительные решения.*

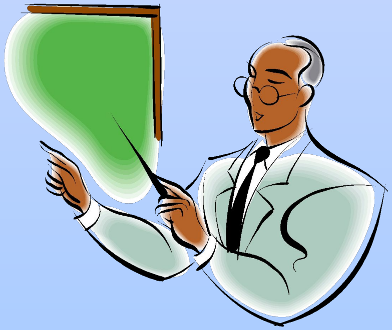
$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a-20)$$,Д> 0

$$\underline{a \in (-\infty;0) \cup (20;+\infty).}$$

2) Уравнение имеет корни разных знаков, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ 5a < 0. \end{cases}$$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty;0) \cup (20;+\infty), \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (-\infty;0).}$



Ответ: $a \in (-\infty;0).$

Пример 2. *При каких значениях параметра а уравнение*

$$(a-1)x^2-2(a-2)x+a+3=0$$

имеет

а) корни разных знаков;

б) корни одного знака;

в) положительные корни

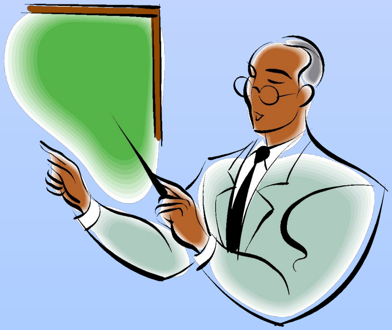
Решение. *По формулам Виета*

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(a-2)}{a-1}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a+3}{a-1}. \end{cases}$$

а) исходное уравнение имеет корни разных знаков, если выполняется условие

$$\begin{cases} D>0, \\ \dfrac{C}{A}<0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+3}{a-1}<0. \end{cases}$$

$$a\in(-3;1).$$



б) исходное уравнение имеет корни одного знака, если выполняется условие

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ \dfrac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(7-6a) \ge 0, \\ \dfrac{a+3}{a-1} > 0; \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{7}{6}\right]$$

в)) исходное уравнение имеет положительные корни, если выполняется условие

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ -\dfrac{B}{A} > 0, \\ \dfrac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

$$a \in (-3; 1).$$

Ответ: если $a \in (-3; 1)$,то уравнение имеет корни разных знаков,

если $a \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{7}{6}\right]$, то корни – одного знака;

если $a \in (-\infty; -3)$, то положительные корни.