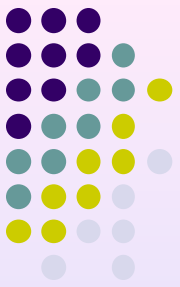


# Решение квадратных уравнений с параметрами

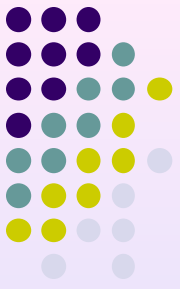


$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (A \neq 0) \quad (1)$$

*A, B, C- выражения, зависящие от параметров*

*Схема исследования уравнения*

- 1) Если  $A=0$ , то  $B \cdot x + C = 0$ ,  $x \equiv \frac{C}{B}$ ,
- 2) Если  $A \neq 0$ , то находим дискриминант  $D = b^2 - 4ac$ ,
  - а)  $D > 0$   $x_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$
  - б)  $D < 0$ , то уравнение не имеет решений
  - в)  $D = 0$ , то уравнение имеет единственное решение  $x = -\frac{B}{2A}$ ,



**Пример 1.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^2 + ax + 5a = 0$

имеет 1 корень (совпадающие корни) ?

**Решение.** Найдем все значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет 1 корень  $D = 0$ .

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) = 0$$

$$a_1 = 0, a_2 = 20.$$

---

**Ответ.**  $a = 0, a = 20$ .



**Пример 1.**

Найти все значения параметра  $a$ , для которых уравнение  $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3 = 0$

- а) имеет 2 различных корня;
- б) не имеет корней;
- в) имеет 2 равных корня.

**Решение.**

Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому  $a-1 \neq 0$ .

Найдем дискриминант уравнения  $D = 4(2a+1)^2 - 4 \cdot (a-1)(4a+3) = 4(5a+4)$

а)  $D > 0, a \neq 1 \quad 4(5a+4) > 0,$   
 $\underline{a > -4/5.}$

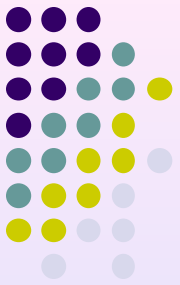
б)  $D < 0, \quad \underline{a < -4/5}$

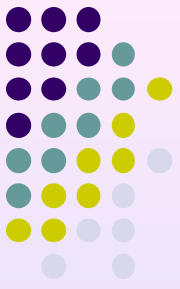
в)  $D = 0, \quad \underline{a = -4/5}$

Ответ: если  $a > -4/5$  и  $a \neq 1$ , то два различных корня,

если  $a < -4/5$ , то нет корней,

если  $a = -4/5$ , то два равных корня.





## Пример 2.

При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(a^2 - a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0 \quad \text{не имеет решений?}$$

### Решение.

$$1) \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad a = 2, a = -1$$

$$\text{При } a=2, \quad 3x+1=0, \quad x = -1/3$$

при  $a = -1$ ,  $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$ , не имеет решений.

$$2) \quad a^2 - a - 2 \neq 0 \quad a \neq 2, \quad a \neq -1$$

В данном случае уравнение является квадратным и не имеет решений, если дискриминант меньше нуля

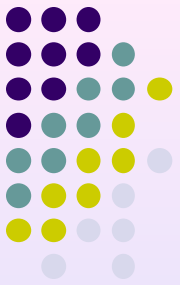
$$D = (a + 1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a - 3)(a + 1)$$

$$D < 0 \quad -3(a - 3)(a + 1) < 0,$$

$$(a - 3)(a + 1) > 0,$$

Теперь с учетом первого случая получаем

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$$

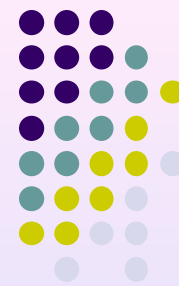


### ***Пример 3.***

*При каких значениях параметра  $a$  уравнение*

$$(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$$

*имеет единственное решение?*



### **Пример 3.**

При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

#### **Решение.**

По условию задачи уравнение обязательно является квадратным, поэтому рассмотрим два случая

$$1) \quad a + 6 = 0, \\ a = -6$$

$$\text{Если } a = -6, \text{ то } -12x + 1 = 0, \\ x = 1/12.$$

2) Если  $a \neq -6$ , то квадратное уравнение имеет единственное решение, если  $D = 0$

$$D = 4a^2 - 4(a + 6) = 4(a^2 - a - 6),$$

$$a^2 - a - 6 = 0,$$

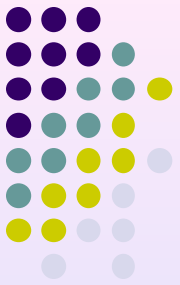
$$a_1 = 3, a_2 = -2$$

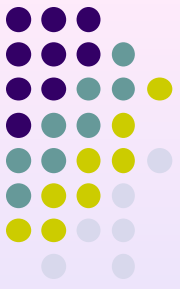
Ответ: при  $a \in \{-6, -2; 3\}$

## **Пример 4.**

*Для всех значений параметра  $a$  решить уравнение*

$$(a - 1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$





### Пример 4.

Для всех значений параметра  $a$  уравнение

$$(a-1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

**Решение.**

1)  $a - 1 = 0$ ,  $a = 1$ . Если  $a = 1$ , то уравнение имеет вид  $-2x + 3 = 0$ ,  $x = 3/2$ .

2) Если  $a \neq 1$ . Найдем дискриминант уравнения

В зависимости от значения  $D$  возможны случаи.  $D = 4a^2 - 4(a-1)(a+2) = -4a + 8$ ,

а)  $\begin{cases} D < 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a + 8 < 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} a > 2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a > 2$  Уравнение не имеет корней

б)  $\begin{cases} D = 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a + 8 = 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2$  тогда  $x = \frac{a}{a-1} = 2$

в)  $\begin{cases} D > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a + 8 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} a < 2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{-4a+8}}{2(a-1)} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$

**Ответ:** если  $a=1$ , то  $x = 3/2$ .

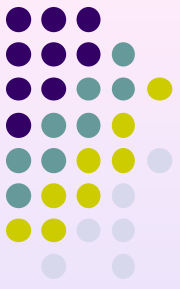
$a=2$ , то  $x=2$ ,

$a>2$ , то -нет решений

$a<2$  и  $a \neq 1$ , то

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$$





# Теорема Виета

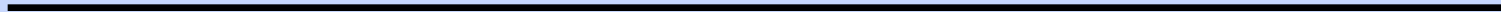
Если  $x_1, x_2$  корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

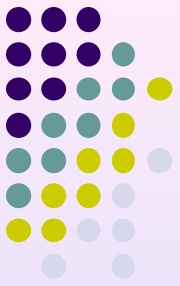


ТО

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}. \end{cases}$$



# Равенства, которые необходимо знать



Если  $x_1, x_2$ . корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad , \text{ то}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

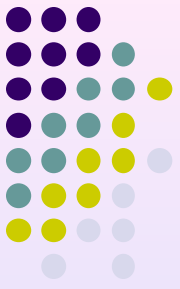
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2),$$

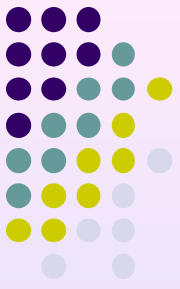
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$



**Пример 1.** Найти сумму и произведение корней уравнения





**Пример 1.** Найти сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

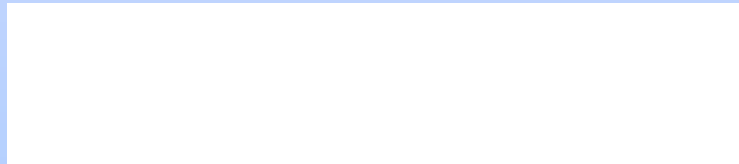
**Решение.** 1) **Проверка:** имеет ли уравнение действительные корни?

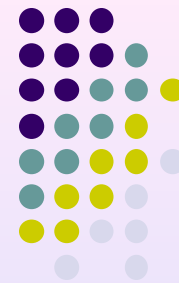
$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 16 + 60 = 76,$$

$$76 > 0$$

Уравнение имеет действительные корни.

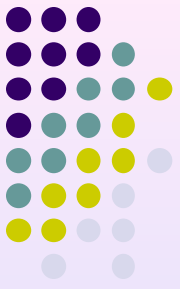
2) Нахождение суммы и произведения корней уравнения с использованием теоремы Виета.





**Пример 2.** *Найти сумму и произведение корней уравнения*

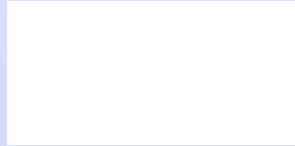




**Пример 2.** *Найти сумму и произведение корней уравнения*



**Решение.** *Проверка: имеет ли уравнение действительные корни?*

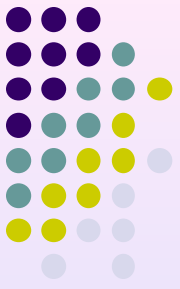


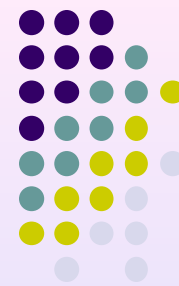
*Уравнение не имеет действительных корней.*

**Ответ.** *Уравнение не имеет действительных корней.*



**Пример 3.** При каких значениях параметра  $a$  произведение корней уравнения  $x^2 + ax + 5a = 0$  равно 10 ?





**Пример 3.** При каких значениях параметра  $a$  произведение корней уравнения  $x^2 + ax + 5a = 0$  равно 10 ?

**Решение.** 1) Найдем все значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$\Delta \geq 0$$

2) По теореме Виета произведение корней уравнения равно 10, если

Решение системы:

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

Ответ:

$$\dots$$







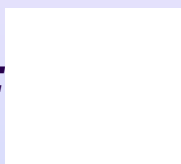
**Пример 4** Не решая уравнения



найти

корни уравнения

**Ответ:**



**Пример 5.**

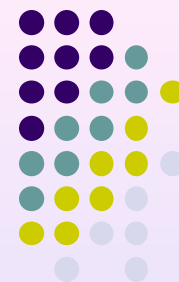
При каких значениях параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения



равна 4?

**Ответ:** при  $a = 0$





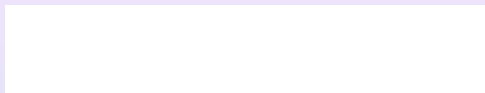
**Пример 6** При каких значениях параметра  $p$  разность корней уравнения  равна 9.

**Ответ:** при  $p = -81$  и  $p = 1$



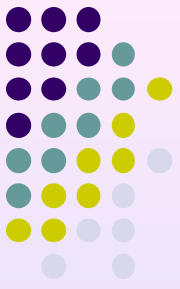


## *Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена*



- Уравнение имеет корни одного знака, если
  
- Уравнение имеет положительные корни, если
  
- Уравнение имеет отрицательные корни, если
  
- Уравнение имеет корни разных знаков, если





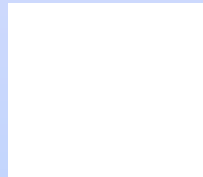
**Пример 1.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^2 + ax + 5a = 0$  имеет корни разных знаков ?

**Решение.** 1) Найдем все значения параметра  $a$ , при которых уравнение имеет действительные решения.

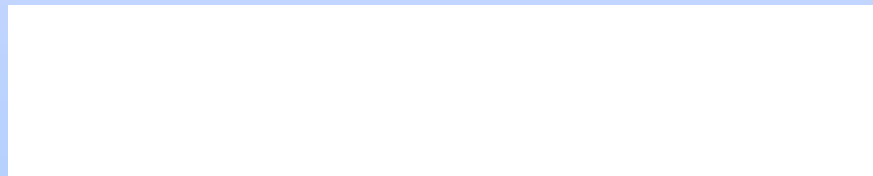
$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \quad , D > 0$$



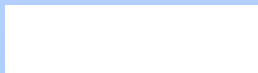
2) Уравнение имеет корни разных знаков, если

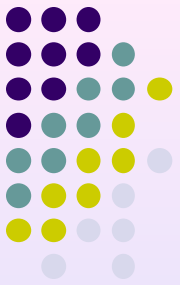


**Решение системы:**



**Ответ:**





**Пример 2.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

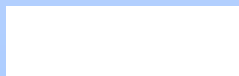
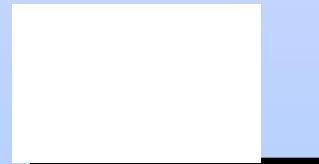
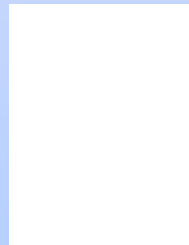
имеет

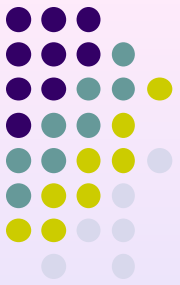
- а) корни разных знаков;
- б) корни одного знака;
- в) положительные корни

**Решение.** По формулам Виета

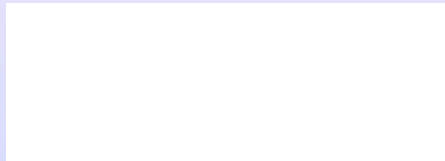


а) исходное уравнение имеет корни разных знаков, если выполняется условие

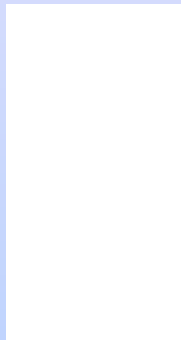


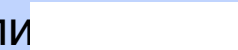



*б) исходное уравнение имеет корни одного знака, если выполняется условие*



*в) ) исходное уравнение имеет положительные корни, если выполняется условие*



**Ответ:** если , то уравнение имеет корни разных знаков,  
если , то корни – одного знака;

если , то положительные корни.

