# *Решение квадратных уравнений с параметрами*

$$\mathrm{A}x^2 + Bx + C = 0, \qquad (\mathrm{A} \neq 0) \qquad (1)$$

*А, В, С- выражения, зависящие от параметров*

*Схема исследования уравнения*

1) Если А=0, то В ·х + С = 0 , х = $-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$,

2) Если А≠0, то находим дискриминант $\mathrm{D} = \mathrm{b}^2 - 4ac$,

   а) Д > 0 $x_{1;2} = \frac{-\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2\mathrm{A}}$

   б) Д < 0, то уравнение не имеет решений

   в) Д = 0, то уравнение имеет единственное решение х=- $\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}}$,

**Пример 1.** При каких значениях параметра а уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$

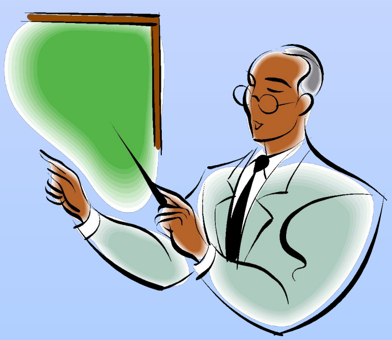
***имеет 1 корень (совпадающие корни) ?***

**Решение.** *Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет 1 корень D = 0 .*

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) = 0$$

$$a_1 = 0,\ a_2 = 20.$$

**Ответ.** $a = 0, a = 20.$



**Пример 1.** *Найти все значения параметра а, для которых уравнение* $(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0$

а) *имеет 2 различных корня;*

*б) не имеет корней;*

*в) имеет 2 равных корня.*

**Решение.**

***Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому а-1 ≠0.***

***Найдем дискриминант уравнения*** $D=4(2a+1)^2-4\cdot(a-1)(4a+3)=4(5a+4)$

а) Д > 0, а≠1 4(5а+4) ) > 0 ,

а > -4/5.

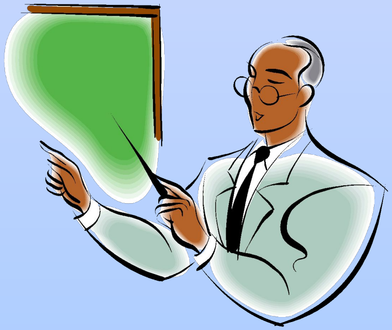
б) Д < 0, а < -4/5

в) Д = 0, а =-4/5

***Ответ: если а > -4/5 и а≠1 , то два различных корня,***

***если а < -4/5, то нет корней,***

***если а =-4/5, то два равных корня.***



**Пример 2.**

*При каких значениях параметра а уравнение*

$$(a^2 - a - 2)x^2 + (a+1)x + 1 = 0$$ *не имеет решений ?*

**Решение.**

*1)* $a^2 - a - 2 = 0$ *a = 2, a = -1*

*При a=2, 3x+1=0, x = - 1/3*

*при a = -1,* $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$ *, не имеет решений.*

2) $a^2 - a - 2 \neq 0$ $a \neq 2$ , $a \neq -1$

*В данном случае уравнение является квадратным и не имеет решений, если дискриминант меньше нуля*

Д = $(a+1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a-3)(a+1)$

Д<0 $-3(a-3)(a+1) \langle 0,$

$(a-3)(a+1) \rangle 0,$

$a \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$

*Теперь с учетом первого случая получаем*

*Ответ:* $a \in (-\infty;-1] \cup (3;+\infty)$

## Пример 3.

*При каких значениях параметра а уравнение*

$$(a+6)x^2+2ax+1=0$$

*имеет единственное решение?*

**Пример 3.**

*При каких значениях параметра а уравнение*

$$(a+6)x^2+2ax+1=0$$

*имеет единственное решение?*

**Решение.**

*По условию задачи уравнение необязательно является квадратным, поэтому рассмотрим два случая*

1) $$a+6=0,$$
$$a=-6$$

*Если а = -6,то -12х+1=0,*

*х = 1/12.*

2) *Если а ≠ -6, то квадратное уравнение имеет единственное решение, если Д =0*

$$Д=4a^2-4(a+6)=4(a^2-a-6),$$
$$a^2-a-6=0,$$
$$a_1=3, a_2=-2$$

*Ответ: при* $a\in\{-6,-2;3\}$

## Пример 4.

*Для всех значений параметра а решить уравнение*

$$(\mathrm{a}-1)\mathrm{x}^2-2ax+a+2=0$$

**Пример 4.**

*Для всех значений параметра а уравнение*

$$(a-1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

**Решение.**

1) $\begin{cases} a-1=0, \\ a=1 \end{cases}$ *Если а = 1,то уравнение имеет вид -2х+3=0, х = 3/2.*

2) *Если а ≠ 1. Найдем дискриминант уравнения*

$$Д = 4a^2 - 4(a-1)9a+2) = -4a+8,$$

*В зависимости от значения Д возможны случаи.*

а) $\begin{cases} Д<0 \\ a \neq 1, \end{cases} \begin{cases} -4a+8<0 \\ a \neq 1, \end{cases} \begin{cases} a>2, \\ a \neq 1, \end{cases} a>2$ *Уравнение не имеет корней*

б) $\begin{cases} Д=0, \\ a \neq 1 \end{cases} \begin{cases} -4a+8=0, \\ a \neq 1, \end{cases} a=2.$ *тогда* $x = \frac{a}{a-1} = 2$

в) $\begin{cases} Д>0 \\ a \neq 1, \end{cases} \begin{cases} -4a+8>0 \\ a \neq 1, \end{cases} \begin{cases} a<2, \\ a \neq 1, \end{cases}$ $x_{1;2} = \frac{2a \pm \sqrt{-4a+8}}{2(a-1)} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$

*Ответ: если а=1,то х = 3/2.*

*а=2, то х=2,*

*а>2, то -нет решений*

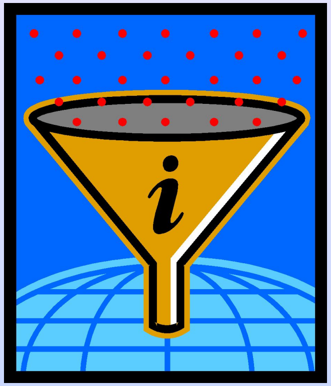
*а<2 и $a \neq 1$, то* $x_{1;2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$

# Теорема Виета

Если $x_1, x_2$. корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

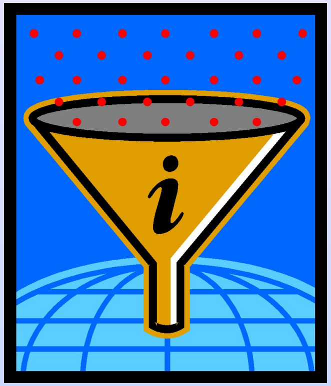
то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{C}{A}. \end{cases}$



# Равенства, которые необходимо знать

**Если** $x_1,\ x_2.$ **корни квадратного уравнения**

$$\mathrm{x}^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$$ **, то**



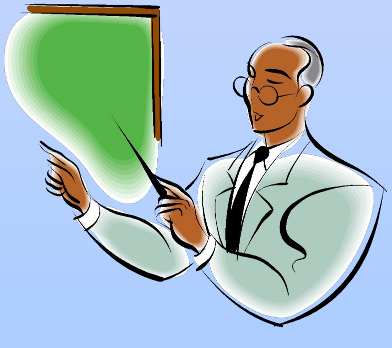

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2),$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$

**Пример 1**. *Найти сумму и произведение корней уравнения*



**Пример 1.** *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$3x^2+4x-5=0.$$

**Решение.**

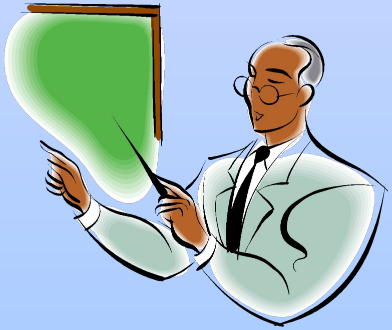
1) ***Проверка:*** *имеет ли уравнение действительные корни?*

$$D=4^2-4\cdot 3\cdot(-5)=16+60=76,$$

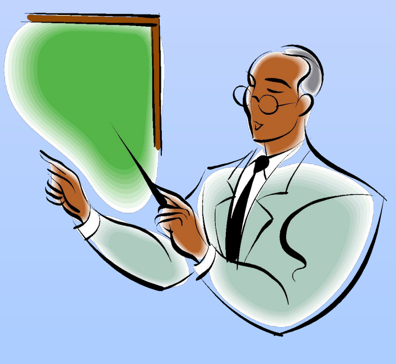
$$76>0$$

*Уравнение* ***имеет действительные корни.***

2) *Нахождение* ***суммы*** *и* ***произведения*** *корней уравнения с использованием теоремы Виета.*



**Пример 2.** *Найти сумму и произведение корней уравнения*

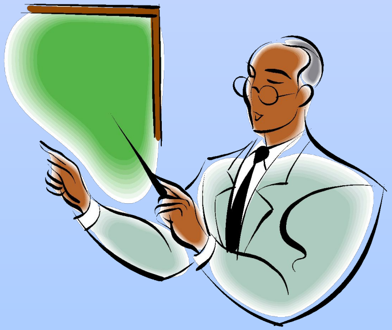


**Пример 2.** *Найти сумму и произведение корней уравнения*

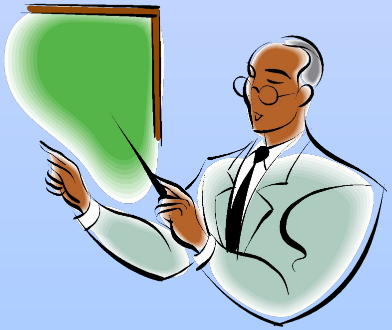
**Решение.** *Проверка: имеет ли уравнение действительные корни?*

*Уравнение **не имеет действительных корней.***

**Ответ.** *Уравнение не имеет действительных корней.*



**Пример 3.** ***При каких значениях параметра а произведение корней уравнения*** $x^2 + ax + 5a = 0$ ***равно 10 ?***



**Пример 3.** *При каких значениях параметра а произведение корней уравнения* $x^2 + ax + 5a = 0$ *равно 10 ?*

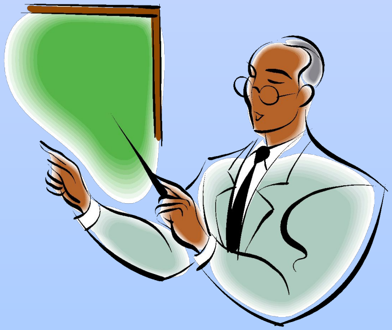
**Решение.** *1) Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет действительные решения.*

Д≥ 0

*2) По теореме Виета* ***произведение*** *корней уравнения равно 10, если*

*Решение системы:*

**Ответ:**



**Пример 4** *Не решая уравнения*

*найти*

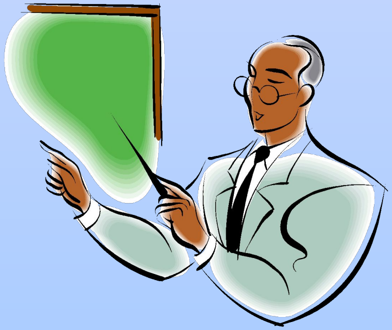
корни уравнения

**Ответ:**

**Пример 5.**

*При каких значениях параметра а сумма квадратов корней уравнения* *равна 4?*

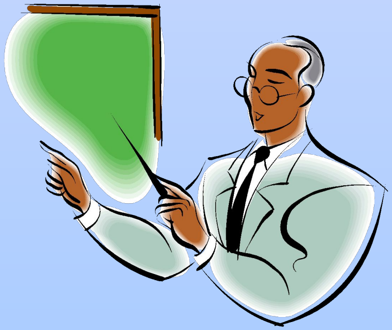
**Ответ:** при а = 0



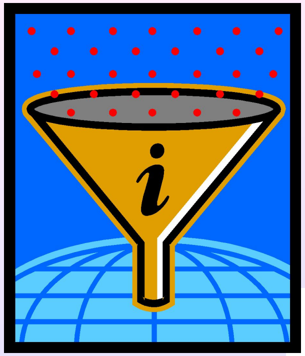
**Пример 6** *При каких значениях параметра p разность корней уравнения*

*равна 9.*

***Ответ*: при p = -81и p =1**



# *Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена*



- Уравнение имеет корни одного знака, если
- Уравнение имеет положительные корни, если
- Уравнение имеет отрицательные корни, если
- Уравнение имеет корни разных знаков, если

**Пример 1.** *При каких значениях параметра а уравнение*

$x^2 + ax + 5a = 0$ *имеет корни разных знаков ?*

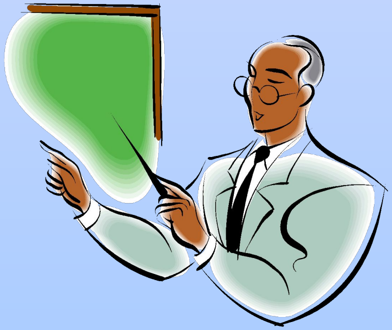
**Решение.** *1) Найдем все значения параметра а, при которых уравнение имеет действительные решения.*

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20)$$ ,Д> 0

*2) Уравнение имеет корни разных знаков, если*

*Решение системы:*

**Ответ:**



**Пример 2.** *При каких значениях параметра a уравнение*

*имеет*

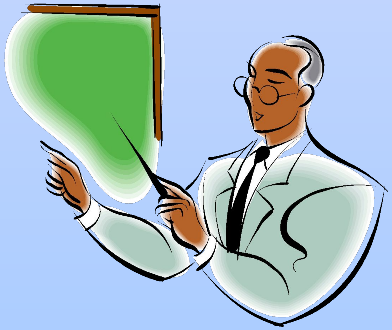
*а) корни разных знаков;*

*б) корни одного знака;*

*в) положительные корни*

**Решение.** *По формулам Виета*

*а) исходное уравнение имеет корни разных знаков, если выполняется условие*



***б) исходное уравнение имеет корни одного знака, если выполняется условие***

***в) ) исходное уравнение имеет положительные корни, если выполняется условие***

***Ответ:*** если ,то уравнение имеет корни разных знаков,
если , то корни – одного знака;

если , то положительные корни.