Квадратный трехчлен. Квадратичная функция. Квадратные уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители.

(8 класс)

Разработано учителем математики МОУ «СОШ» п. Аджером Корткеросского района Республики Коми

Мишариной Альбиной Геннадьевной

Содержание

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Определение

Многочлен **ax^2+bx+c** , *где а, в, с – числа (коэффициенты), причем*

а ≠ 0 ***называется квадратным трехчленом***

Причем: а – старший коэффициент,

в - второй коэффициент

с – свободный член

Назовите коэффициенты:

1) $2x^2 - 6x + 1$
2) $-2x^2 + 8x - 5$
3) $3x^2 + 2x$
4) $x^2 - 4x + 7$
5) $-x^2 - 8$
6) $6x^2 - x - 2$

1) $a = 2$; $в = -6$; $c = 1$
2) $a = -2$; $в = 8$; $c = -5$
3) $a = 3$; $в = 2$; $c = 0$
4) $a = 1$; $в = -4$; $c = 7$
5) $a = -1$; $в = 0$; $c = -8$
6) $a = 6$; $в = -1$; $c = -2$

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Запомним

- Функция $y = ax^2+bx+c$, ***где а, в, с – произвольные числа, причем а ≠0 называется квадратичной.***
- ***Графиком квадратичной функции является парабола***

Запомним

- Ветви параболы ***y* = *ax*²+*bx*+*c*** направлены ***вверх*, *если a > 0*, *и вниз если a < 0***
- Как найти координаты вершины параболы?

  – абсцисса x_0 вершины параболы вычисляется по

  формуле $x_0 = -в/2а$

  - ордината y_0 вершины параболы

  вычисляется подстановкой найденной x_0

  в заданную функцию

- Осью симметрии параболы является прямая

  $x = -в/2а$

Найти координаты вершины параболы, её ось симметрии и построить её:

1) $y = 2x^2 - 8x + 1$
2) $y = -2x^2 + 16x - 5$

1) Т.к. $a = 2$; $в = -8$; $c = 1$

то $x_0 = 8 : (2\cdot2) = 2$

$y_0 = 2\cdot2^2 - 8\cdot2 + 1 = -7$

Значит: (2; -7) координаты вершины, а ось симметрии параболы: $x=2$

2) Т.к. $a = -2$; $в = 16$; $c = -5$

то $x_0 = -16 : (2\cdot(-2)) = 4$

$y_0 = -2\cdot 4^2 + 16\cdot4 - 5 = 27$

Значит: (4; 27) координаты вершины; ось симметрии: $x=4$

Самостоятельно: вычислить координаты вершины параболы

1) $y = x^2 + 4x + 5$
2) $y = 2x^2 + 4x$
3) $y = -3x^2 + 6x + 1$
4) $y = 3x^2 - 12x$
5) $y = x^2 + 6x - 2$
6) $y = -2x^2 + 8x - 5$
7) $y = -4x^2 - 8x$

Проверим:

1) $(-2; 1)$
2) $(-1; -2)$
3) $(1; 4)$
4) $(2; -12)$
5) $(-3; -11)$
6) $(2; 3)$
7) $(-1; 4)$

Рефлексия:

1) Сегодня на уроке я запомнил…
2) Сегодня на уроке я научился…
3) Сегодня на уроке я узнал …
4) Сегодня на уроке я выучил…
5) Сегодня на уроке было интересно …
6) Сегодня на уроке мне понравилось …

Квадратные уравнения

Содержание:

- Определение квадратного уравнения
- Классификация квадратных уравнений
- Способы решения квадратного уравнения

Определение

Квадратным уравнением

называется уравнение вида

$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$,

где *x* - переменная,

a, b, c – любые действительные числа, причем $a \neq 0$. (Почему?)

Причем: а – старший коэффициент

в - второй коэффициент

с – свободный член

Классификация .

Квадратные уравнения.

неполное

$b = 0$; $x^2 + c = 0$

$c = 0$; $ax^2 + bx = 0$

$b = 0$; $c = 0$; $ax^2 = 0$

полное

$ax^2 + b\,x + c = 0$, $a \neq 0$

приведённое

$x^2 + p\,x + q = 0$, $a = 1$

Запомним

Решить квадратное уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Причем: квадратное уравнение может иметь либо 2 корня (если **D >0**),

либо 1 корень (если **D = 0**),

либо вообще не иметь корней (если **D <0**)

Способы решения квадратного уравнения:

- Разложением на множители
- Выделением полного квадрата
- По формуле корней (универсальный способ)
- По теореме Виета
- По коэффициентам
- Графический
- Введение новой переменной

Разложение левой части на множители

$$8x^2+10x+3=0,$$

$$8x^2+4x+6x+3=0,$$

$$4x(2x+1)+3(2x+1)=0,$$

$$(2x+1)(4x+3)=0,$$

$$2x+1=0;4x+3=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{2};x_2=-\frac{3}{4}$$

$$Ответ: x_1=-\frac{1}{2};x_2=-\frac{3}{4}.$$

Выделение полного квадрата

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Например: $x^2 - 10x + 16 = 0,$

$$x^2 - 2*5x + 25 - 25 + 16 = 0,$$

$$(x-5)^2 - 9 = 0,$$

$$(x-5)^2 = 9,$$

$$x - 5 = -3; x - 5 = 3,$$

$$x_1 = 2; x_2 = 8$$

$$\textit{Ответ}: x_1 = 2; x_2 = 8.$$

Рассмотрим ещё одно решение:

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0.$

Решение: $x^2 + 6x - 7 = 0.$

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 9 - 7 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 16 = 0.$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

Значит: $x + 3 = 4$ и $x + 3 = -4.$

$x = 1$ $\quad$ $x = -7.$

Ответ: 1; -7.

Алгоритм решения квадратного уравнения ПО ФОРМУЛЕ КОРНЕЙ:

1) Найти число, называемое **дискриминантом** квадратного уравнения

   и равное $D = b^2 - 4ac$.

2) Дискриминант показывает сколько корней имеет уравнение

- если $D<0$, то данное квадратное уравнение ***не имеет корней;***

- если ***D*=0**, то данное квадратное уравнение имеет
единстве $x = -\frac{b}{2a}$ рень, который
равен

- если ***D*>0**, то данное квадратное уравнение имеет два корня, которые равны

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Решить уравнение: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Здесь $a = 2, b = -5, c = 2$.

Имеем $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$.

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня.

Найдем их по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = 2,$$

то есть $x_1 = 2$ и $x_2 = 0,5$ - корни заданного уравнения.

Решить самостоятельно:

- $x^2 - 2x + 1 = 0.$
- $2x^2 - 3x + 5 = 0.$

Проверим

1 уравнение:

получили один корень

x = 1, т.к. ***D = 0***

Проверим

2 уравнение:

уравнение не имеет действительных корней, т.к. ***D < 0***

Работаем в парах:

1) Выберите квадратные уравнения и определите значения их коэффициентов:

А) $2x^2 - 8 = 0$; Б) $-x^2 + 4x + 1 = 0$;

В) $3x^3 + 2x - 9 = 0$; Г) $5x - 3x^2 + 2 = 0$;

Д) $x - 3 = 0$; Е) $3 - 5x^2 - x = 0$;

Ж) $x^2 - x = 0$. И) $x^2 + 5 - 2x = 0$

2) По коэффициентам указать приведенные уравнения.

3) Из квадратных уравнений выбрать неполные и решить их.

Проверим:

1) **<u>Квадратные уравнения:</u>**

А) $2x^2 - 8 = 0$, где **а=2; в=0; с=-8**

Б) $-x^2 + 4x + 1 = 0$, где **а=-1; в=4; с=1**

Г) $5x - 3x^2 + 2 = 0$, где **а=-3; в=5; с=2**

Е) $3 - 5x^2 - x = 0$, где **а=-5; в=-1; с=3**

Ж) $x^2 - x = 0$, где **а=1; в=-1; с=0**

И) $x^2 + 5 - 2x = 0$, где **а=1; в=-2; с=5**

Проверим:

2) Приведенные квадратные уравнения:

И) $x^2 + 5 - 2x = 0$

3) Неполные квадратные уравнения:

А) $2x^2 – 8 = 0$ и Ж) $x^2 – x = 0$

Решения: $\underline{\mathbf{2x^2 – 8 = 0}}$ и $\underline{\mathbf{x^2 – x = 0}}$

$2(x^2 - 4)=0$ $x(x-1)=0$

$2\neq0$; $x^2 - 4 =0$ $x=0$; $x-1=0$

$x^2 = 4$ $\mathbf{x=0; x=1}$

$\mathbf{x = \pm 2}$

Пример решения квадратного уравнения

Дано уравнение: $3x^2+9=12x-x^2$

Решение: $3x^2+9-12x+x^2=0$

$$4x^2-12x+9=0$$

$$D=(-12)^2-4\cdot 4\cdot 9=144-144=0$$

$$x_{1,2}=-\frac{-12}{8}=\frac{3}{2}$$

Ответ: $x=\frac{3}{2}$

Самостоятельная работа

(по вариантам)

$$(a+3)(a-2)=-6;$$

$$(y+8)(y-1)=7y+1.$$

$$(x-8)(x+5)=-40;$$

$$(x-8)(x+2)=-6x.$$

Проверь решение:

$$(y+8)(y-1)=7y+1;$$

$$y^2+8y-y-8=7y+1;$$

$$y^2=9;$$

$$y=-3 \text{ или } y=3;$$

$$\textit{Ответ}: -3;\ 3.$$

$$(x-8)(x+2)=-6x;$$

$$x^2-8x+2x-16=-6x;$$

$$x^2=16;$$

$$x=-4 \text{ или } x=4;$$

$$\textit{Ответ}: -4;\ 4.$$

Проверь решение:

$$(a+3)(a-2)=-6;$$
$$a^2+3a-2a-6=-6;$$
$$a^2+a=0;$$
$$a(a+1)=0;$$
$$a=0 \text{ или } a=-1;$$
$$\text{Ответ}: -1;\ 0.$$

$$(x-8)(x+5)=-40;$$
$$x^2-8x+5x-40=-40;$$
$$x^2-3x=0;$$
$$x(x-3)=0;$$
$$x=0 \text{ или } x=3;$$
$$\text{Ответ}: 0;\ 3.$$

Запомни: по теореме Виета решаются только приведенные квадратные уравнения

Теорема Виета: Если корни x_1 и x_2 приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 \cdot x_2 = q$.

Обратное утверждение: Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, $m \cdot n = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Обобщённая теорема: Числа x_1 и x_2 являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Следствие: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$

НАПРИМЕР

Дано приведённое квадратное уравнение

$$x^2-7x+10=0$$

<u>Решение</u>: методом подбора проверим числа 2 и 5. Их произведение равно **10** (**т.е. свободному члену уравнения**), а их сумма равна **7**, (**т.е. второму коэффициенту уравнения , но с противоположным знаком**)

Значит эти числа и являются корнями данного уравнения.

Ответ: **2 и 5**

Решить :

Решаем вместе:

1) $x^2 - 15x + 14 = 0$
2) $x^2 + 3x – 4 = 0$
3) $x^2 - 10x – 11 = 0$
4) $x^2 + 8x – 9 = 0$

Решить самостоятельно в парах:

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$
2) $x^2 - 19x + 18 = 0$
3) $x^2 - 9x – 10 = 0$
4) $x^2 + 9x + 20 = 0$

Проверим ответы:

1) $x_1 = -1$ $x_2 = -7$
2) $x_1 = 1$ $x_2 = 18$
3) $x_1 = -1$ $x_2 = 10$
4) $x_1 = -4$ $x_2 = -5$

Решение квадратных уравнений по коэффициентам

1) Если с**умма коэффициентов равна 0, т.е.** $a + в + c = 0$ **,** то $x_1 = 1$ $x_2 = c/a$.

2) Если $a - в + c = 0$, то $x_1 = -1$ $x_2 = -c/a$.

3) Если $a = c$, $в = a^2 + 1$, то

$$x_1 = -a = -c \qquad x_2 = -1/a = -1/c.$$

4) Если $a = c$, $в = -(a^2 + 1)$, то

$$x_1 = a = c \qquad x_2 = 1/a = 1/c$$

Решить самостоятельно по группам:

1) $3x^2 + 4x + 1 = 0$,

2) $5x^2 - 4x - 9 = 0$,

3) $6x^2 + 37x + 6 = 0$,

4) $7x^2 + 2x - 5 = 0$,

5) $13x^2 - 18x + 5 = 0$,

6) $5x^2 + x - 6 = 0$,

7) $7x^2 - 50x + 7 = 0$,

8) $6x^2 - 37x + 6 = 0$,

9) $7x^2 + 50x + 7 = 0$.

Проверим:

№1 $x_1 = -1, x_2 = -\dfrac{1}{3};$

№2 $x_1 = -1, x_2 = \dfrac{9}{5} = 1\dfrac{4}{5};$

№3 $x_1 = -6, x_2 = -\dfrac{1}{6};$

Проверим:

№4 $x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{7};$

№5 $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{13};$

№6 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5};$

Проверим:

№7 $x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7};$

№8 $x_1 = -6, x_2 = -\frac{1}{6};$

№9 $x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7}.$

Решим графически уравнение:

$$x^2 - 4 = 0$$

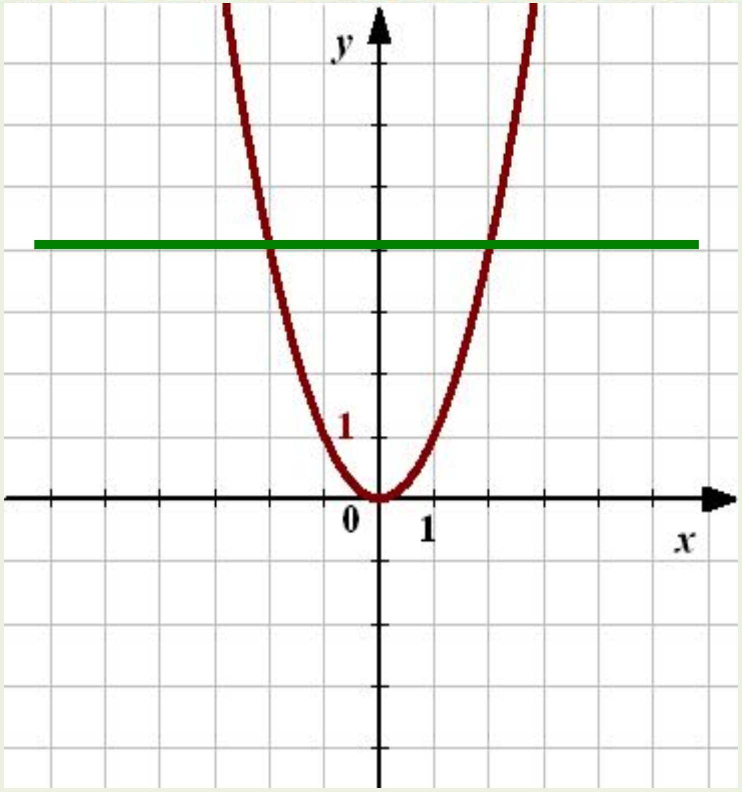
Решение: $x^2 - 4 = 0$

преобразуем

$$x^2 = 4$$

Пусть **$y_1 = x^2$ и $y_2 = 4$**

Построим эти графики в одной координатной плоскости



Ответ: x = -2; x = 2

Решить графически уравнения по вариантам:

1 вариант

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$
2) $- x^2 + 6x - 5 = 0$
3) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

2 вариант

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$
2) $-x^2 - 3x + 4 = 0$
3) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Введение новой переменной

Умение удачно ввести новую переменную – облегчает решение

Например: надо решить уравнение **$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.**

Решение: пусть: ***$a = 2x + 3$.***

Произведем замену переменной: **$a^2 = 3a - 2$.**

Тогда получим уравнение **$a^2 - 3a + 2 = 0$** и у него $D > 0$.

Решим квадратное уравнение и получим: **$a_1 = 1$, $a_2 = 2$.**

Произведем обратную замену и вернемся к переменной **x**:

1). если **$a_1 = 1$,** то $2x + 3 = 1$ и тогда $x_1 = -1$;

2). если **$a_2 = 2$,** то $2x + 3 = 2$ и тогда $x_2 = -0,5$

Ответ: -1; -0,5.

Решить самостоятельно в парах:

а) $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$;

б) $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$

Проверим ответы:

а)

б)

Разложение квадратного трехчлена на множители

Запомнить:

Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, то квадратный трехчлен ax^2+bx+c, *раскладывается на множители следующим образом:*

$$ax^2+bx+c= a\cdot(x - x_1)(x - x_2).$$

Разложите квадратный трехчлен на множители:

1 вариант

1) $x^2 - 11x + 24$
2) $x^2 + 7x + 12$
3) $-x^2 - 8x + 9$
4) $3x^2 + 5x - 2$
5) $-5x^2 + 6x - 1$

2 вариант

1) $x^2 - 2x - 15$
2) $x^2 + 3x - 10$
3) $-x^2 + 5x - 6$
4) $5x^2 + 2x - 3$
5) $-2x^2 + 9x - 4$

Проверим

1 вариант

1) $(x-8)(x-3)$
2) $(x+3)(x+4)$
3) $-(x-1)(x+9)$
4) $3\cdot(x-1/6)(x+13/6)$
5) $-5\cdot(x-1)(x-0{,}2)$

2 вариант

1) $(x-5)(x+3)$
2) $(x-2)(x+5)$
3) $-(x-2)(x-3)$
4) $5\cdot(x+1)(x-0{,}6)$
5) $-2\cdot(x-\frac{1}{2})(x-4)$

Рефлексия:

- Сегодня на уроке я запомнил…
- Сегодня на уроке я научился…
- Сегодня на уроке я узнал …
- Сегодня на уроке я выучил…
- Сегодня на уроке было интересно …
- Сегодня на уроке мне понравилось …

СПАСИБО

ЗА УРОК !!!

Источники изображений

http://www.avazun.ru/photoframes/&sort=&p=10

http://s59.radikal.ru/i163/0811/73/ad11fb505124.png