Лекции по математике для студентов экономических специальностей

Мария Альбертовна Зироян

Профессор кафедры математики и информатики

Лекция 1

Комплексные числа:

- *определение;*
- *геометрическое изображение комплексного числа;*
- *формы записи комплексного числа;*
- *операции над комплексными числами.*

Решить уравнение: $z^2 - 2z + 10 = 0$

Решение:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$\textit{Обозначим } \sqrt{-1} = i - \textit{мнимая единица} \rightarrow i^2 = -1$$

$$i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^5 = i \textit{ и т.д.}$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \frac{2(1 \pm 3i)}{2} = 1 \pm 3i$$

Определение.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy$$

где x, y *- действительные числа ,* i — *мнимая единица. Число* x —*действительная часть комплексного числа* z *и обозначается* $\mathrm{Re}(z)$ *, а* y — *мнимая часть и обозначается* $\mathrm{Im}(z)$*, т.е.*

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

1. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если

$$x_1 = x_2; y_1 = y_2$$

2. Z = 0, если x=0; y=0

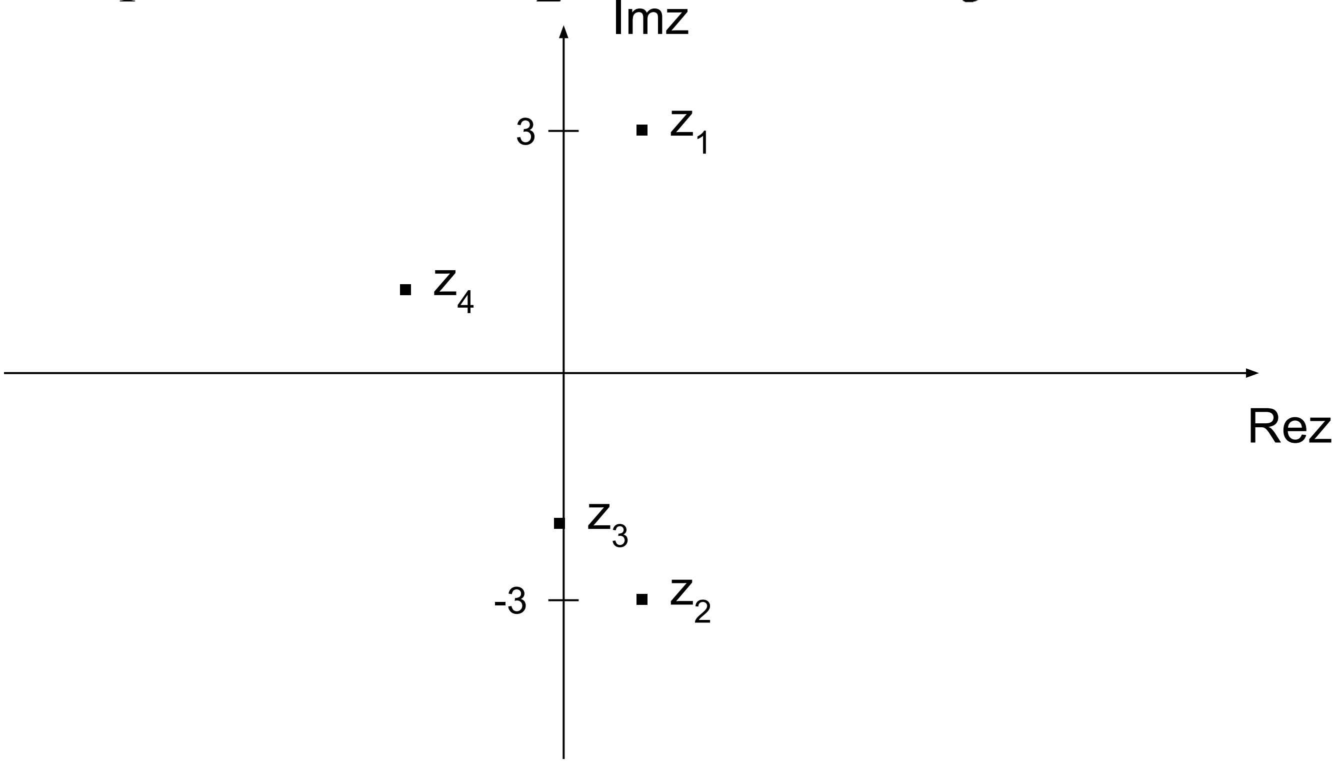
3. Если y=0, то z $\in$ R.

4. Числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_1 - iy_1$ называются сопряженными и обозначаются z и $\overline{z}$

Такая форма записи комплексного числа называется <u>алгебраической</u>.

Изображается комплексное число точкой на комплексной плоскости.

$$z_1 = 1 + 3i, z_2 = 1 - 3i, z_3 = -2i, z_4 = -2 + i$$



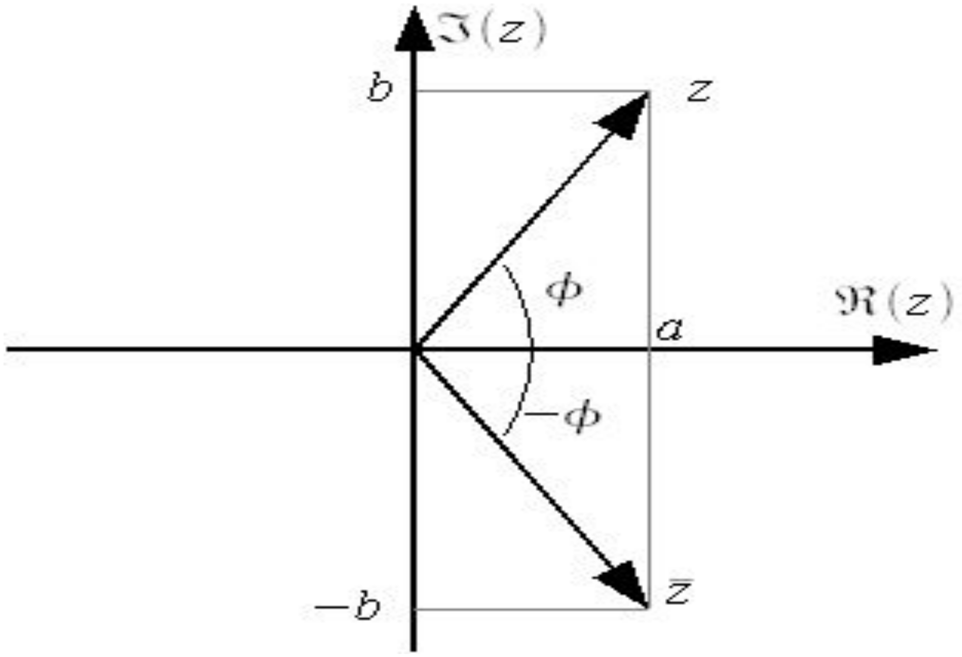
Геометрическое изображение комплексного числа

Для геометрического представления комплексных чисел служат точки координатной плоскости *OXY*.

Плоскость называется комплексной , если каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка плоскости $z(x; y)$, причем это соответствие взаимно однозначно.

Оси *OX* и OY, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = y$, называются соответственно действительной и мнимой осями.

Геометрическое изображение комплексного числа



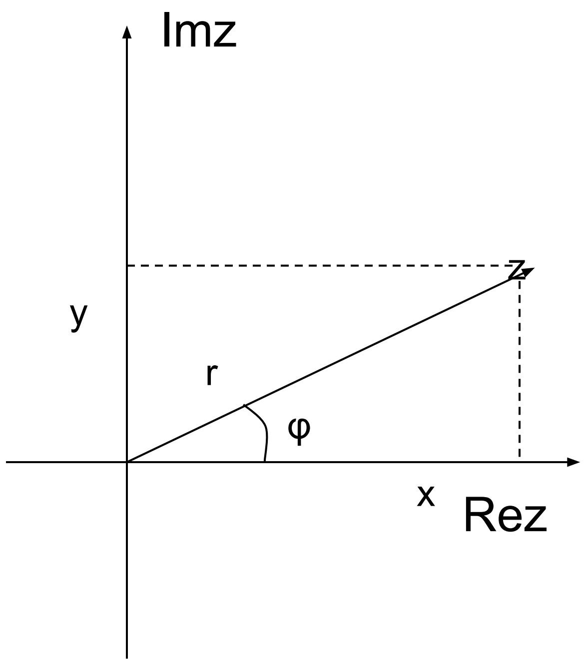
Геометрическое изображение комплексного числа

Для геометрического представления комплексных чисел служат точки координатной плоскости *OXY*.

Плоскость называется комплексной , если каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка плоскости $z(x; y)$, причем это соответствие взаимно однозначно.

Оси *OX* и OY, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = y$, называются соответственно действительной и мнимой осями.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \to z = x + iy =$$

$$= r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi =$$

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r(\cos(\varphi + 2\pi n) + i\sin(\varphi + 2\pi n))$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| - \textit{модуль числа } z$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x};\ \varphi = \arg z - \textit{аргумент числа } z$$

$$0 \le \varphi < 2\pi$$

Показательная форма записи комплексных чисел

Из формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

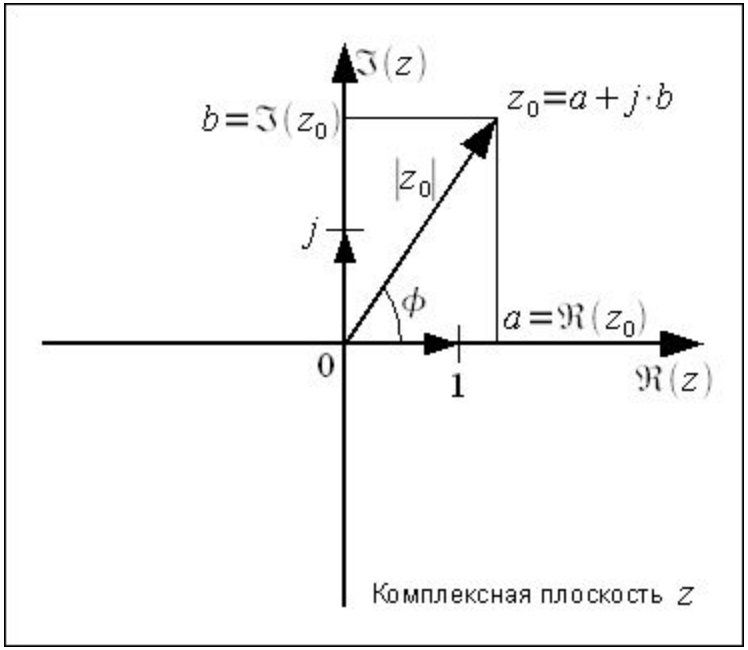
$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

(1707-1783)

Леонард Эйлер принадлежит к числу гениев, чье творчество стало достоянием всего человечества. Открытия Эйлера в математике, механике, физике и технике прочно вошли в современную науку. Многие из них были сделаны в Петербургской Академии наук, где Леонард Эйлер проработал 31 год (в 1727-1741 гг. и 1766-1783 гг.).

Показательная форма записи комплексных чисел

Из формулы Эйлера



$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Пример. *z=-1-i* записать в тригонометрической и показательной формах.

Решение.

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\} \to |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \to \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = -1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

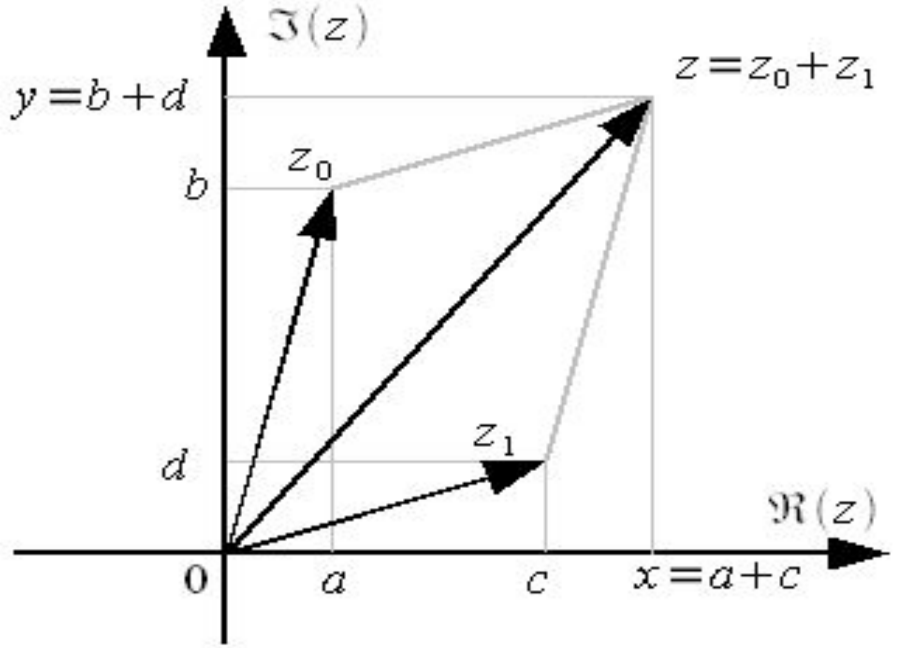
Операции над комплексными числами $z_0=x_0+iy_0$ и $z_1=x_1+iy_1$

Сумма двух комплексных чисел и есть также комплексное число $:z_0 + z_1 =(x_0+x_1)+i(y_0+y_1)$

Пример: $(3+2i)+(1+5i)=(3+1)+i(2+5)=4+7i.$

Как следует из выражения при сложении реальные и мнимые части комплексного числа также складываются.

На комплексной плоскости операцию сложения можно реализовать как сложение векторов комплексных чисел по правилу параллелограмма

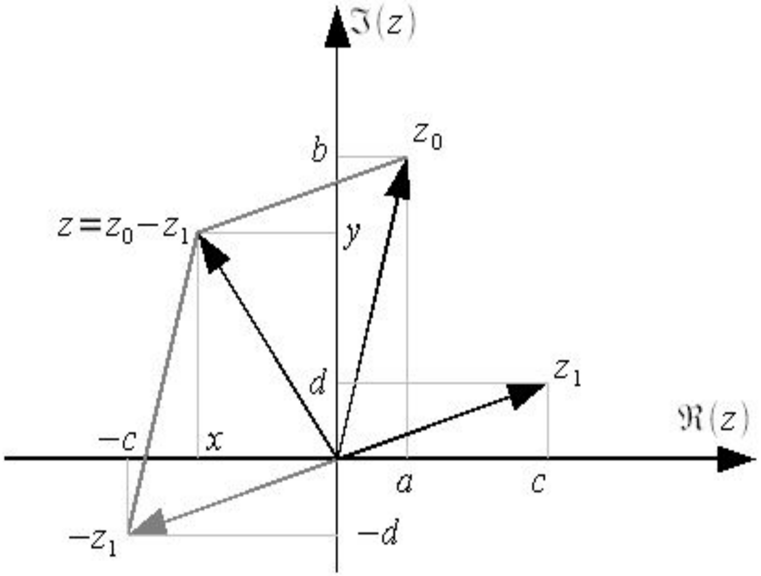


2.Вычитание комплексных чисел

Разность двух комплексных чисел и есть также комплексное число:

z_0 - z_1 =(x_0-x_1)+i(y_0-y_1).

Пример: ***(4+i)-(-2-i)=(4+2)+i(1+1)=6+2i.***



На комплексной плоскости операцию вычитания можно реализовать как вычитание векторов комплексных чисел по правилу параллелограмма . На первом шаге из вектора z_1 **формируется вектор** $-z_1$ **, после чего вектор** z_1 **складывается с вектором** $-z_1$ **по правилу параллелограмма**.

Расстояние между двумя точками:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3. **Умножение комплексных чисел.**

Для того чтобы получить формулу для умножения комплексных чисел необходимо перемножить два комплексных числа по правилу умножения многочленов:

$z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

Пример 1.

$(1+3i)(-5-2i)=-5-15i-2i-6i^2 =-5-17i+6=$
$=1-17i$.

Пример 2.

$(1+3i)(1-3i)=1-3i+3i-9i^2 =1+9=10$.

$z \cdot \bar{z}$ всегда действительное число

4. Деление комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = z \text{ такое, что } z \cdot z_2 = z_1$$

Пример

$$\frac{4+i}{3+2i} = \frac{(4+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12+3i-8i-2i^2}{9+4} =$$

$$= \frac{14-5i}{13} = \frac{14}{13} - \frac{5}{13}i$$

5. Операции над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

1. $$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

2. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (|z_2| \neq 0)$$

3. $$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi); n \in N$$

4. $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right); k = 0;1;2;\ldots n-1$$