Основные понятия теории вероятности

Базовые понятия теории вероятностей

- Опыт
- Событие
- Переменная величина

Понятие опыт

Определение. Под опытом понимается воспроизведение некоторого комплекса условий. При этом предполагается, что опыт может быть повторен сколько угодно раз

Пример 1. Объект – фонд скважин

Опыт – бурение скважин

Комплекс условий: наличие скважин, бурильщиков и процесса бурения

Данные условия можно повторить много раз

Пример 2. Бросание игрального кубика

Опыт- бросок

Комплекс условий- наличие кубика и игроков

Понятие события

<u>Определение.</u> Пусть имеется некоторый опыт Событие, связанное с этим опытом, называется любой его исход.

При этом событие называется случайным, если оно может появиться или не появиться в данном опыте

Обозначение: D: (описание события)

<u>Пример</u> Опыт-бросание игрального кубика

События: A: (Выпадение четного числа)

B: (Выпадение шестерки)

Вероятность появления события

Мерилом возможности появления события А: в данном опыте служит вероятность появления этого события в опыте

<u>Определение.</u> Пусть А- случайное событие, связанное с некоторым опытом Предположим, что опыт повторен n раз, в итоге событие А появилось в опытах n_a раз Тогда дробь n_a/n называется относительной частотой появления события А в опытах, а вероятность Р(А) появления события А определяется как предел этой дроби при многократном повторении опыта:

$$P(A) = \lim\left(\frac{n_a}{n}\right) \quad \text{при} \quad n \Rightarrow \infty \qquad (3.1)$$

Свойства вероятности события

1. Вероятность события приближенно равна относительной частоте появления события: $P(A) \approx n_A/n$
2. Из определения следует, что область определения P(A) – интервал (0, 1)

Замечание. Иногда вероятность случайного события можно определить априори не прибегая к испытаниям

Например, опыт с игральным кубиком, вероятность появления любого числа из набора (1 2 3 4 5 6) одинакова и равна 1/6.

Достоверное и невозможное события

<u>Определение.</u> Пусть R событие, связанное с некоторым опытом, которое всегда появляется при его повторении, т.е $P(R)\equiv 1$. Тогда событие R называется достоверным событием

<u>Определение.</u> Пусть I событие, связанное с некоторым опытом, которое никогда не появляется при его повторении, т.е $P(I)\equiv 0$. Тогда событие I называется невозможным событием

Пример.

Опыт - бросание игральной кости:

выпадение любого числа из набора (1 2 3 4 5 6) – событие достоверное

выпадение числа 7 – событие невозможное

Практически достоверное событие

Определение. Событие V, связанное с некоторым опытом, называется «практически достоверным», если вероятность его появления удовлетворяет условию: $0.95 \le P(V) \le 1$

Любое случайное событие W, связанное с опытом, вероятность которого $0 < P(W) \le 0.05$, называется «практически невозможным»

Установлено, что практически достоверное событие, как правило, появляется при первом проведении опыта

Если этого не происходит, значит нарушены условия опыта

Условная вероятность

Определение. Пусть A и B два события, связанные с опытом, причем P(A)>0. Проведено такое количество опытов N, при котором $N_a>0$ (количество появлений события A). Пусть N_{ab} количество опытов, в которых событие B появилось вместе с событием A Отношение N_{ab}/N_a называют относительной частотой появления события B при условии появления события A

Условная вероятность появления события B есть:

$$P(B/A) = \lim\left(\frac{N_{AB}}{N_A}\right) \quad \text{при} \quad n \Rightarrow \infty \qquad (3.2)$$

Свойства: $P(A|B) \approx N_{ab}/N_a$ $\qquad 0 \le P(A|B) \le 1$

Вероятность совместного события

Разделив числитель и знаменатель (3.2) на N, получим:

$$P(B/A) \approx \left(\frac{\frac{N_{AB}}{N}}{\frac{N_A}{N}} \right) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{при} \quad n \Rightarrow \infty \qquad (3.3)$$

где P(AB) – вероятность появления одновременно событий A и B в N опытах

Пример с кубиком. A:(четное число), B:(число 6)

P(A)=1/2, P(B)=1/6. Тогда P(B|A)=(1/6)/(1/2)=1/3

Событие B совпадает с событием AB, след. P(AB)=P(B)=1/6. Отметим, P(B)≠P(B|A)

P(B) = P(B|A) – условие независимости событий

Теорема умножения вероятностей

<u>Теорема.</u> Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть независимые события, то для них справедливо равенство:

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

где: $P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$ – вероятности появления каждого события

Пример. Бросание двух кубиков.

Событие A:(появление 6 на кубе 1)

Событие B:(появление 6 на кубе 2)

$P(A)=1/6$, $P(B)=1/6$

Вероятность появление двух чисел 6 одновременно:

$$P(AB)=P(A)P(B)=(1/6)(1/6)=1/36$$

Понятие переменная

<u>Определение.</u> Пусть задано множество значений A_x $\{t_1,t_2,\ldots t_n\}$. Тогда величина X называется переменной, если она может принимать любые значения из множества A_x, а множество A_x называется областью допустимых значений или областью определения X

Если A_x состоит из набора значений, которые можно пронумеровать (счетное множество), то X – дискретная переменная

Если A_x представляет собой отрезок или интервал на числовой оси, то такая переменная называется непрерывной

Дискретная случайная переменная

Определение. Дискретная переменная X с множеством допустимых значений A_x называется случайной, если все ее возможные значения появляются в некотором опыте со случайными исходами A:(x=t) и если для нее задан закон распределения вероятностей

Первое свойство объединяет все случайные переменные

Второе свойство – обеспечивает индивидуальность каждой случайной переменной

Закон распределения дискретной случайной переменной

<u>Определение.</u> Законом распределения дискретной случайной величины X называется функция $P_x(t)$, определенная на всей числовой оси, значения которой характеризуют вероятность появления в данном опыте события B:(x=t), и определяется по правилу:

$$P_x(t) = \begin{cases} P(x = t) & \text{при} \quad x \in A_x \\ 0 & \text{при} \quad x \notin A_x \end{cases}$$

где: P(x=t) вероятность события B:(x=t)

Закон распределения ДСП называют вероятностной функцией

Классические примеры дискретных случайных переменных

Пример 1. Бросание кубика

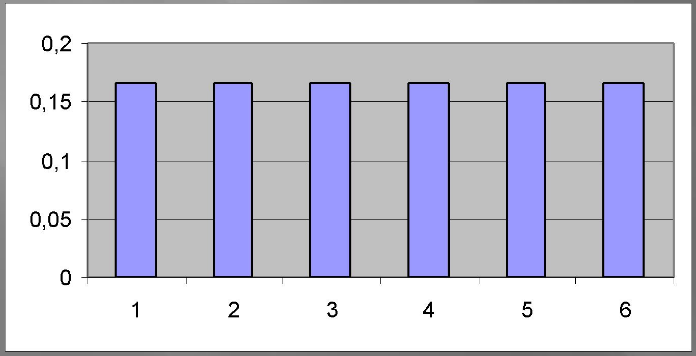
Ax={1,2,3,4,5,6} – область определения

X- цифра на верхней грани (СДП)

Закон распределения –

$$P_x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & \text{если} \quad t\in A_x\\ 0 & \text{если} \quad t\notin A_x\end{cases}$$

Пример равновероятного закона распределения



Графическое представление равновероятного закона распределения

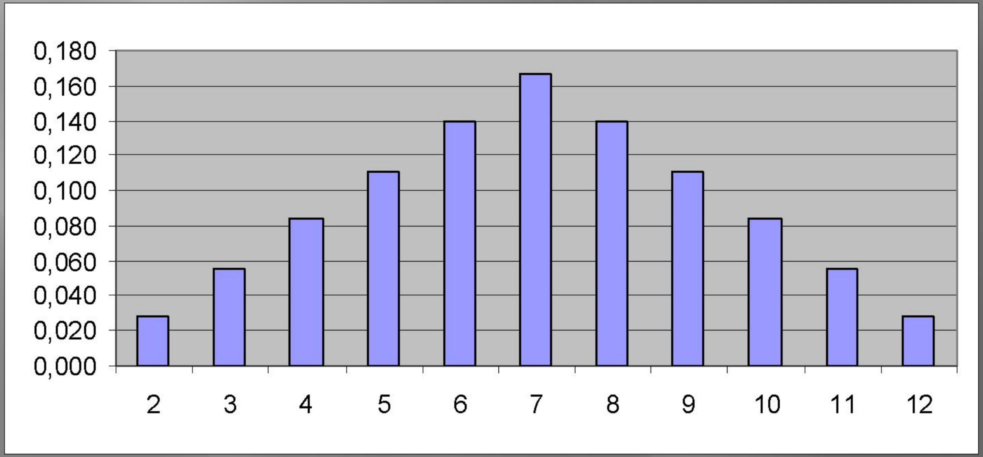
Классические примеры дискретных случайных переменных

Пример 2. Бросание одновременно двух кубиков

X-сумма чисел на верхних гранях кубиков

A_x={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} - область определения

Закон распределения X имеет вид



Каждый столбец - суть вероятность появления в опытах соответствующего значения переменной X

Закон распределения непрерывной случайной переменной

В случае, когда X непрерывная случайная переменная, ее закон распределения вероятностей выражается с помощью функции плотности вероятностей, который по определению есть:

$$p_x(t) = \lim \frac{P(t \le x \le t + \Delta t)}{\Delta t} \quad \text{при} \quad \Delta t \Rightarrow 0$$

где: $P(t \le x \le t + \Delta t)$ – вероятность того, что случайная переменная X примет в опыте значение, лежащее в интервале $(t, t+\Delta t)$

Свойства функции плотности вероятностей

1. Функция плотности вероятности неотрицательна $p_x(t) \geq 0$

2. Вероятность попадания СВ x на отрезок [a, b] есть:

$$P_x(a \leq x \leq b) = \int_a^b p_x(t)dt$$

3. Функция распределения вероятностей связана с функцией плотности вероятностей выражением:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(t)dt$$

4. Справедливо равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(t)dt = 1$$

Примеры законов распределения непрерывных случайных переменных

1. Закон равномерного распределения X на отрезке [a, b]

$$p_x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{если} \quad t \in [a,b] \\ 0 & \text{если} \quad t \notin [a,b] \end{cases}$$

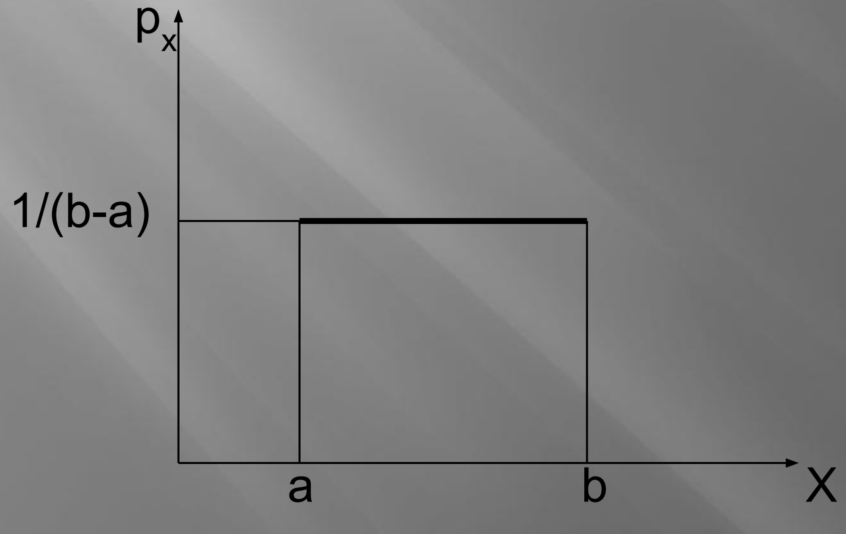


График функции плотности вероятности – отрезок прямой параллельной оси X внутри отрезка [a,b] и ноль вне его

Примеры законов распределения непрерывных случайных переменных

2. Нормальный закон распределения Гаусса

$$p_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{\frac{(t-a)^2}{2s^2}}$$

где a и s –параметры закона распределения.

Именно, с помощью значений этих параметров удается персонифицировать различные случайные переменные, подчиняющиеся нормальному закону распределения

Основные понятия теории вероятностей

Выводы:

1. В основе лежат понятия объект, событие, переменная

2. Случайная переменная есть результат некоторого события

3. Случайные переменные задаются с помощью области определения и закона распределения вероятностей (ДСП) или функции плотности вероятностей (НСП)