Бинарные отношения. Отношения эквивалентности и разбиения. Отношения частичного порядка.

Ирина Борисовна Просвирнина

- Бинарные отношения и их свойства
- Отношения эквивалентности
- Разбиения
- Отношения частичного порядка
- Диаграммы Хассе
- Алгоритм топологической сортировки

Отношения

- **Декартовым произведением** множеств A и B является множество

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Элементы множества $A \times B$ называются **упорядоченными парами.**

Отношения

Определение 1

Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R декартова произведения $A \times B$.

Если упорядоченная пара (a, b) принадлежит отношению R, то пишут $\boldsymbol{aRb}$ и говорят, что $\boldsymbol{a}$ **находится в отношении** $\boldsymbol{R}$ **с** $\boldsymbol{b}$.

В том случае, когда $A = B$, мы говорим просто об **отношении** R на A.

Отношения

<u>Пример 1</u>

Выписать упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям между множествами $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$:

a) $U = \{(x, y) | \, x + y = 9\}$;

b) $V = \{(x, y) | \, \mathrm{x} < \mathrm{y}\}$.

<u>Решение</u>

a) $U = \{(3, 6), (5, 4), (7, 2)\}$;

b) $V = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$. ■

Отношения

Пример 2

Множество $R = \{(x, y) \mid x \ - \text{делитель}\ y\}$ определяет отношение на множестве

$$A = \ \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Найдите все упорядоченные пары, принадлежащие R.

Решение

$R = \{\ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$■

Отношения

Имеется удобный способ перечисления упорядоченных пар, принадлежащих данному отношению.

Он основан на понятии **ориентированно графа**.

Отношения

- Пусть A и B – два конечных множества и пусть R – бинарное отношение между этими множествами.

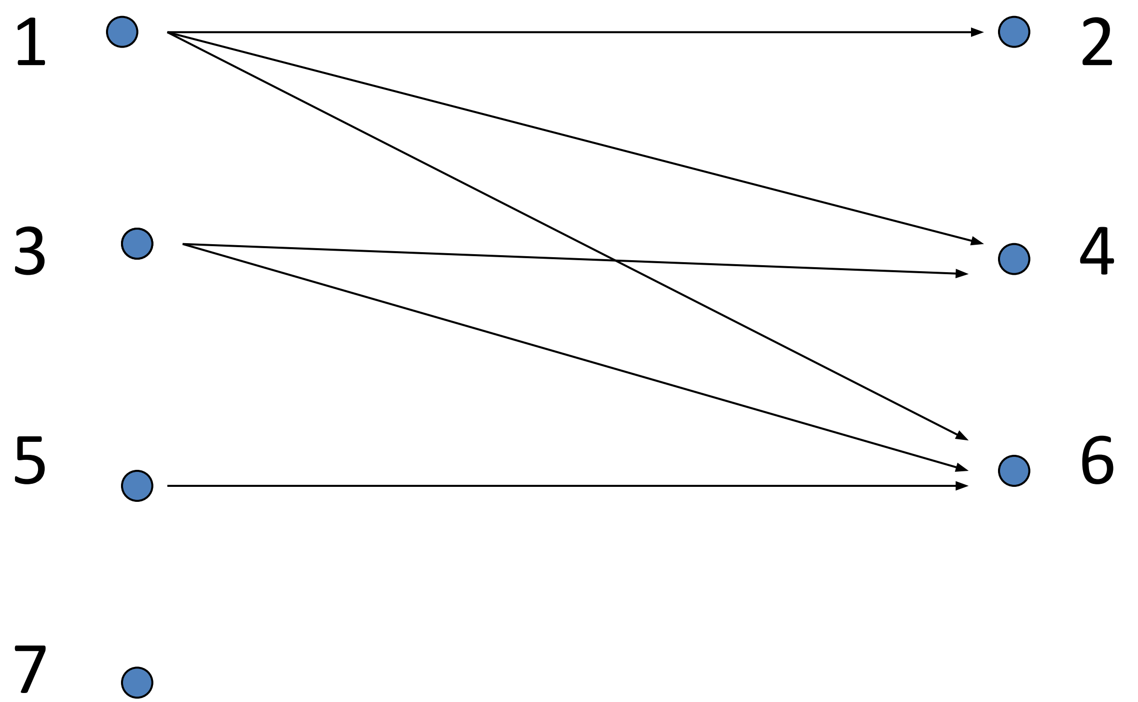
Изобразим элементы множеств A и B точками на плоскости.

Для каждой упорядоченной пары отношения R нарисуем стрелку, соединяющую точки, представляющие первую и вторую компоненты пары, соответственно.

Такой объект называется **ориентированным графом** или **орграфом.**

Точки, изображающие элементы множеств, принято называть **вершинами** орграфа.

Пример 3 Рассмотрим отношение V между множествами $\mathrm{A} = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$ из примера 1, b):
$V = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,4), (3,6), (5,6)\}$. Соответствующий ориентированный граф показан на рисунке.



Отношения

- Для иллюстрации отношения на отдельном множестве A чертят орграф, чьи вершины соответствуют одному лишь множеству A, а стрелки, как обычно, соединяют элементы упорядоченных пар, находящихся в данном отношении.

Отношения

Свойства отношений

Ограничимся изучением бинарных отношений, заданных на одном множестве и рассмотрим некоторый набор их свойств.

Отношения

Определение 2

Отношение R на множестве A **рефлексивно**, если xRx для всех x из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение рефлексивно, если (x, x) принадлежит R для всех возможных значений x.

Отношения

У ориентированного графа, изображающего рефлексивное отношение, каждая вершина снабжена **петлей**, то есть стрелкой, начинающейся и заканчивающейся в одной и той же вершине.

Отношения

<u>Определение 3</u>

Отношение R на множестве A **симметрично**, если из xRy следует yRx для всех x и y из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение симметрично, если из того, что (x, y) принадлежит R следует, что (y, x) принадлежит R для всех возможных значений x и y.

Отношения

- Орграф симметричного отношения R вместе с каждой стрелкой из вершины x в вершину y имеет стрелку, направленную в обратную сторону: из y в x.

Отношения

<u>Определение 4</u>

Отношение R на множестве A **антисимметрично**, если из xRy и yRx следует, что $x = y$ для всех x и y из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение антисимметрично, если из того, что (x, y) принадлежит R и (y, x) принадлежит R, следует, что $x = y$ для всех возможных значений x и y.

Отношения

- Если отношение R антисимметрично, то в соответствующем орграфе при наличии стрелки из вершины x в несовпадающую с ней вершину y, стрелка из y в x будет обязательно отсутствовать.

Отношения

Определение 5

Отношение R на множестве А **транзитивно**, если из того, что xRy и yRz следует, что xRz для всех x, y и z из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение транзитивно, если из того, что (x, y) принадлежит R и (y, z) принадлежит R следует, что (x, z) принадлежит R для всех возможных значений x, y и z.

Отношения

- Орграф транзитивного отношения R устроен так, что вместе со стрелками из вершины x в вершину y и из вершины y в вершину z, у него будет стрелка и из вершины x в вершину z.

Отношения

<u>Пример 5</u>

Что можно сказать о свойствах рефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности следующих отношений:

a) «x делит y» на множестве натуральных чисел;

b) «x не равно y» на множестве целых чисел;

c) «возраст x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей?

Отношение эквивалентности

Определение 1

Отношение R на множестве S называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношения эквивалентности играют важную роль во всех разделах математики!

Отношение эквивалентности

Определение 2

Два элемента a и b называют **эквивалентными** и пишут $a \sim b$, если a находится в отношении эквивалентности с b.

Примеры отношений эквивалентности

- Пример 1

Пусть R – отношение на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$, определенное следующим образом:

$$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = b \text{ или } a = -b.$$

R – отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности

<u>Пример 2</u>

Пусть R – отношение на множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, определенное следующим образом:

$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a - b$ является целым числом.

R – отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности

Пример 3

Пусть m – целое число, большее 1. Пусть $a, b \in \boldsymbol{Z}$.

$$a \equiv b(mod\ m) \overset{def}{\Longleftrightarrow} m \mid (a - b)$$

$R = \{(a, b) | a \equiv b(mod\ m)\}$ – отношение эквивалентности на $\boldsymbol{Z}$, так как оно

1) рефлексивно: $m \mid (a - a), \forall a \in \boldsymbol{Z}$,
2) симметрично: $m \mid (a - b) \Rightarrow m \mid (b - a)$,
3) транзитивно: $\big(m \mid (a - b)\big) \wedge \big(m \mid (b - c)\big) \Rightarrow \big(m \mid (a - c)\big)$

Примеры отношений эквивалентности

Пример 4

Пусть R – отношение на множестве строк, составленных из букв английского алфавита, определенное следующим образом:

$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} l(a) = l(b)$, где $l(x)$ – длина строки x.

R – отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности

Пример 5

Пусть n – натуральное число и пусть S – множество строк, составленных из символов некоторого алфавита A.

Пусть R_n – отношение на S, определенное следующим образом:

$sR_nt \overset{def}{\Longleftrightarrow} s = t$, или s и t состоят по крайней мере из n символов, причем первые n символов в строках s и t совпадают.

R_n– отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

«Антипримеры» отношений эквивалентности

Пример 6

Пусть $\mid$ – отношение «делит» на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$.

Отношение $\mid$ не является отношением эквивалентности, так как оно не симметрично:

$2 \mid 4$, но $4 \nmid 2$.

«Антипримеры» отношений эквивалентности

Пример 7

Пусть R – отношение на множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, определенное следующим образом:

$$xRy \overset{def}{\Longleftrightarrow} |x-y|<1$$

R не является отношением эквивалентности, так как оно не транзитивно:

$$2{,}8\ R\ 1{,}9 \iff |2{,}8-1{,}9|<1$$

$$1{,}9\ R\ 1{,}1 \iff |1{,}9-1{,}1|<1$$

$$2{,}8\ \not{R}\ 1{,}1 \iff |2{,}8-1{,}1|\geq 1$$

Классы эквивалентности

Определение 3

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и пусть a – элемент множества A.

Множество всех элементов из A, эквивалентных элементу a, называется **классом эквивалентности** элемента a.

Класс эквивалентности элемента a относительно R обозначается через $[a]_R$ или через $[a]$, если из контекста ясно, о каком отношении идет речь.

$$[a]_R = \{s|(a,s) \in R\}$$

Если $b \in [a]_R$, то b называется **представителем** этого класса эквивалентности.

Примеры классов эквивалентности

Пример 8

Пусть R – отношение на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$, определенное следующим образом:

$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = b$ или $a = -b$.

Найти $[a]_R = [a]$.

Решение

$[a] = \{-a, a\}$

Например,

$[5] = \{-5{,}5\}, [7] = \{-7{,}7\}, [0] = \{0\}$.

Примеры отношений эквивалентности

Пример 9

Найти классы эквивалентности чисел 0 и 1 для отношения сравнимости по модулю 4.

Решение

$$[0]_4 = \{a | a \equiv 0 (mod\ 4)\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$
$$[1]_4 = \{a | a \equiv 1 (mod\ 4)\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

Примеры отношений эквивалентности

<u>Пример 10</u>

Построить класс эквивалентности строки 0111 относительно отношения R_3 на множестве всех битовых строк.

<u>Решение</u>

$$[0111]_{R_3} =$$
$$= \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\}$$

Классы эквивалентности и разбиения

Теорема 1

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Следующие утверждения для элементов a и b из множества A равносильны:

1) aRb,
2) $[a] = [b]$,
3) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Определение 1

Бинарным отношением между множествами A и B называется подмножество R декартова произведения $A \times B$.

Если упорядоченная пара (a, b) принадлежит отношению R, то пишут aRb и говорят, что a **находится в отношении** R **с** b.

В том случае, когда $A = B$, мы говорим просто об **отношении** R на A.

Доказательство

Пусть $c \in [a] \Rightarrow aRc$

aRb, R симметрично $\Rightarrow bRa$

bRa, aRc, R транзитивно $\Rightarrow bRc$

$bRc \Rightarrow c \in [b]$

Итак, $[a] \subseteq [b]$

Аналогично доказывается, что $[b] \subseteq [a]$.

? $[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$

- Доказательство

Пусть $[a] = [b] \Rightarrow$

$[a] \cap [b] =$

$[a] \cap [a] =$

$[a] \neq \emptyset,$

так как $a \in [a]$ по рефлексивности отношения R.

Пример 1

Выписать упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям между множествами $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$:

a) $U = \{(x, y) \mid x + y = 9\}$;

b) $V = \{(x, y) \mid x < y\}$.

Решение

a) $U = \{(3, 6), (5, 4), (7, 2)\}$;

b) $V = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$. ■

- Пример 2

Множество $R = \{(x, y) \mid x \text{ — делитель } y\}$ определяет отношение на множестве

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Найдите все упорядоченные пары, принадлежащие R.

Решение

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$

$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ ■

Классы эквивалентности и разбиения

- Пусть A и B – два конечных множества и пусть R – бинарное отношение между этими множествами.

Изобразим элементы множеств A и B точками на плоскости.

Для каждой упорядоченной пары отношения R нарисуем стрелку, соединяющую точки, представляющие первую и вторую компоненты пары, соответственно.

Такой объект называется **ориентированным графом** или **орграфом**.

Точки, изображающие элементы множеств, принято называть **вершинами** орграфа.

Классы эквивалентности и разбиения

- Орграф симметричного отношения R вместе с каждой стрелкой из вершины x в вершину y имеет стрелку, направленную в обратную сторону: из y в x.

Примеры разбиений

<u>Определение 4</u>

Отношение R на множестве A **антисимметрично**, если из xRy и yRx следует, что $x = y$ для всех x и y из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение антисимметрично, если из того, что (x, y) принадлежит R и (y, x) принадлежит R, следует, что $x = y$ для всех возможных значений x и y.

Примеры разбиений

- Если отношение R антисимметрично, то в соответствующем орграфе при наличии стрелки из вершины x в несовпадающую с ней вершину y, стрелка из y в x будет обязательно отсутствовать.

Отношение частичного порядка

Определение 5

Отношение R на множестве A **транзитивно**, если из того, что xRy и yRz следует, что xRz для всех x, y и z из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение транзитивно, если из того, что (x, y) принадлежит R и (y, z) принадлежит R следует, что (x, z) принадлежит R для всех возможных значений x, y и z.

Примеры частично упорядоченных множеств

Пример 5

Что можно сказать о свойствах рефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности следующих отношений:

a) «x делит y» на множестве натуральных чисел;

b) «x не равно y» на множестве целых чисел;

c) «возраст x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей?

Примеры частично упорядоченных множеств

- Пример 2

Отношение «делит» ($|$) на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ является отношением частичного порядка.

Примеры частично упорядоченных множеств

- Пример 3

Отношение «содержится в» ($\subseteq$) на множестве всех подмножеств $P(S)$ множества S является отношением частичного порядка.

«Антипример» частично упорядоченного множества

<u>Пример 4</u>

Отношение «x старше y», определенное на множестве всех людей, не является отношением частичного порядка.

Действительно, это отношение не является рефлексивным.

Отношение частичного порядка

<u>Определение 6</u>

Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Два элемента a и b из S называются **сравнимыми**, если $a \prec b$ или $b \prec a$.

Отношение частичного порядка

<u>Определение 7</u>

Если $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимы, то S называется **линейно упорядоченным множеством** или **цепью**, а отношение $\prec$ называется **линейным порядком**.

Пример линейно упорядоченного множества

<u>Пример 5</u>

Частично упорядоченное множество$(\boldsymbol{Z}, \leq)$ является цепью.

«Антипример» линейно упорядоченного множества

- <u>Пример 6</u>

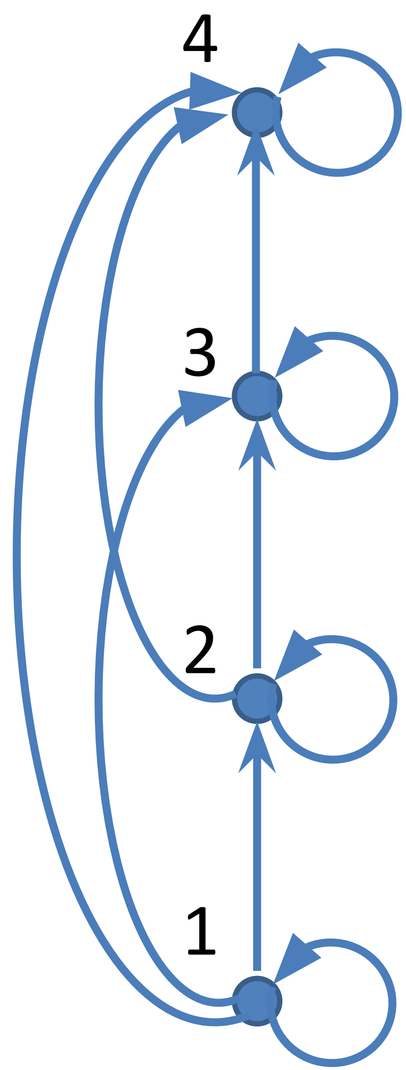
Частично упорядоченное множество $(\boldsymbol{N}, \mid)$ не является цепью, так как 5 и 7 несравнимы.

Построение диаграммы Хассе для $(S = \{1, 2, 3, 4\}, \leq)$

<u>Определение 3</u>

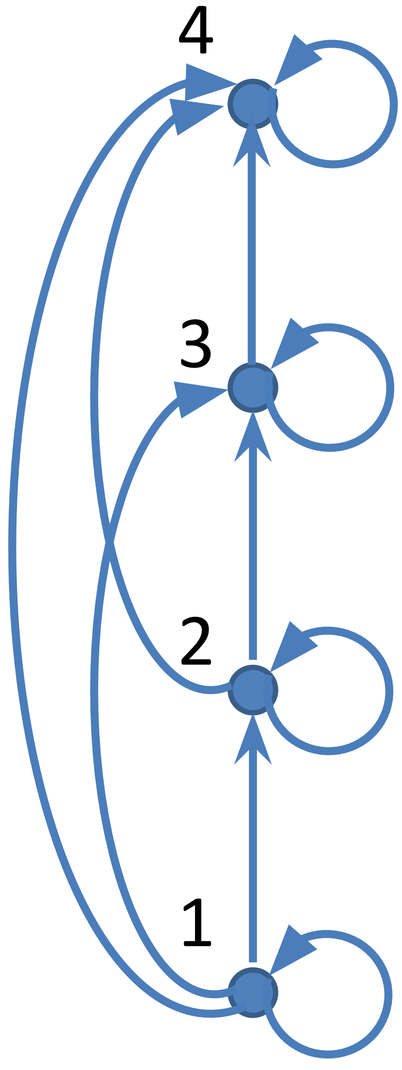
Отношение R на множестве A **симметрично**, если из xRy следует yRx для всех x и y из A.

В терминах упорядоченных пар данное отношение симметрично, если из того, что (x, y) принадлежит R следует, что (y, x) принадлежит R для всех возможных значений x и y.



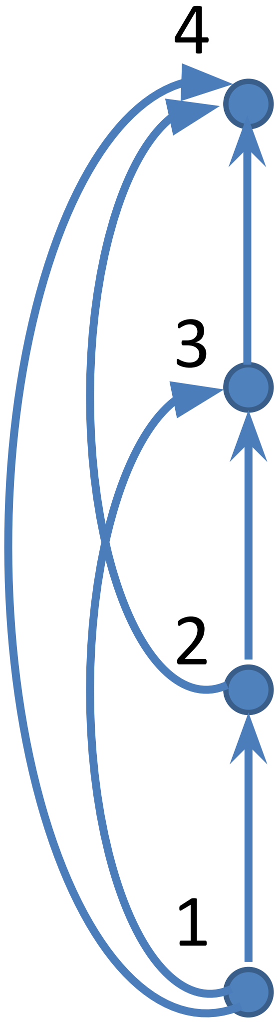
Построение диаграммы Хассе для $(\{1,2,3,4\},\leq)$.

Удалим все петли.



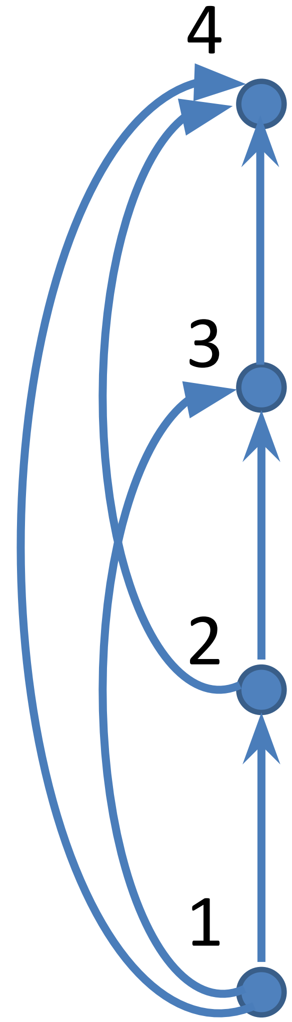
Построение диаграммы Хассе для $(\{1, 2, 3, 4\}, \le)$.

Удалим все петли.



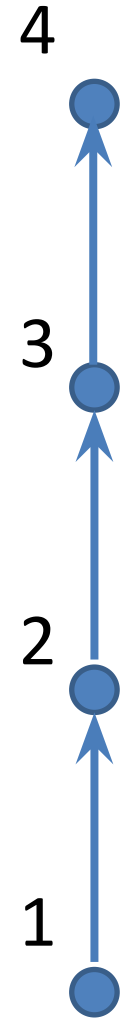
Построение диаграммы Хассе для $(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \leq)$.

Удалим все ребра (x, y), для которых существует элемент $z \in S$ такой, что $x \leq z$ и $z \leq y$.



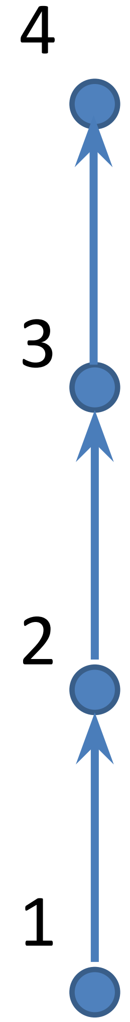
Построение диаграммы Хассе для $(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}, \leq)$.

Удалим все ребра (x, y), для которых существует элемент $z \in S$ такой, что $x \leq z$ и $z \leq y$.



Построение диаграммы Хассе для $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$.

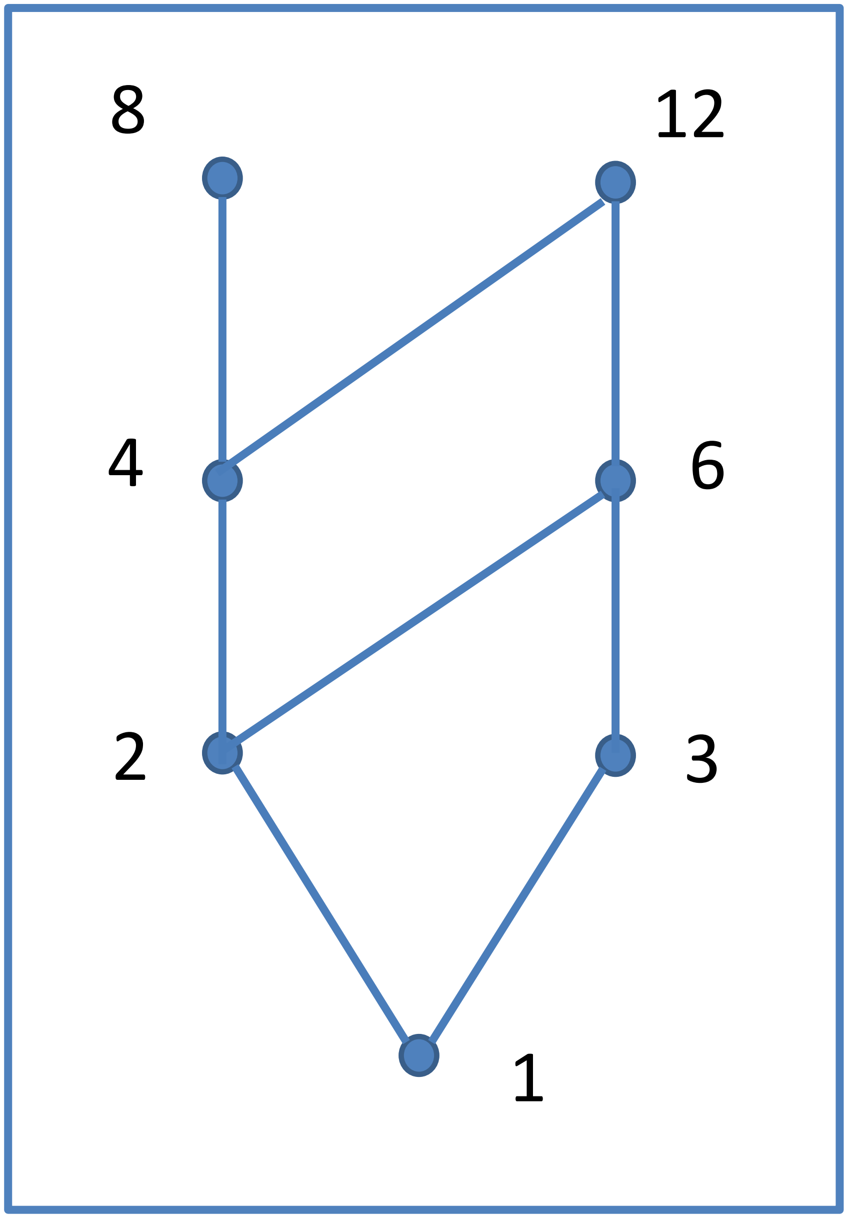
Удалим все стрелки.



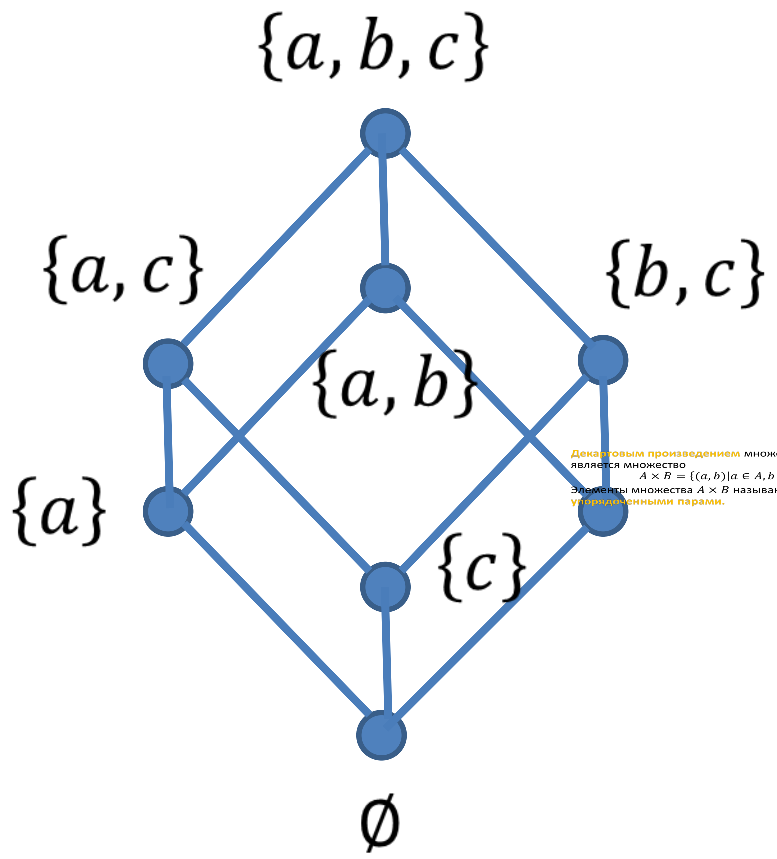
Построение диаграммы Хассе для $(\{1,2,3,4\},\leq)$.

Удалим все стрелки.

Построить диаграмму Хассе для частичного порядка $\{(a,b) | b \vdots a\}$, определенного на $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.



Построить диаграмму Хассе для частично упорядоченного множества $(\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}), \subseteq)$.



Декартовым произведением множеств A и B является множество

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Элементы множества $A \times B$ называются **упорядоченными парами.**

Максимальные и минимальные элементы

<u>Определение 8</u>

Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент a из S называется **максимальным**, если не существует элемента $b \in S$ со свойством: $a \prec b$.

Элемент a из S называется **минимальным**, если не существует элемента $b \in S$ со свойством: $b \prec a$.

Диаграмма Хассе для частичного порядка $\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{a}\}$, определенного на $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{8},\mathbf{12}\}$.

1 – минимальный элемент $(S, \vdots)$;

8, 12 – максимальные элементы $(S, \vdots)$.

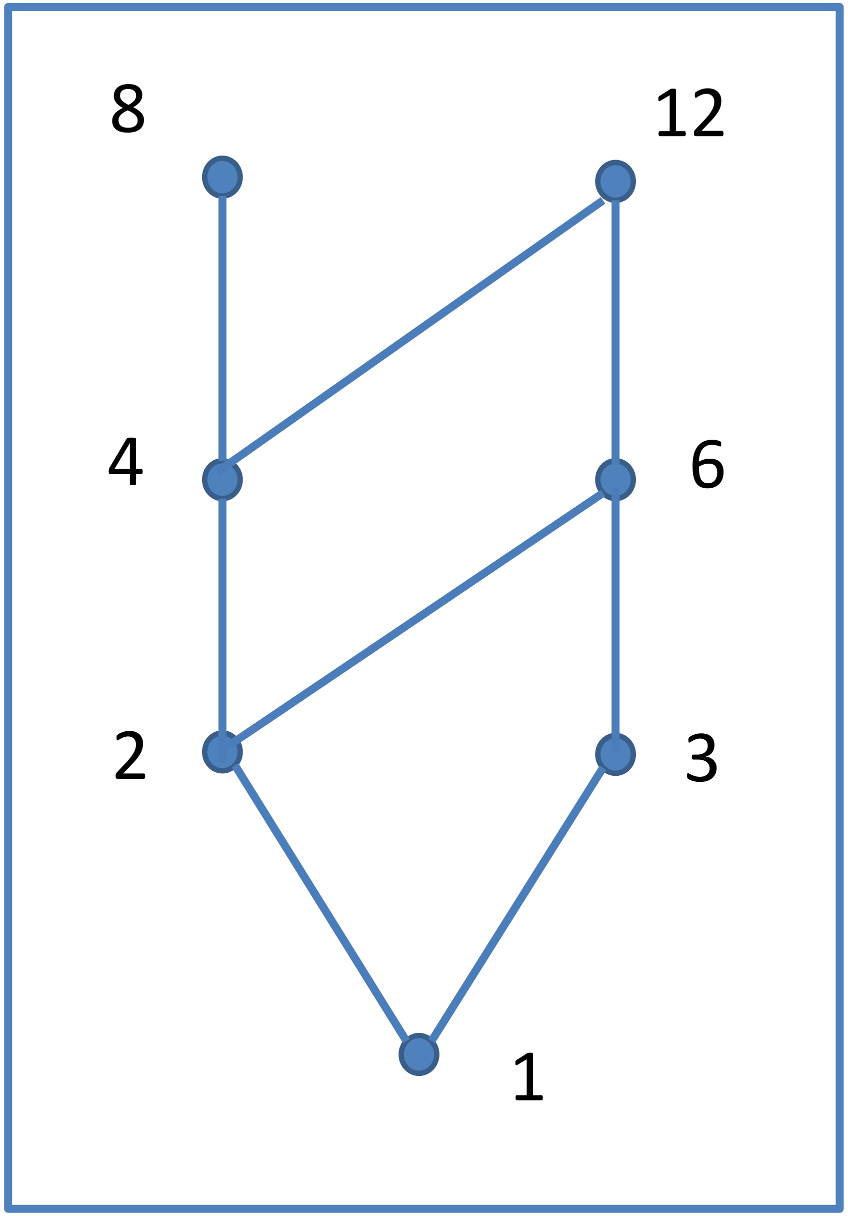
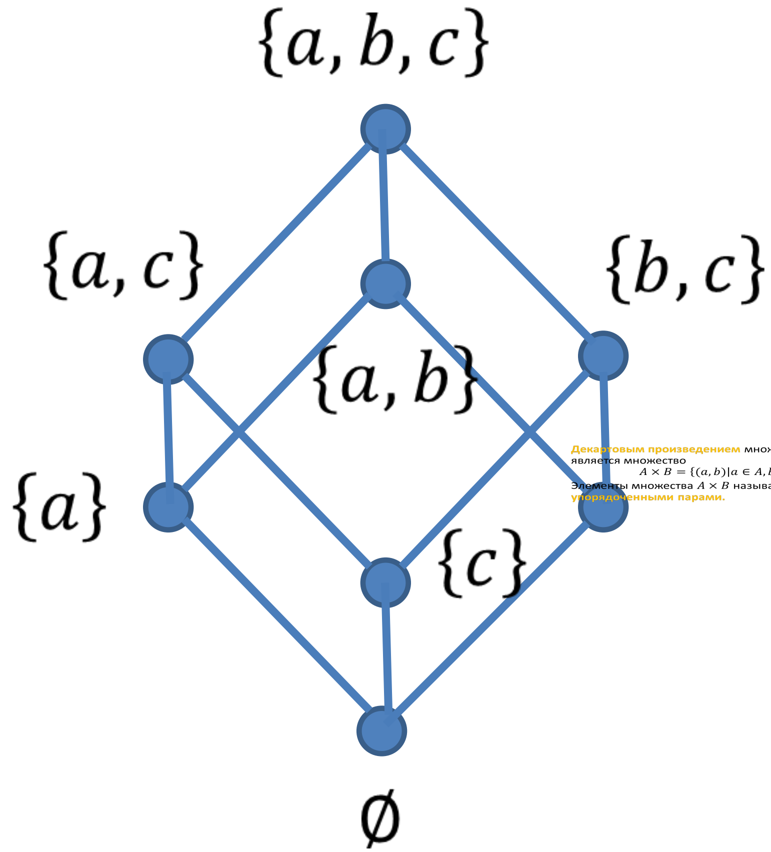


Диаграмма Хассе для частично упорядоченного множества $(\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}), \subseteq)$.

$\{a, b, c\}$ – максимальный элемент $(\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}), \subseteq)$;

$\emptyset$ – минимальный элемент $(\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}), \subseteq)$.



Декартовым произведением множеств A и B является множество

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Элементы множества $A \times B$ называются **упорядоченными парами.**

Топологическая сортировка

- Предположим, что разрабатывается проект, состоящий из 20 различных заданий.

Выполнение части заданий проекта может быть начато только после того, как другие задания проекта будут полностью завершены.

В какой очередности должны выполняться задания проекта?

Зададим на множестве всех заданий проекта частичный порядок, положив для заданий a и b:

$a \prec b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b$ не может быть начато, пока не завершено a

Топологическая сортировка

<u>Определение 9</u>

Линейный порядок $\prec$ называется согласованным с частичным порядком R, если из того, что aRb следует, что $a \prec b$.

Построение линейного порядка, согласованного с данным частичным порядком, называется **топологической сортировкой**.

Топологическая сортировка

Лемма

Любое конечное частично упорядоченное множество $(S, \prec)$ имеет хотя бы один минимальный элемент.

Доказательство

Выберем в множестве S элемент a_0.

Если a_0 не минимальный, то найдется такой элемент a_1 в S, что $a_1 \prec a_0$.

Если a_1 не минимальный, то найдется такой элемент a_2 в S, что $a_2 \prec a_1$.

Продолжим этот процесс.

Так как S – конечное множество, то процесс должен закончиться построением минимального элемента a_n множества S.■

Алгоритм топологической сортировки

- Пусть $(A, \prec)$ – конечное частично упорядоченное множество.

Выберем в A минимальный элемент a_1. Он существует по лемме.

$(A - \{a_1\}, \prec)$ – тоже конечное частично упорядоченное множество.

Если $A - \{a_1\} \neq \emptyset$, то выберем в частично упорядоченном множестве $A - \{a_1\}$ минимальный элемент a_2. Он существует по лемме.

Если $A - \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, то выберем в частично упорядоченном множестве $A - \{a_1, a_2\}$ минимальный элемент a_3.

Продолжим этот процесс, выбрав в $A - \{a_1, \dots, a_k\}$ минимальный элемент a_{k+1}.

Так как A – конечное множество, процесс должен закончиться.

Алгоритм топологической сортировки

- Итак, для частично упорядоченного множества $(A, \prec)$ построен линейный порядок $\prec_l$:

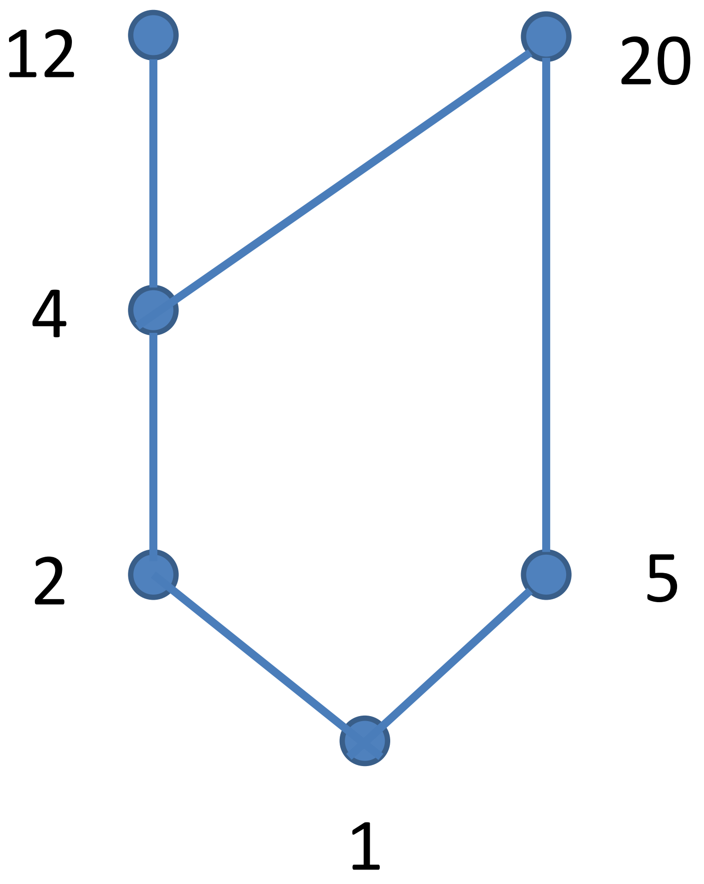
$$a_1 \prec_l a_2 \prec_l \ldots \prec_l a_n$$

Этот линейный порядок согласован с исходным частичным порядком. ■

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.



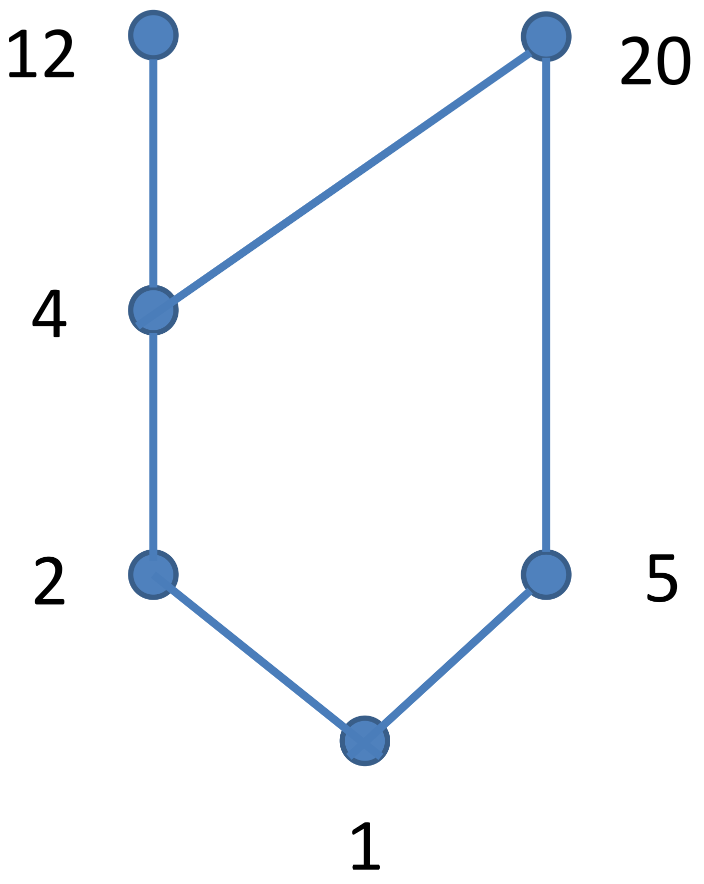
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

Решение

1

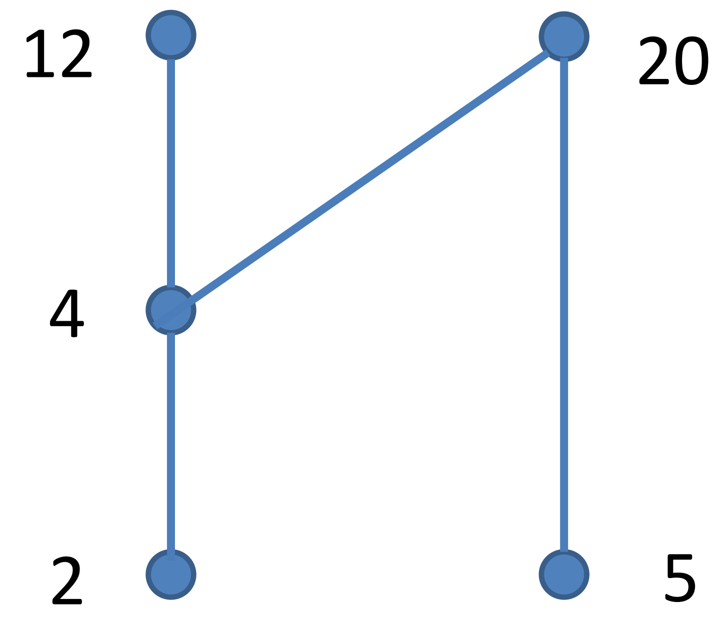


Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.

Решение



1

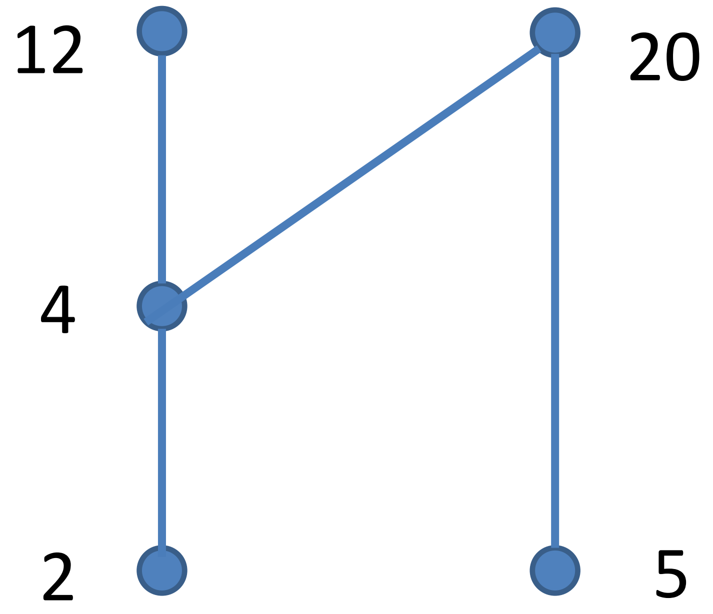
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

Решение

$1 \prec 5$

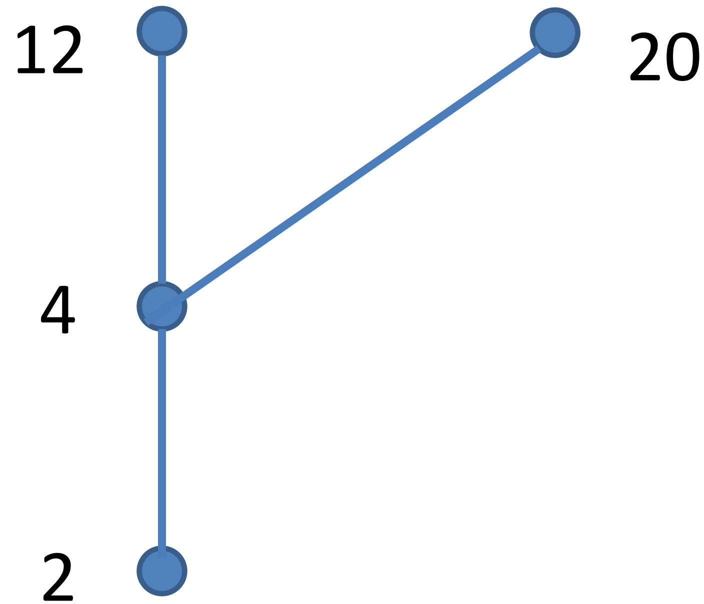


Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

Решение



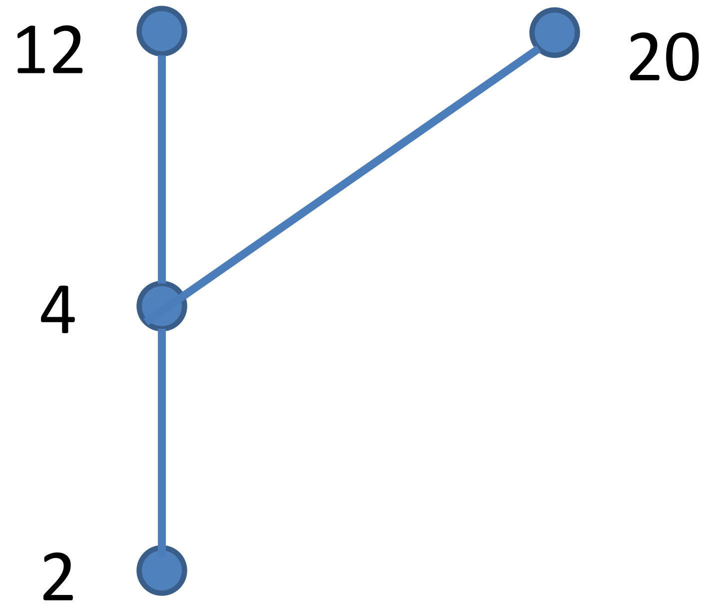
$1 \prec 5$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

Решение



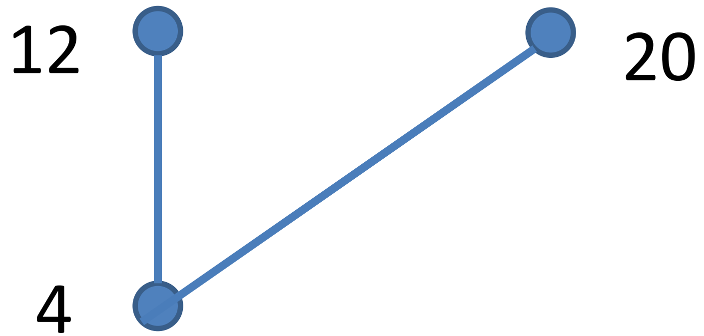
$1 \prec 5 \prec 2$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.

Решение

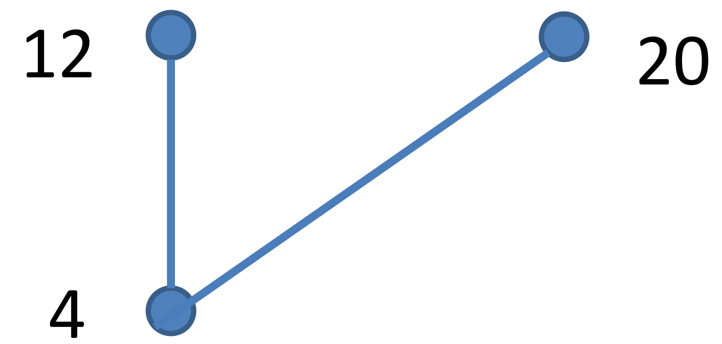


$1 \prec 5 \prec 2$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.



Решение

$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- **Пример 1**

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

Решение

$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

<u>Пример 1</u>

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

<u>Решение</u>

$$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20$$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, |)$.

Решение

$$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20$$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

Пример 1

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.

Решение

$$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12$$

$\blacksquare$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

Пример 2

- Проект развития компьютерной компании предполагает выполнение семи этапов.

Выполнение некоторых этапов проекта развития может быть начато только после того, как другие этапы проекта будут полностью завершены.

В какой очередности должны выполняться этапы проекта развития компании?

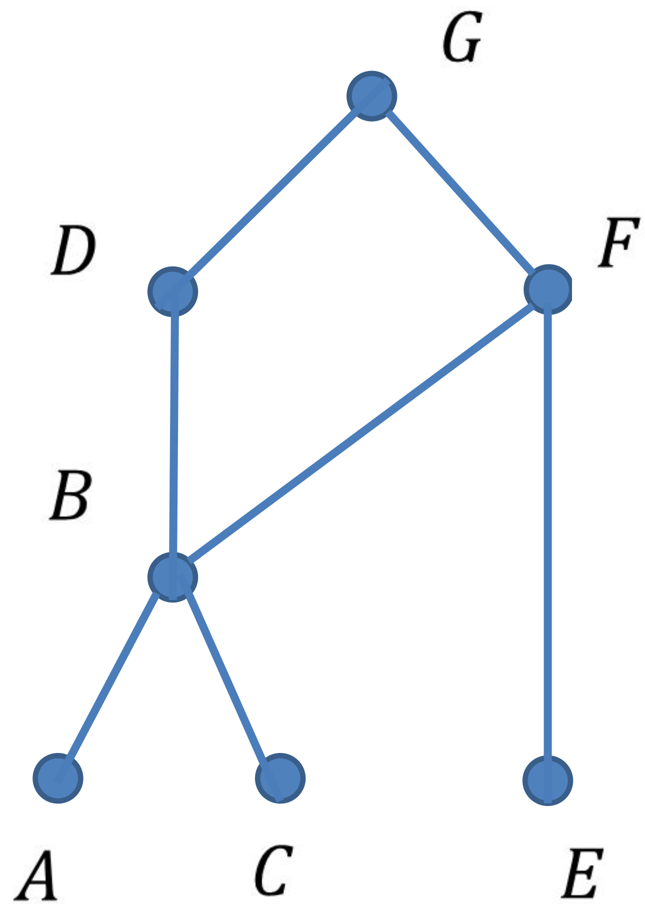
Зададим на множестве всех этапов проекта частичный порядок, положив для этапов X и Y:

$X \prec Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} Y$ не может быть начат, пока не завершен X

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

<u>Пример 2</u>

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.



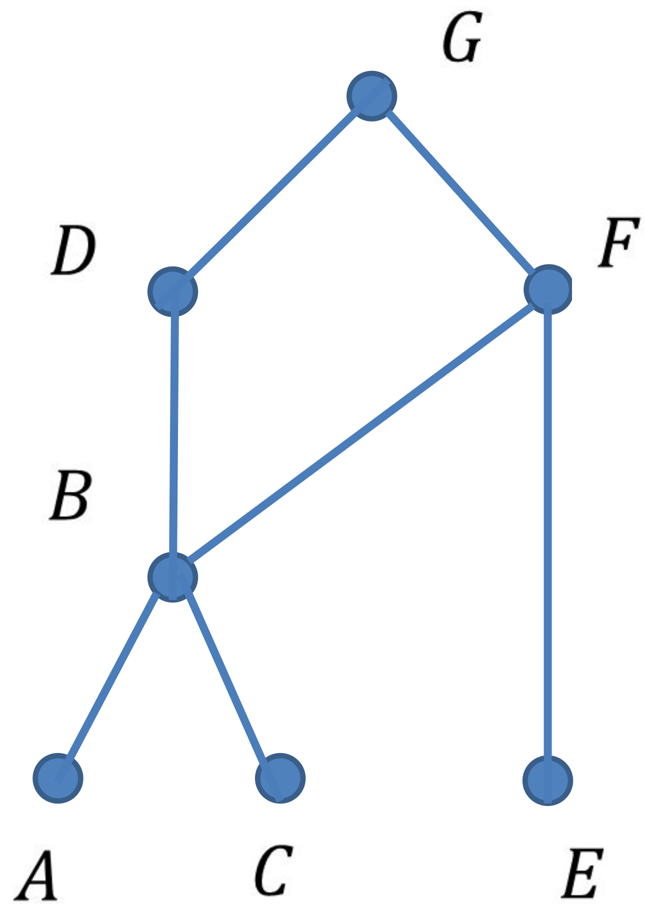
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- <u>Пример 2</u>

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

<u>Решение</u>

A



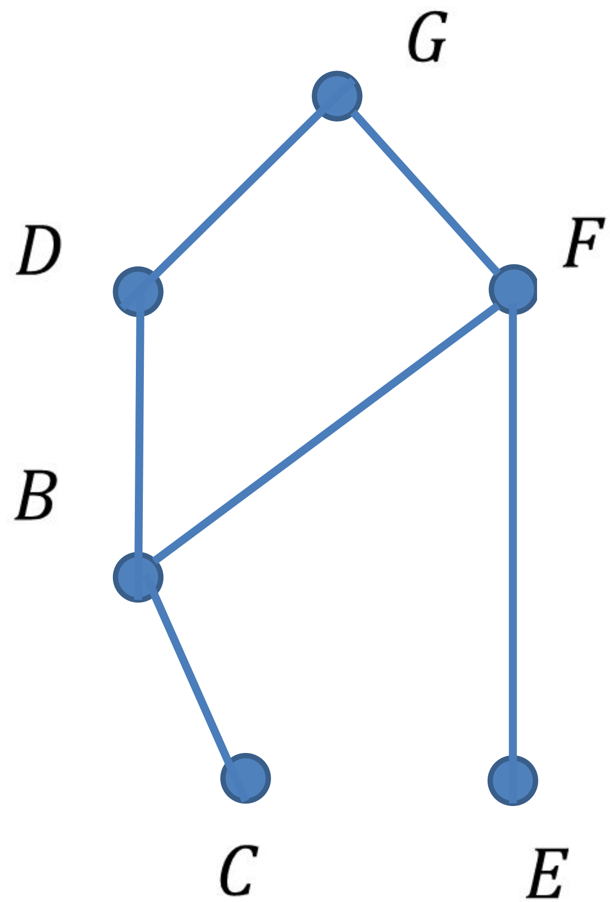
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

A



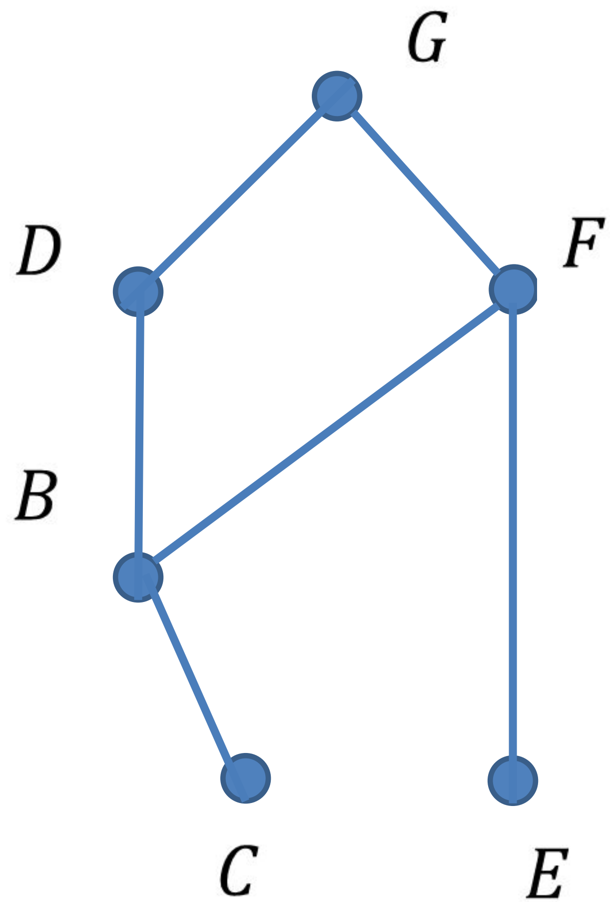
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- <u>Пример 2</u>

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

<u>Решение</u>

$A \prec C$



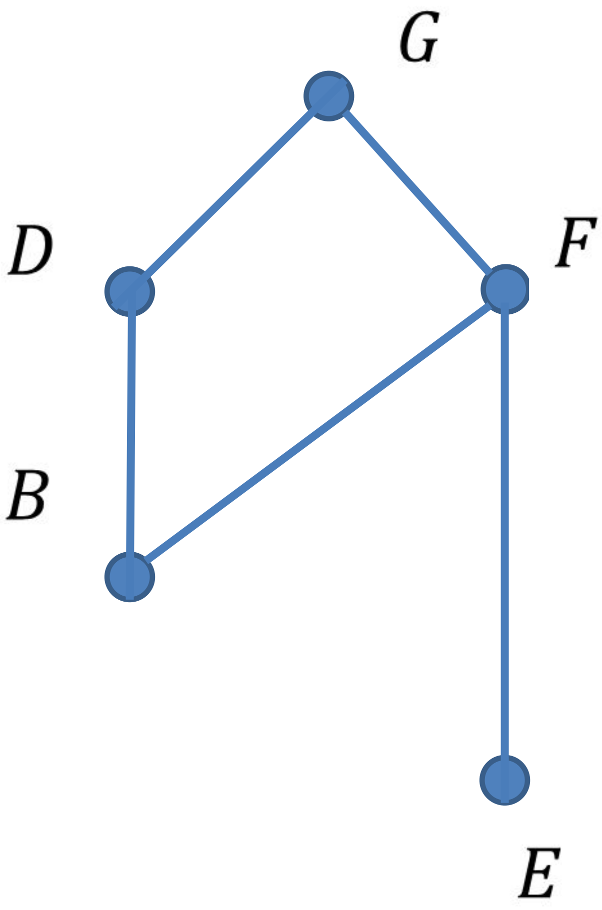
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- <u>Пример 2</u>

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

<u>Решение</u>

$A \prec C$



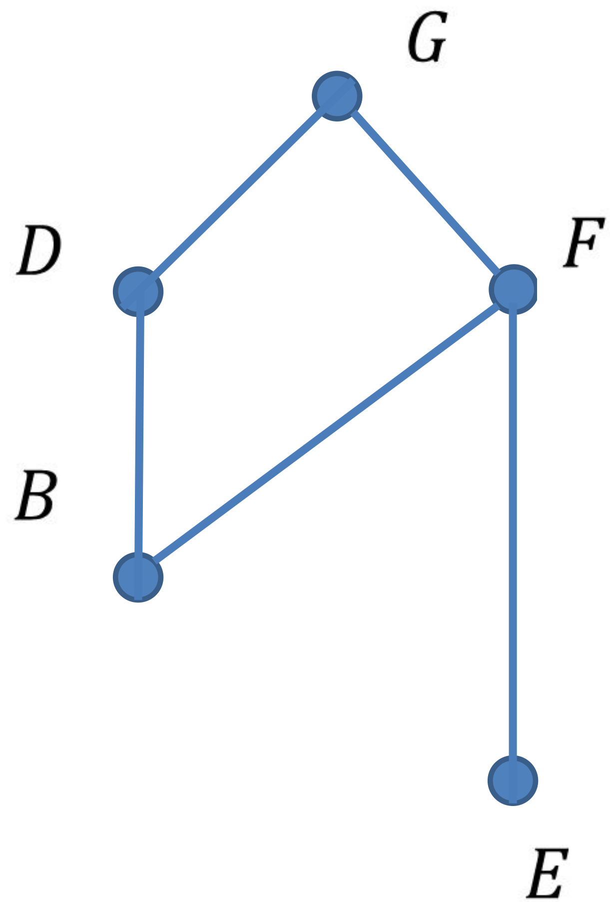
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$A \prec C \prec B$



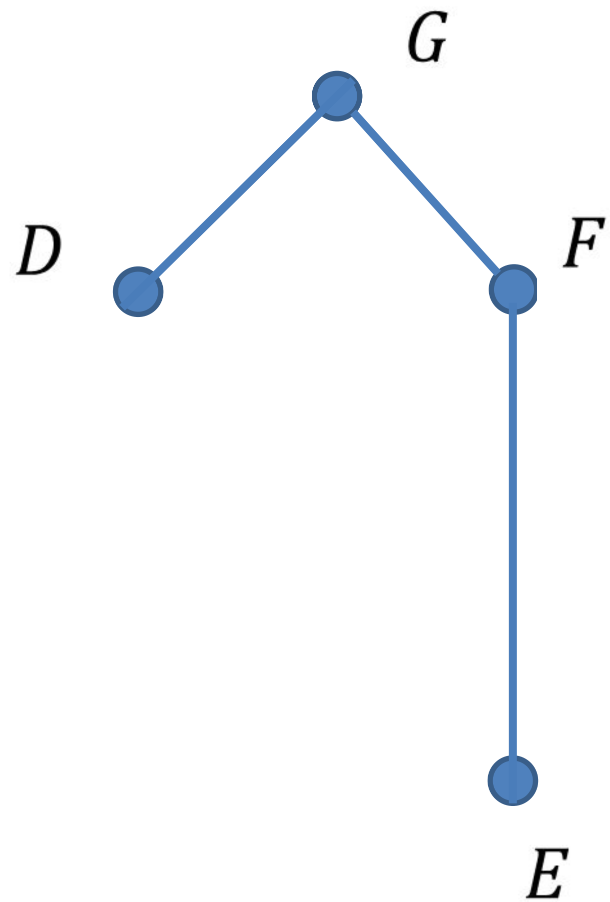
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$$A \prec C \prec B$$



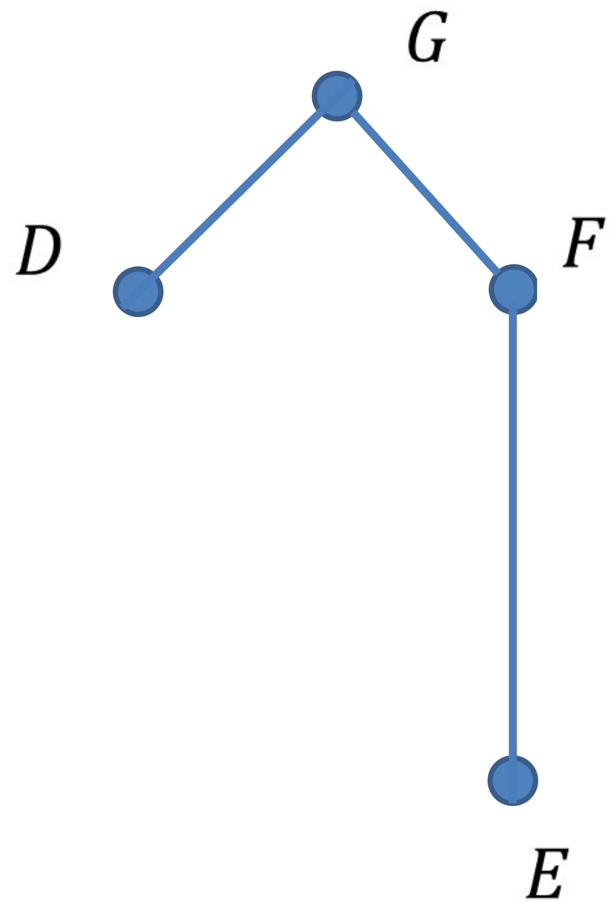
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$A \prec C \prec B \prec E$

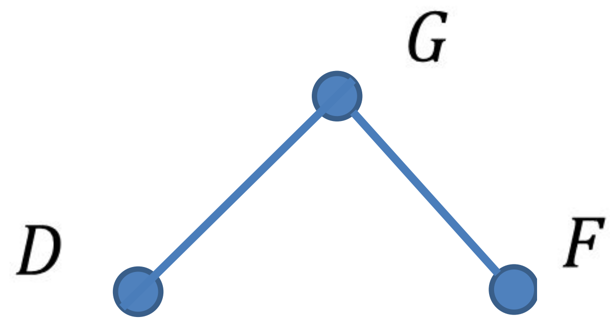


Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение



$$A \prec C \prec B \prec E$$

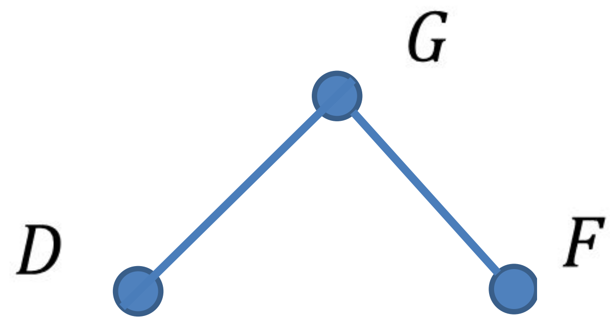
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$$A \prec C \prec B \prec E \prec F$$



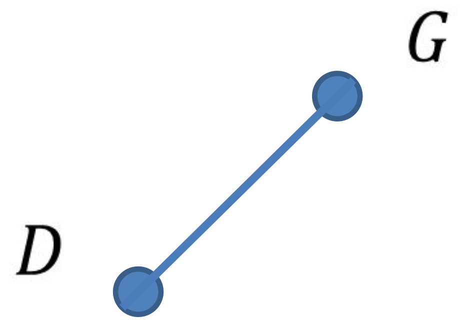
Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$$A \prec C \prec B \prec E \prec F$$

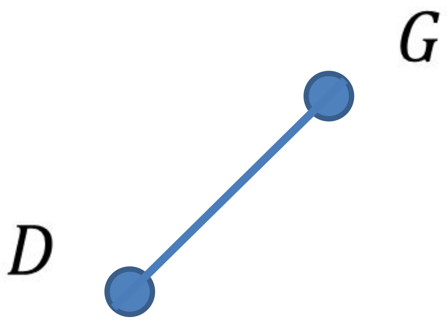


Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение



$$A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D$$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

- Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$$A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D$$

Алгоритм топологической сортировки. Примеры

Пример 2

Построить согласованный линейный порядок для частично упорядоченного множества проектов.

Решение

$$A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G$$

■