В Г У Э С

Кафедра

математики и моделирования

Курс лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии

Дубинина Любовь Яковлевна

оглавление

Оглавление(продолжение)

Лекция1.   Определители

Выражение $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

называется определителем 2-го

порядка .

Определители

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – это элементы определителя.

Индексы, стоящие внизу соответствующего элемента, означают номер строки и номер столбца определителя, на пересечении которых находится указанный элемент.

Определители

Элементы a_{11}, a_{22} называют элементами главной диагонали определителя, а другие два элемента – соответственно элементами побочной диагонали.

Определители третьего порядка

Выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называется определителем 3-го порядка.

минор

Минором элемента   определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, получающийся из данного определителя вычёркиванием строки и столбца, в которых расположен элемент.

Обозначение минора

Минор элемента , стоящего на

пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца

определителя, обозначают *Mij*.

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента определителя 3-го порядка называется минор этого элемента, взятый со знаком плюс, если элемент

Алгебраическое дополнение (продолжение)

расположен на пересечении строки и столбца с четной суммой номеров, и со знаком минус, если с нечётной.

Выбор знака

- Для определителя 3-го порядка знаки алгебраических дополнений определяются по таблице:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

теорема разложения

Определитель 3-го порядка равен сумме парных произведений элементов какого-либо ряда определителя на их алгебраические дополнения (под рядом понимается строка или столбец)

Теорема разложения (продолжение)

Таким образом, имеет место шесть разложений:

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13},$$
$$\Delta = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23},$$
$$\Delta = a_{31}\cdot A_{31} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{33}\cdot A_{33},$$
$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31},$$
$$\Delta = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32},$$
$$\Delta = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33}.$$

Свойства определителей

1.Определитель не меняет своего значения при замене каждой строки соответствующим столбцом.
2.Определитель изменит знак ,если поменять местами любые две строки или столбца.

Свойства определителей (продолжение)

3.Общий множитель элементов

какого-либо ряда определителя

можно выносить за знак

определителя.

Свойства определителей (продолжение)

4.Определитель равен нулю, если он имеет два одинаковых столбца или строки.

5.Определитель равен нулю, если он имеет нулевой ряд.

Свойства определителей (продолжение)

6.Значение определителя не изменится, если к элементам строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно число.

Определители высших порядков

Выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

называется определителем 4-го порядка

Метод приведения к треугольному виду

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании данного определителя, когда все элементы его, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей, становятся равными нулю.

Ключевые понятия

Определитель, элемент,
строка, столбец,
минор, алгебраическое дополнение,
порядок определителя.

Вопросы для самопроверки по теме «Определители»

1. Определители второго и третьего порядков.
2. Свойства определителей.
3. Методы вычислений определителей.
4. Алгебраическое дополнение.
5. Минор.

Лекция 2. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел .

Если матрица содержит m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет размерность $m \times n$.

Матрицы

Матрица размера $m \times m$ называется *квадратной*.

Две матрицы считаются *равными*, если равны их размеры и равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрицы

Квадратная матрица называется невырожденной (неособенной), если её определитель отличен от нуля, и вырожденной (особенной) , если определитель её равен нулю.

Матрицы

Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Действия над матрицами.

Суммой двух матриц одинаковой размерности A и B

называется матрица C той же размерности,

элементы которой равны суммам элементов матриц A и B с одинаковыми индексами.

Действия над матрицами (продолжение)

Произведением матрицы на число α называется матрица, получающаяся из матрицы A умножением всех её элементов на α.

Действия над матрицами (продолжение)

Разностью двух матриц А и В одинаковой размерности называется матрица А+(-В).

Действия над матрицами (продолжение)

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размера $n\times k$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times k$, элемент c_{ij} которой ,

Действия над матрицами (продолжение)

стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце, равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы А и соответствующих элементов *j*-го столбца матрицы *B.*

ИЗОБРАЖЕНИЕ МАТРИЦЫ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Две невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка называются обратными, если их произведение, взятое в любом порядке, равно единичной матрице того же порядка.

Формула обратной матрицы

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta}\\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta}\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \square & 0 \\ 0 & 1 & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства операций над матрицами

1. $A+B=B+A$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$

3. $(A+B)k=kA+kB$

Свойства операций над матрицами (продолжение)

4. $(AB)C=A(BC)$

5. $A(B+C)=AB+AC$

6. $A+O=A$

7. $AE=EA=A$

Р а н г   м а т р и ц ы

Рангом матрицы называется порядок наивысшего отличного от нуля минора матрицы.

Ранг матрицы A обозначается:
R(A) или r(A) или rangA.

Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы равен максимальному числу
линейно – независимых столбцов матрицы. Максимальное число линейно-независимых строк равно максимальному числу линейно-независимых столбцов.

Ранг матрицы

Рангом матрицы наз. порядок базисного минора. Если матрица нулевая ее ранг равен 0.

c_{ij}

Элементарные преобразования матрицы.

1. Умножение ряда на число не равное 0.

2. Перестановка строк или столбцов местами.

3. Прибавление одной строки (или столбца) к другой, умноженной на число.

Элементарные преобразования матрицы.

4. Отбрасывание одного из двух одинаковых рядов.

5. Отбрасывание нулевого ряда.

Элементарные преобразования матрицы.

Теорема: Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Матрицы, полученные с помощью элементарных преобразований наз. эквивалентными (~).

Ключевые понятия

Матрица, размерность матрицы, операции над матрицами, обратная матрица, ранг, элементарные преобразования матрицы.

Вопросы для самопроверки по теме «Матрицы»

1. Понятие матрицы. Виды матриц.

2. Невырожденная матрица.

3. Линейные операции над матрицами.

Вопросы для самопроверки по теме «Матрицы»(продолжение)

4. Свойства линейных операций над матрицами.

5. Произведение матриц. Свойства.

Вопросы для самопроверки по теме «Матрицы»(продолжение)

6. Необходимое и достаточное условие существования матрицы, обратной данной.

7. Алгоритм нахождения матрицы, обратной данной.

Вопросы для самопроверки по теме «Матрицы»(продолжение)

8. Определители взаимно-обратных матриц.

9. Ранг матрицы. Способы нахождения ранга матрицы.

Лекция3.Системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Системы линейных уравнений

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Системы линейных уравнений

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется совместной.

Системы линейных уравнений

Если система имеет только одно решение, то она называется определенной.

Системы линейных уравнений

Если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Системы линейных уравнений

Система, имеющая более чем одно решение, называется неопределенной (совместной и неопределенной).

Системы линейных уравнений

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется однородной.

Системы линейных уравнений

Однородная система всегда совместна,

так как набор из n нулей удовлетворяет

любому уравнению такой системы.

Системы линейных уравнений

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных , то система называется квадратной.

Системы линейных уравнений

Две системы, множества решений которых совпадают, называются эквивалентными или равносильными.

Системы линейных уравнений

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием.

Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Метод Крамера

Аналогично находят остальные переменные по формулам:

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Правило Крамера решения квадратных систем линейных равнений

Если определитель матрицы А не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}$$

Здесь Δi – определитель n-го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы А коэффициентов системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Матричный метод решения систем

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Лекция 4. Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы система m неоднородных линейных уравнений с n неизвестными была совместной, Необходимо и достаточно, чтобы $R(A)=R(B)$.

Метод Гаусса

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Метод Гаусса (продолжение)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1r} & b_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a'_{2r} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m
\end{array}\right)$$

Однородные системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема о совместности однородной системы

Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был меньше числа неизвестных n.

Ключевые понятия

Элементарные преобразования над матрицей системы, прямой и обратный ход, однородные системы, фундаментальная система решений.

Ключевые понятия

Система уравнений, решение, общее решение, частное решение, совместность и несовместность системы, однородная и неоднородная системы.

Вопросы для самопроверки по теме «Системы уравнений»

1. Система линейных алгебраических уравнений. Решение системы.

2. Матричная форма записи СЛАУ. Решение СЛАУ матричным способом.

3. Правило Крамера.

Вопросы для самопроверки по теме «Системы уравнений» (продолжение)

4. Однородные системы уравнений.

5. Тривиальное решение.

6. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ.

Вопросы для самопроверки по теме «Системы уравнений» (продолжение)

7. Теорема Кронекера - Капелли.

8. Линейные преобразования. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования.

$\overline{a}$

Лекция 5. Векторы. Основные понятия.

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление.
Обозначают векторы символами $\vec{a}$ или $\overline{AB}$, где A- начало, а B-конец направленного отрезка .

В е к т о р ы. О с н о в н ы е п о н я т и я. (Продолжение)

Нулевым вектором (обозначается $\overline{0}$) называется вектор, начало и конец которого совпадают.

О с н о в н ы е   п о н я т и я (продолжение)

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной*, или модулем или абсолютной величиной.

О с н о в н ы е п о н я т и я (продолжение)

Векторы называются

коллинеарными, если они

расположены на одной прямой или

на параллельных прямых

О с н о в н ы е п о н я т и я (продолжение)

Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Векторы называются равными, если они сонаправлены и имеют равные длины.

Линейные операции над векторами

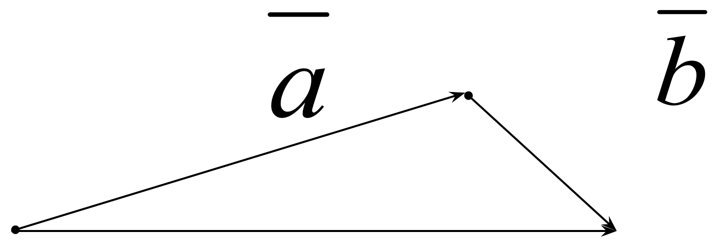
Линейными операциями называют операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

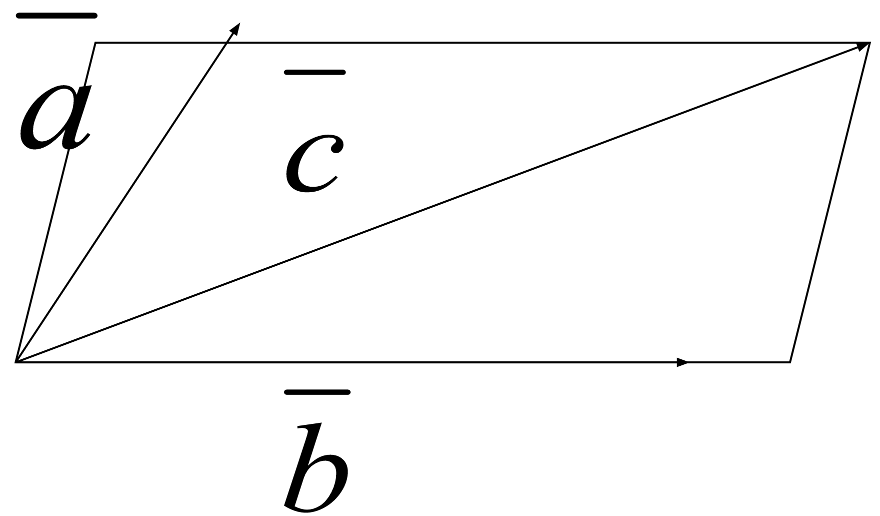
Сложение векторов

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$

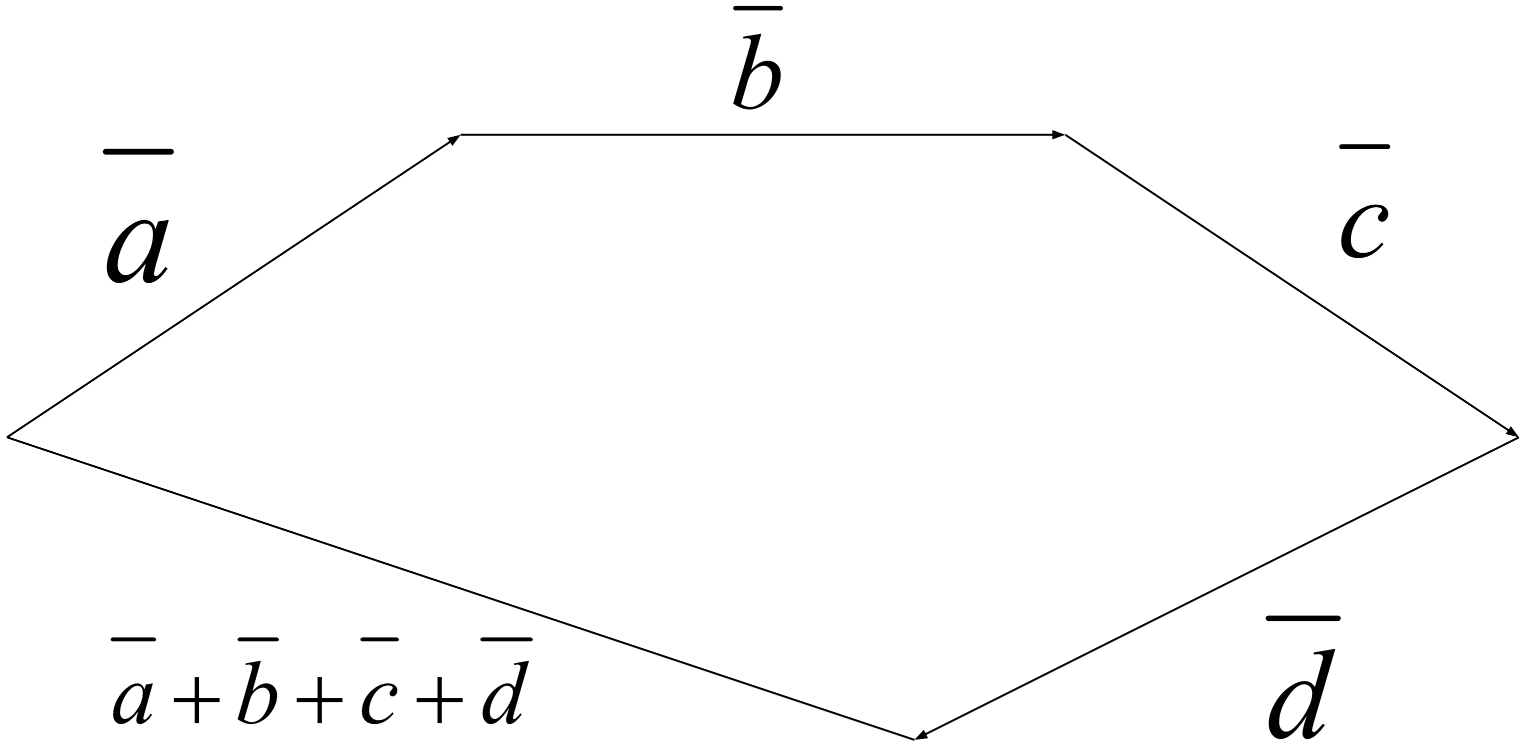
Правило треугольника.

Правило параллелограмма

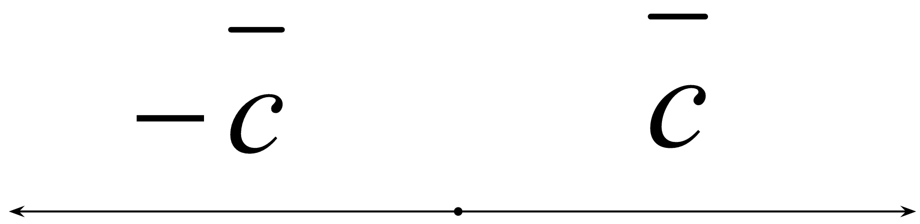




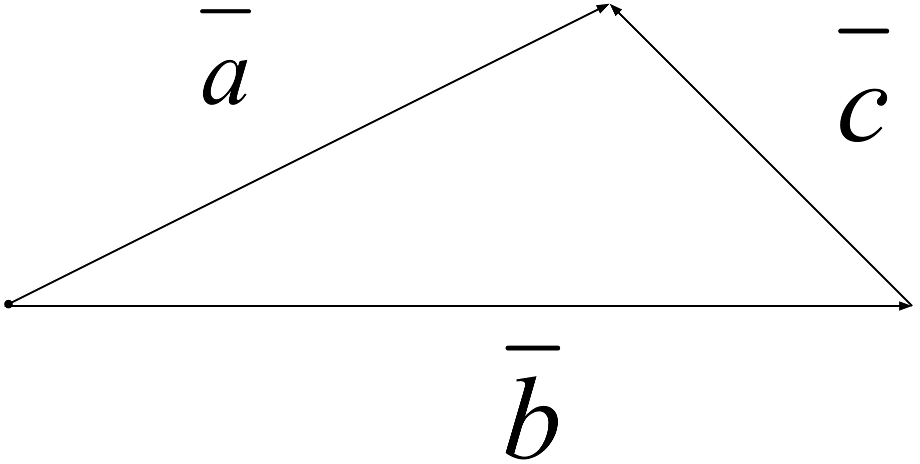
Сумма нескольких векторов



Противоположные векторы



Вычитание векторов



$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$$

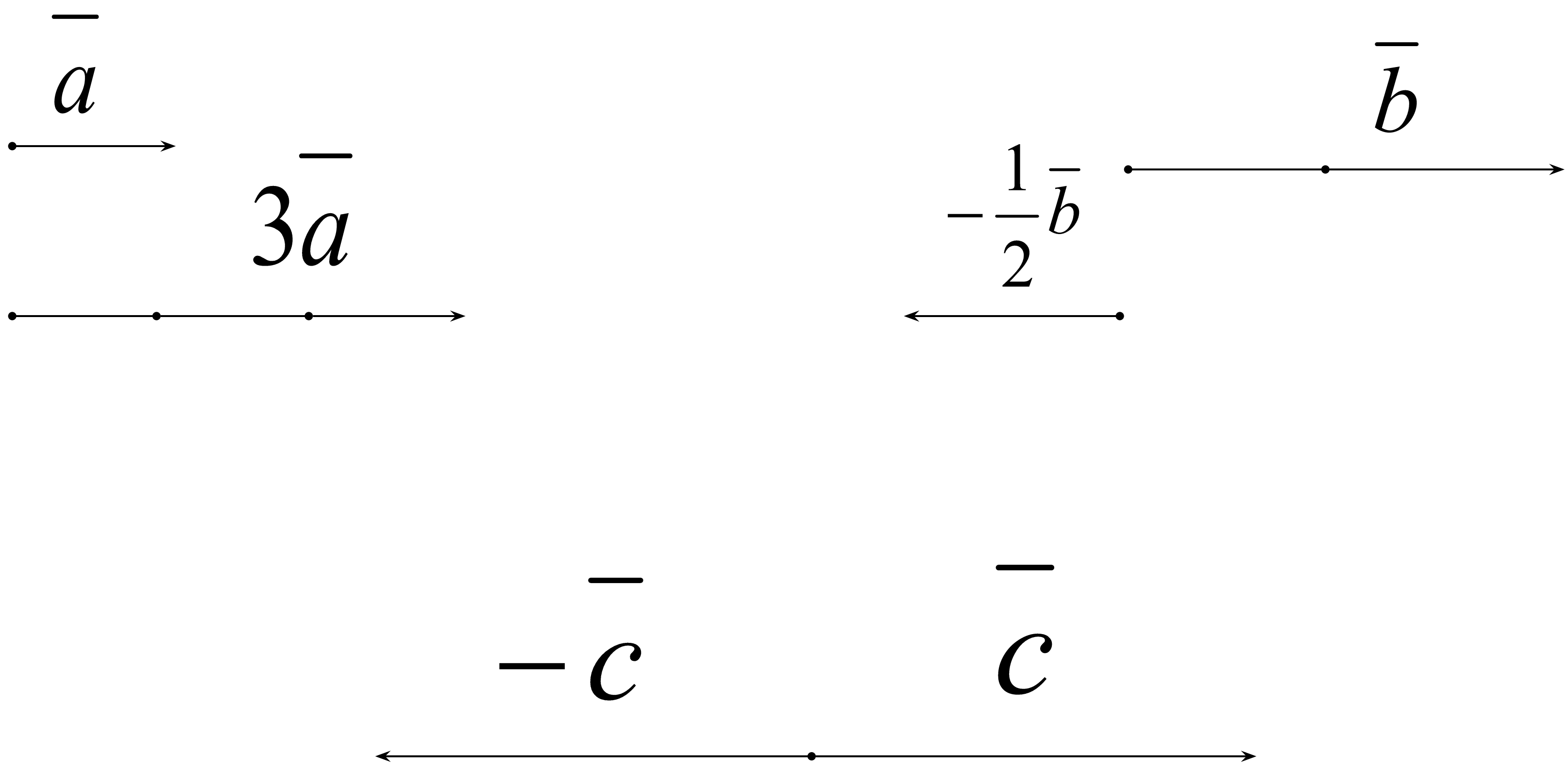
Умножение вектора на число

Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число α называется вектор $\bar{b}$ (обозначают $\bar{b} = \alpha\bar{a}$), определяемый следующими условиями:

1. $|\bar{b}| = |\alpha||\bar{a}|$,

2. $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$ при $\alpha > 0$ и $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}$ при $\alpha < 0$.

Умножение вектора на число



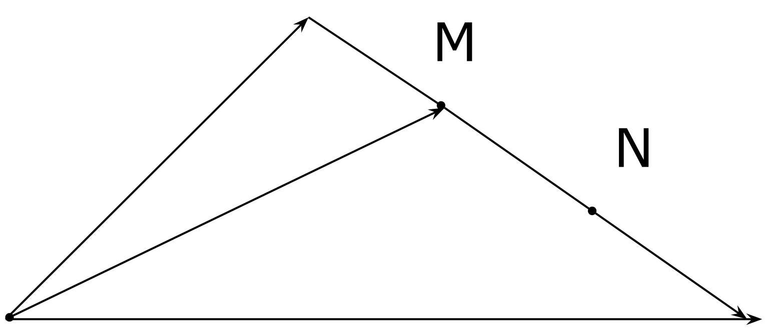
Пример

В треугольнике ABC сторона AB разделена на три равные части точками M и N.

Пусть $\overline{CA} = \overline{a}, \overline{CB} = \overline{b}$, выразить вектор $\overline{CM}$

через $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение



$$\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB},$$

$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a},$$

$$\overline{CM} = \overline{CM} + \overline{AM} = \overline{a} + \frac{1}{3}\left(\overline{b} - \overline{a}\right).$$

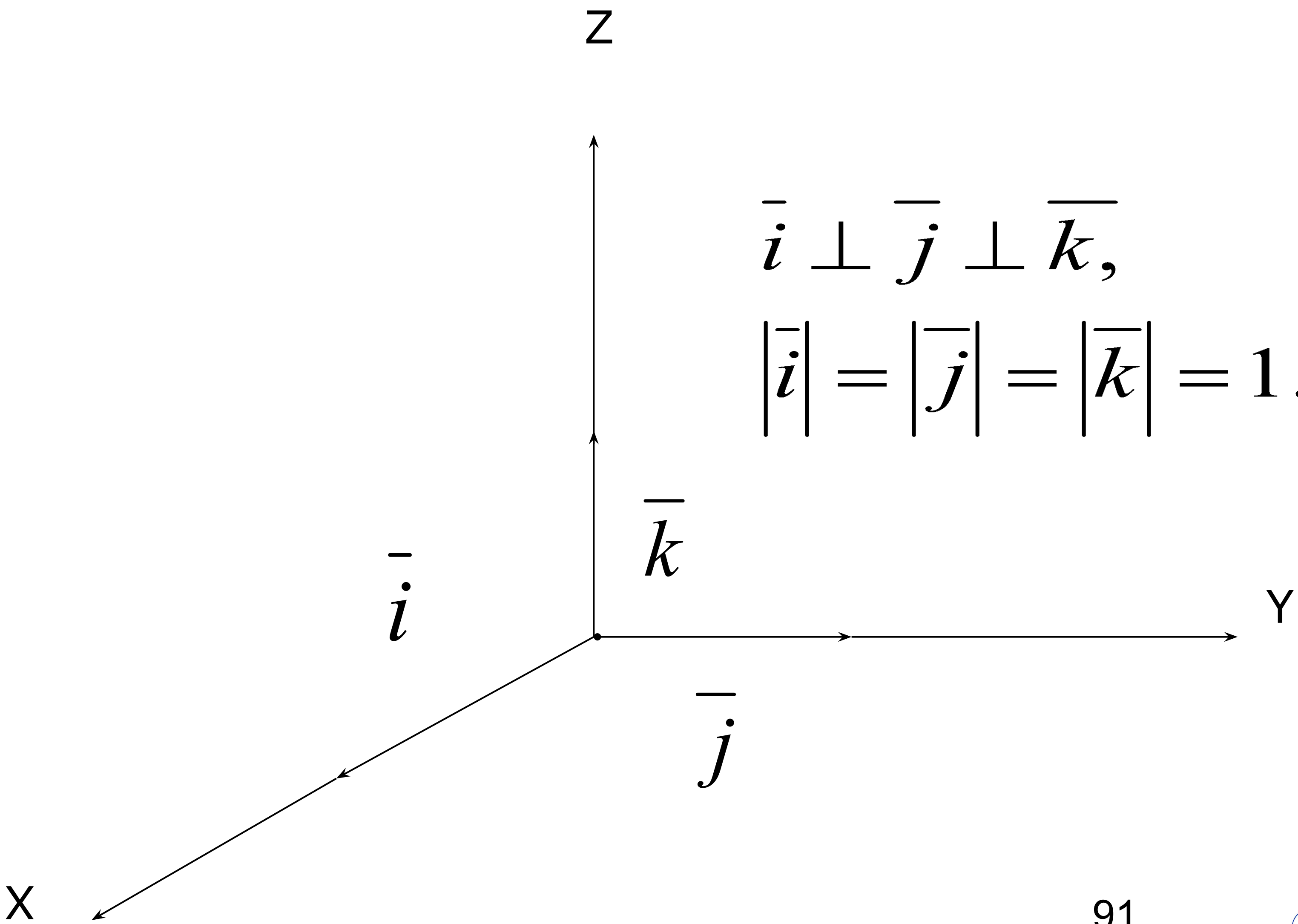
Проекция вектора на ось

$$np_l\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos(\overline{AB,l})$$

Координаты вектора

Координатами вектора называются его проекции на оси координат.

Координатные векторы

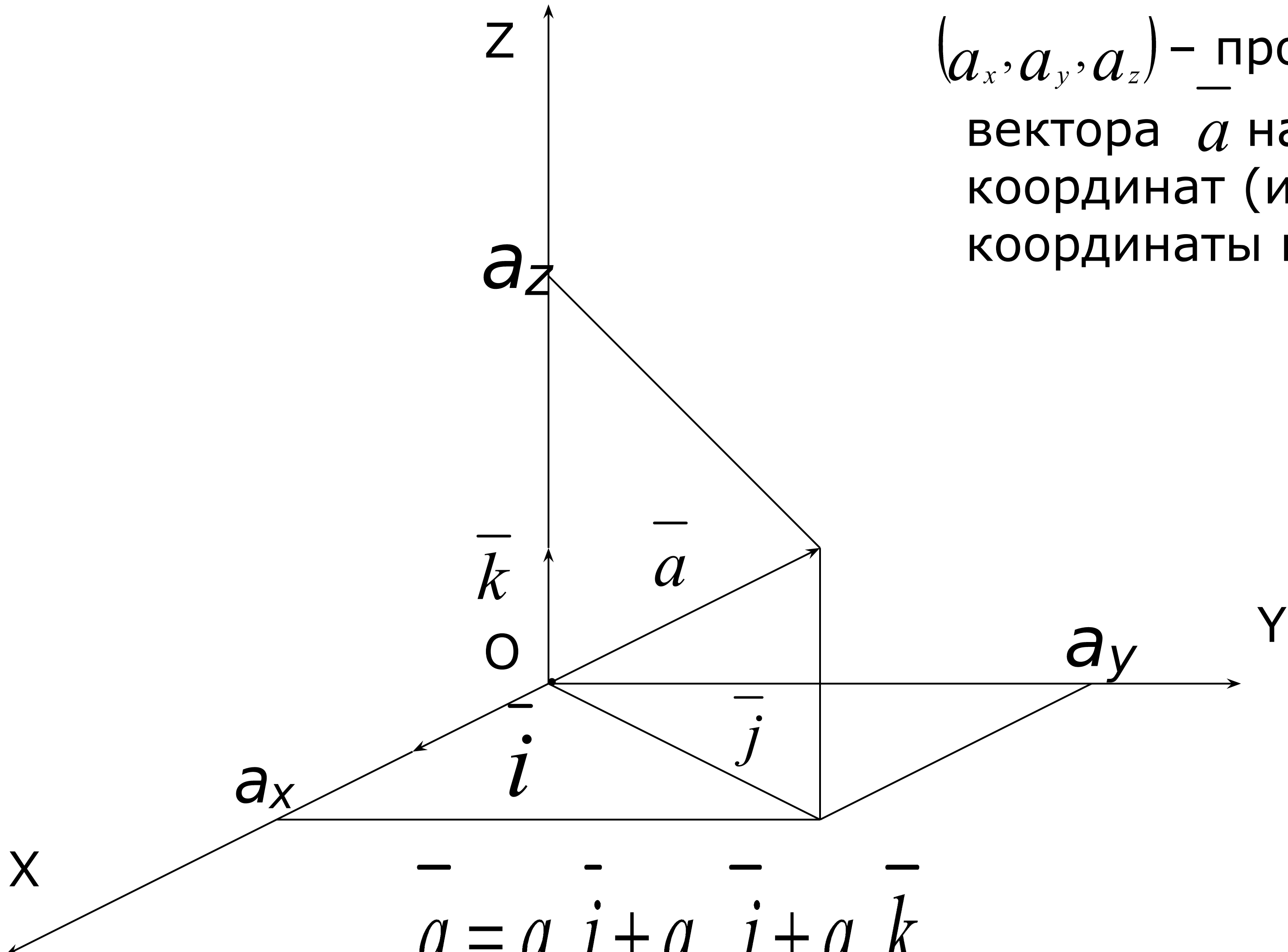


$$\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k},$$

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$$

Разложение вектора на составляющие

(a_x, a_y, a_z) – проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат (или координаты вектора $\bar{a}$)



$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

Ключевые понятия

Вектор, модуль вектора, коллинеарность, компланарность, сложение и вычетание векторов, проекция вектора на ось.

Лекция6.Свойства линейных операций над векторами

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$$

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$$

Свойства линейных операций над векторами(продолжение)

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

Свойства линейных операций над векторами(продолжение)

$$(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a}) = \beta(\alpha\bar{a})$$

$$(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$$

Свойства линейных операций над векторами(продолжение)

$$\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$$

$$1\cdot\overline{a}=\overline{a}$$

$$(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$$

Орт. Орт вектора.

Ортом называется вектор единичной длины.

Ортом вектора называется сонаправленный ему орт.

Единичный вектор

Пусть дан вектор $\overline{a}$. Рассмотрим вектор $\overline{a}_0$,

коллинеарный вектору $\overline{a}$, одинаково с ним направленный , но имеющий длину, равную единице. Будем называть этот вектор ортом данного вектора .

$$\overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}.$$

Координаты единичного вектора

$$\overline{a}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

где

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overline{a}$.

Пример

Найти косинусы углов, которые, вектор $\overline{AB}$ составляет с осями координат, если A (1,2,3) и B (2,4,5).

Решение.

$$\overline{AB} = \{2-1;4-2;5-3\} = \{1;2;2\},$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3,$$

$$тогда$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

Б а з и с

Базисом в пространстве называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Б а з и с

Базисом на плоскости называют два неколлинеарных вектора , взятых в определенном порядке; базисом на прямой называют любой ненулевой вектор на этой прямой.

Разложение вектора по базису

Каждый вектор в пространстве, плоскости или на прямой может быть разложен по базису пространства, плоскости или прямой соответственно, причем это разложение единственно.

Модуль вектора

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

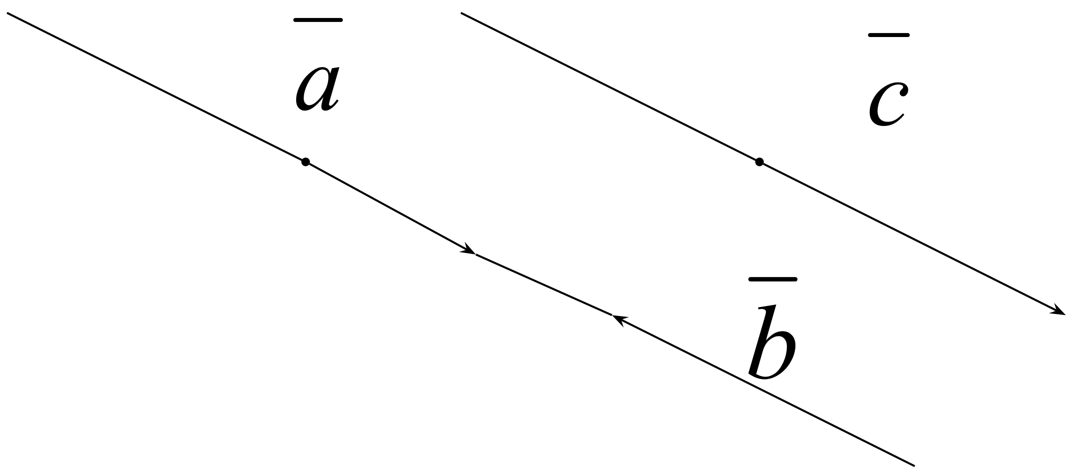
Коллинеарные векторы

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы

Обозначение :

$$\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{c},\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b},\overline{c}\uparrow\downarrow\overline{b}.$$

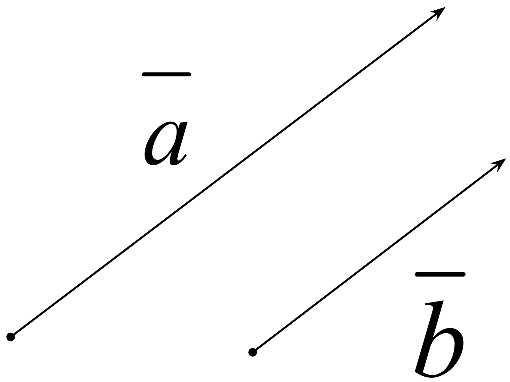


Условие коллинеарности векторов

Векторы коллинеарны, если их

координаты пропорциональны.

Условие коллинеарности двух векторов (продолжение)



$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z},$$

где $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

Направляющие косинусы вектора

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

Направляющие косинусы вектора

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ключевые понятия

Орт, координаты, базис, разложение вектора по базису, направляющие косинусы вектора.

Лекция 7. Деление отрезка в данном отношении

.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

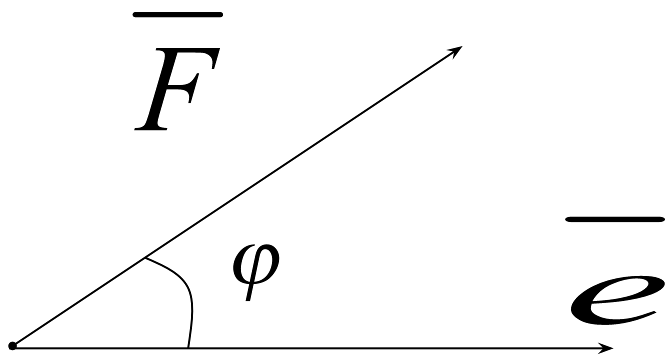
Скалярное произведение векторов

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

Физический смысл скалярного произведения

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Физический смысл скалярного произведения



$$A = \overline{F} \cdot \overline{e}$$

Угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a\cdot b} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Проекция вектора на вектор

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Свойства скалярного произведения

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$$

$$\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})$$

Свойства скалярного произведения (продолжение)

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 \qquad |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$$

Свойства скалярного произведения (продолжение)

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Пример

Дан вектор $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, причем $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 5$,

угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60^0.

Найти модуль вектора $\bar{c}$.

Решение

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} + 3\bar{b})^2} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 12\bar{a} \cdot \bar{b} + 9\bar{b}^2}.$$

Так как $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = 4^2 = 16$ и $\bar{b}^2 = |\bar{b}|^2 = 5^2 = 25$,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\varphi = 4 \cdot 5 \cos 60^0 = 10,$$

то

$$|\bar{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409}.$$

Ключевые понятия

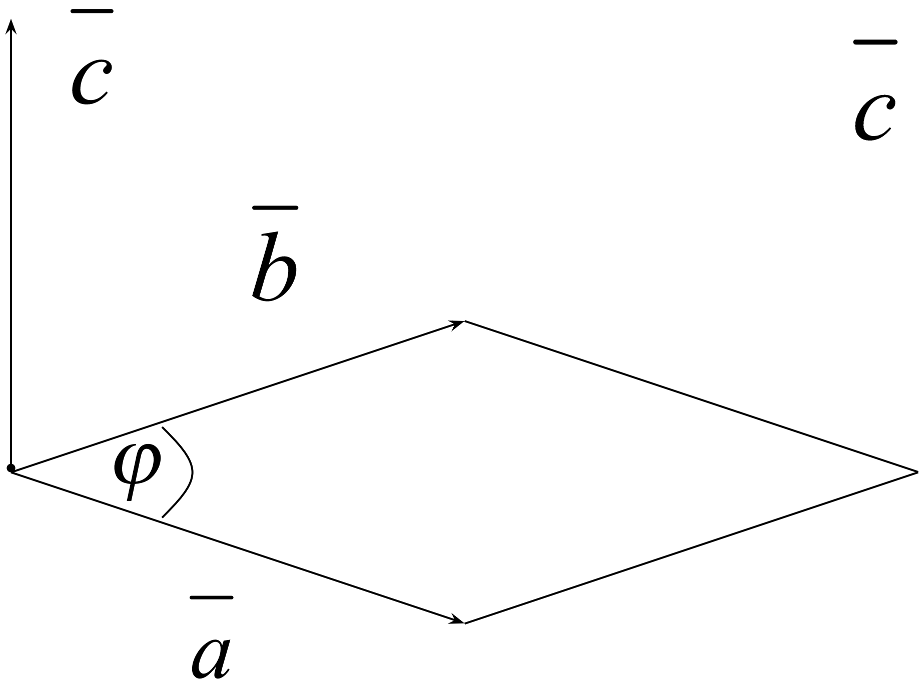
Скалярное произведение векторов, физический смысл скалярного произведения, угол между векторами, проекция вектора на вектор.

Лекция8.Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов называется вектор, который обозначается $\bar{a}\times\bar{b}$ и определяется следующим образом: $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi = \left(\bar{a}, \wedge\ \bar{b}\right)$ – длина этого вектора равна произведению длин перемножаемых векторов на Синус угла между ними.

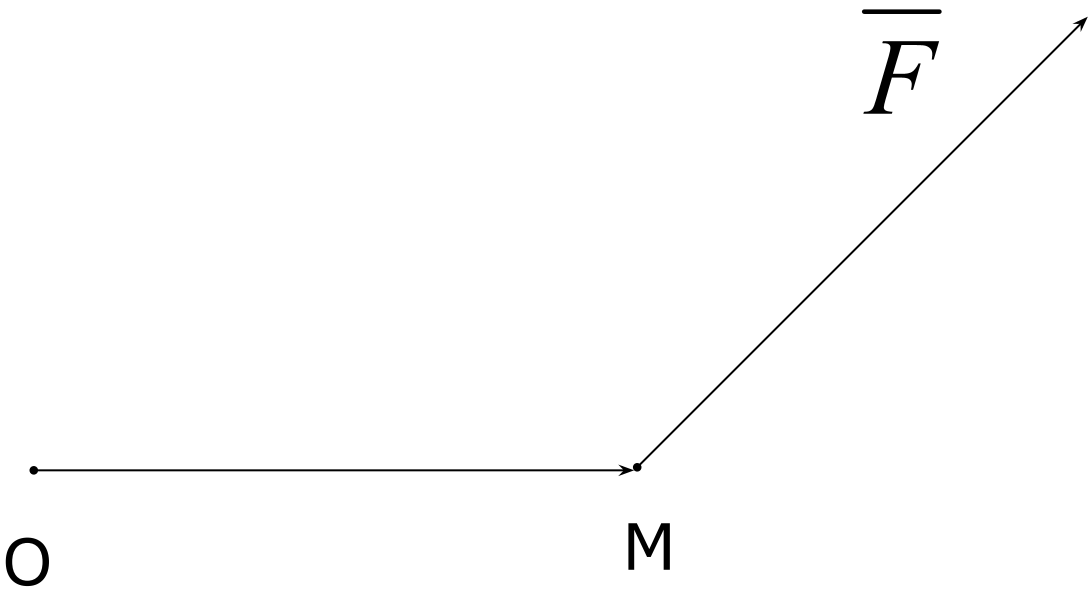
Этот вектор перпендикулярен каждому из векторов и образует с ними правую тройку.

Обозначение векторного произведения векторов



$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$$

Физический смысл векторного произведения



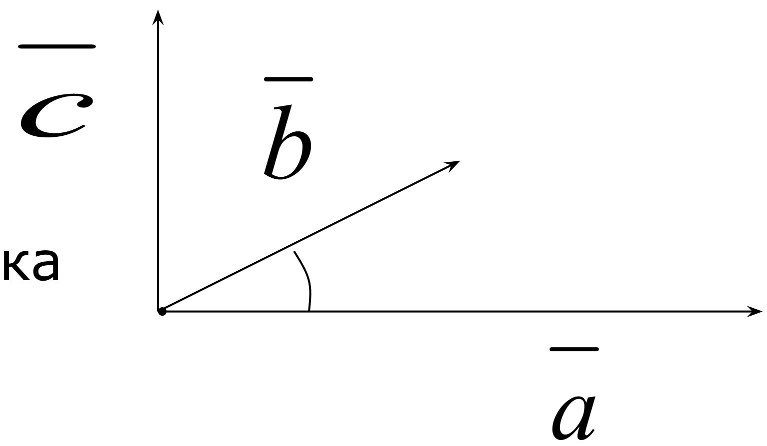
Физический смысл векторного произведения

Если $\overline{F}$ – сила, приложенная к точке *M*, то момент этой силы относительно точки *O* равен векторному произведению векторов $\overline{F}$ и $\overline{OM}$.

Понятие «правой» тройки векторов

Тройку векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называют *правой*, если направление вектора $\overline{c}$ таково, что, смотря из его конца вдоль вектора, поворот по кратчайшему пути от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ будет виден против движения часовой стрелки.

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - *правая* тройка



ВГУЭС

Пример

Найти векторное произведение векторов

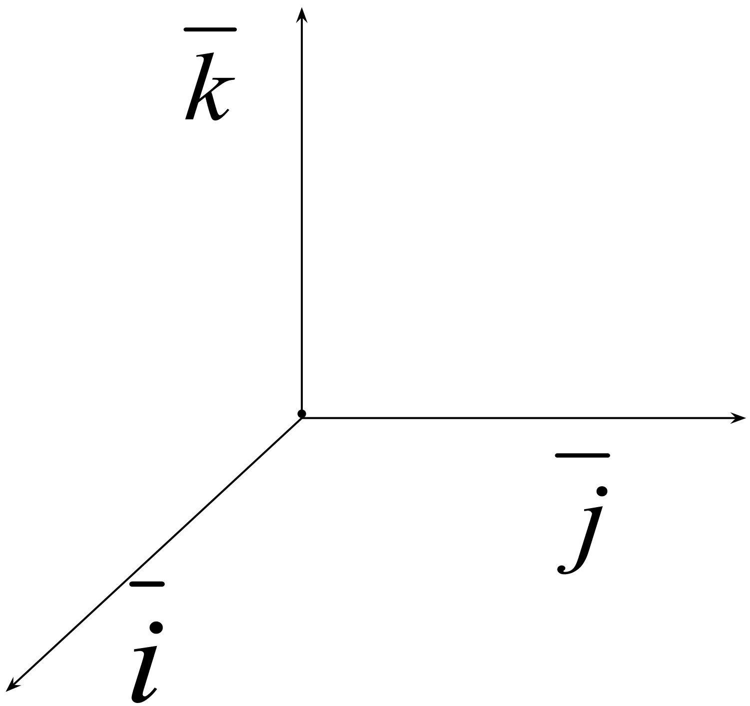
$$\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k},$$
$$\overline{b}=3\overline{i}-\overline{j}-4\overline{k}.$$

Решение

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-$$

$$-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\overline{k}=-13\overline{i}+5\overline{j}-11\overline{k}.$$

Векторные произведения координатных векторов



$$\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k},\qquad \overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k},$$

$$\overline{k}\times\overline{i}=\overline{j},\qquad \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j},$$

$$\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}.\qquad \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}.$$

Площадь параллелограмма

$$S_{пар} = \left| \bar{a} \times \bar{b} \right|$$

Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

Свойства векторного произведения

$$\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0} \text{ или } \overline{b} = \overline{0} \text{ или } \overline{a} \parallel \overline{b}$$

$$\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$$

Свойства векторного произведения

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$$

$$\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=(\lambda\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(\lambda\bar{b})$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример

Найти $\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)\right|,$ если $\left|\bar{a}\right|=2, \left|\bar{b}\right|=1, \varphi=90^0.$

Решение

$$\left|\left(2\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)\right|=$$

$$=\left|2\left(\bar{a}\times\bar{a}\right)+3\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)-4\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)-6\left(\bar{b}\times\bar{b}\right)\right|=$$

$$=7\left|\bar{b}\times\bar{a}\right|=7\left|\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\sin\varphi=$$

$$=7\cdot1\cdot2\cdot\sin 90^0=14.$$

Ключевые понятия

Векторное произведение векторов, физический смысл векторного произведения, правая и левая тройка векторов.

Лекция 9.
Смешанное произведение

Смешанным произведением трёх векторов называется произведение вида :

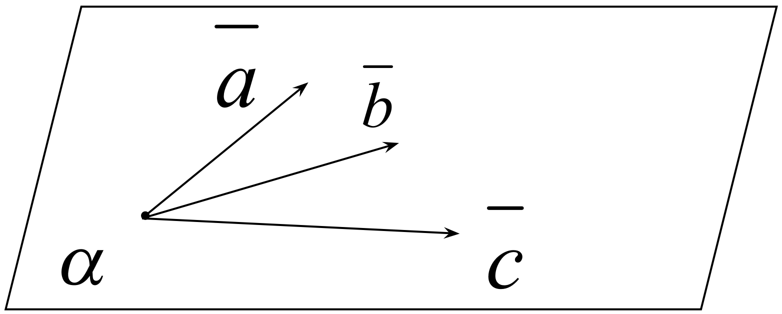
$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

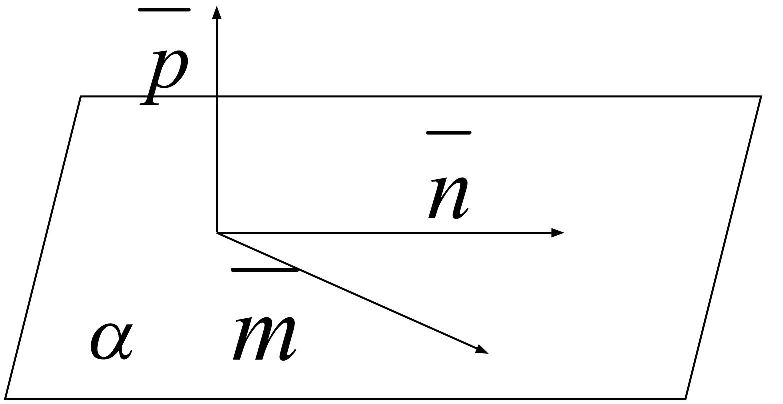
Смешанное произведение

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Компланарные векторы

Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.





$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – *компланарны*,

$\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$ – *некомпланарны*.

Условие компланарности трёх векторов

Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, то $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$

Элементами определителя являются координаты векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

Объём параллелепипеда

$$V = \left| \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right|$$

Объём тетраэдра

$$V_{тет} = \frac{1}{6}\left|\overline{abc}\right|$$

Ключевые понятия

Смешанное произведение векторов, условие компланарности трёх векторов.

Вопросы для самопроверки по теме «Векторы»

1. Векторные и скалярные величины.

2. Векторы. Основные определения.

3. Равенство векторов. Орт.

4. Линейные операции над векторами.

Вопросы для самопроверки по теме «Векторы» (продолжение)

5. Линейно зависимые (независимые) векторы.

6. Базис на плоскости и в пространстве.

7. Разложение вектора по базису.

8. Линейные операции над векторами в координатной форме.

Вопросы для самопроверки по теме «Векторы» (продолжение)

9. Деление отрезка в данном отношении.

10. Направляющие косинусы вектора.

11. Проекция вектора на ось.

12. Угол между вектором и осью.

Вопросы для самопроверки по теме «Векторы» (продолжение)

13. Скалярное произведение векторов. Свойства.
14. Векторное произведение векторов.
15. Смешанное произведение векторов.
16. Компланарность векторов. Необходимое и достаточное условие компланарности.

Прямая на плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$\overline{n} = (A; B)$$

Общее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

Уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Параметрические уравнения

$$x = mt + x_0$$

$$y = pt + y_0$$

С угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y = kx + b$$

Угол между двумя прямыми

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Расстояние от точки до прямой

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ключевые понятия

Прямая, нормаль, направляющий вектор, угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Вопросы для самопроверки по теме «Прямая на плоскости»

1. Различные способы задания прямой на плоскости.

2. Угол между двумя прямыми.

3. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Лекция10.Кривые второго порядка.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Кривые второго порядка.

Уравнение такого вида может определять: эллипс (в частности, окружность), гиперболу, параболу, пару прямых (параллельных, пересекающихся либо совпадающих), точку или не определять никакой линии.

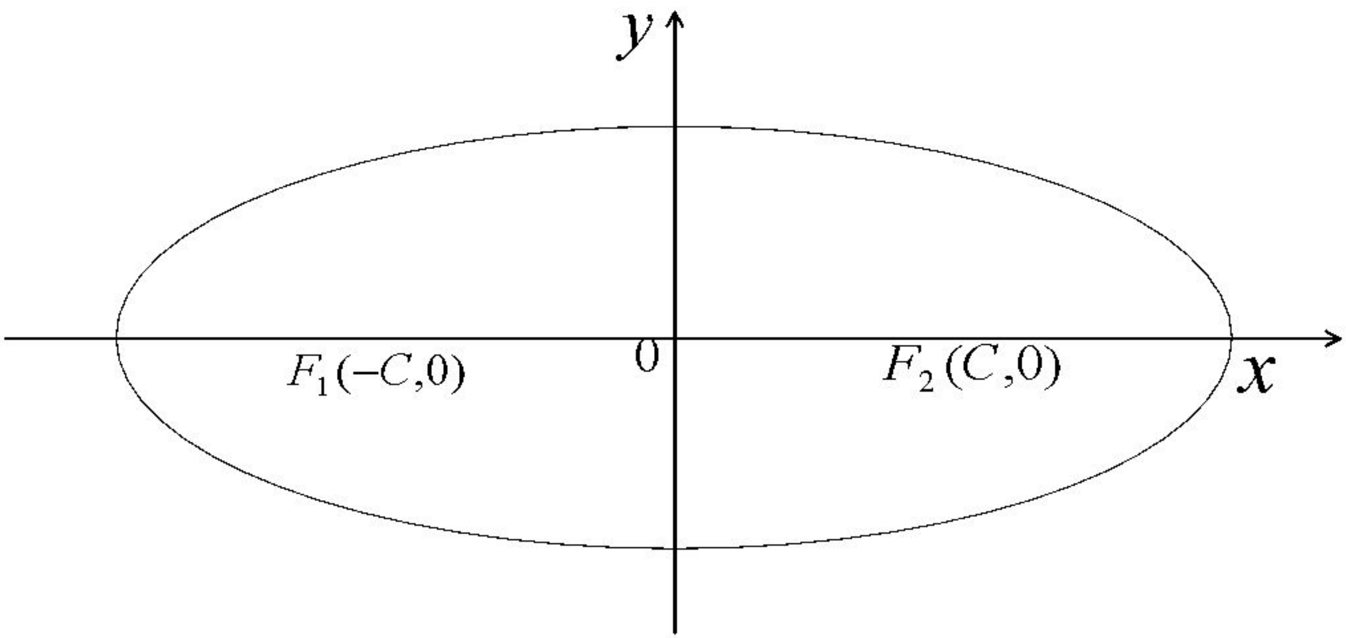
Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек (плоскости), сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами этого эллипса, есть величина постоянная.

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1.$$

Эллипс



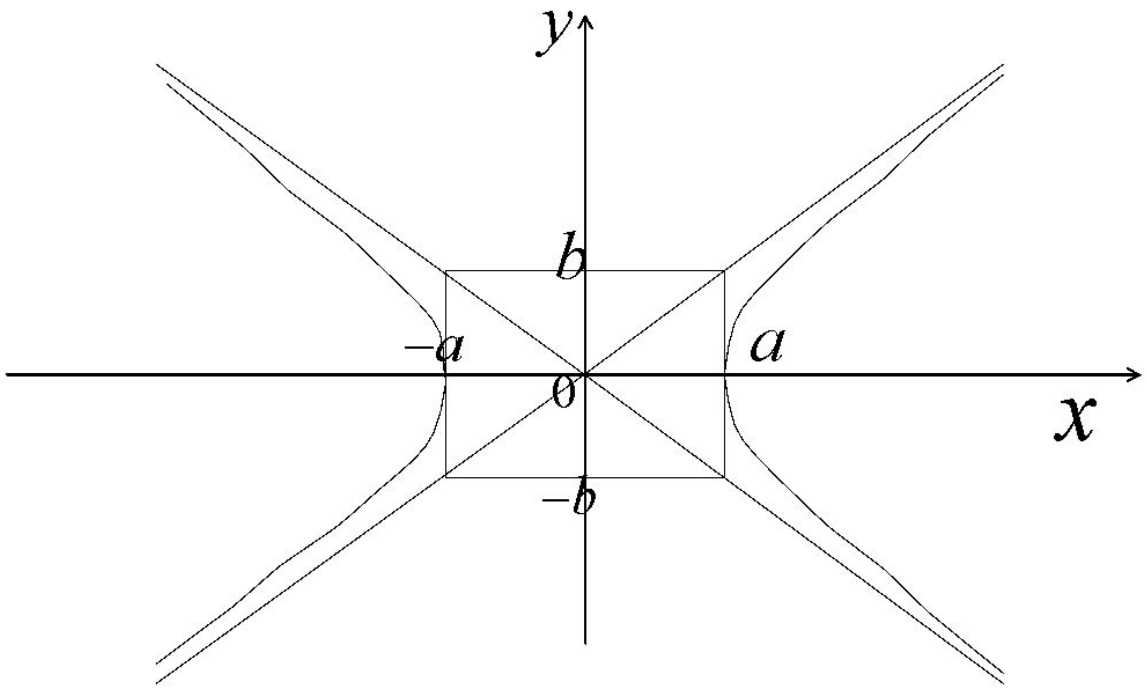
Определение гиперболы

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1.$$

Гипербола



Лекция11.Определение параболы

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки плоскости, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой .

Ключевые понятия

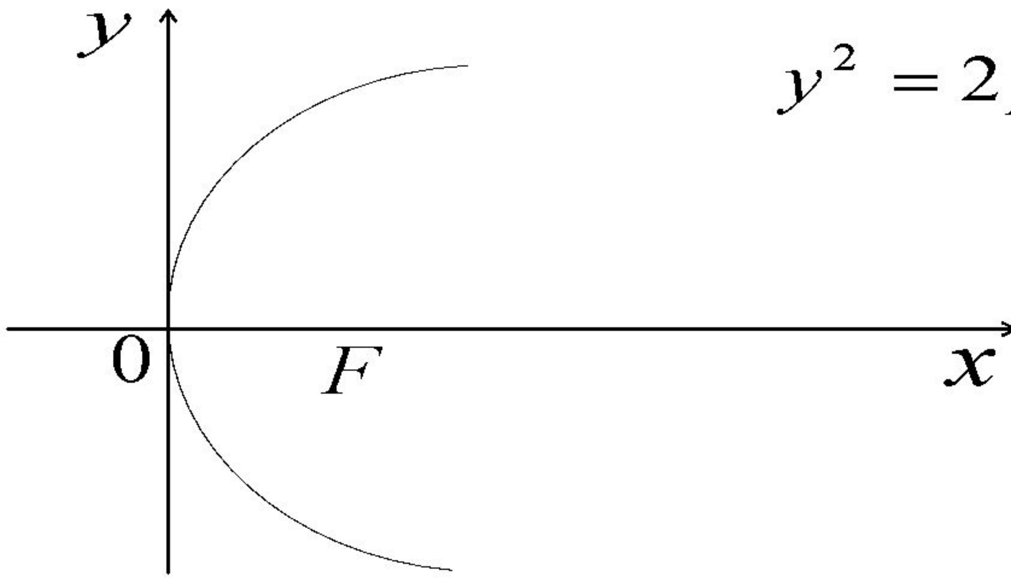
Парабола, вершина, фокус,

директриса , ось параболы.

Уравнение параболы

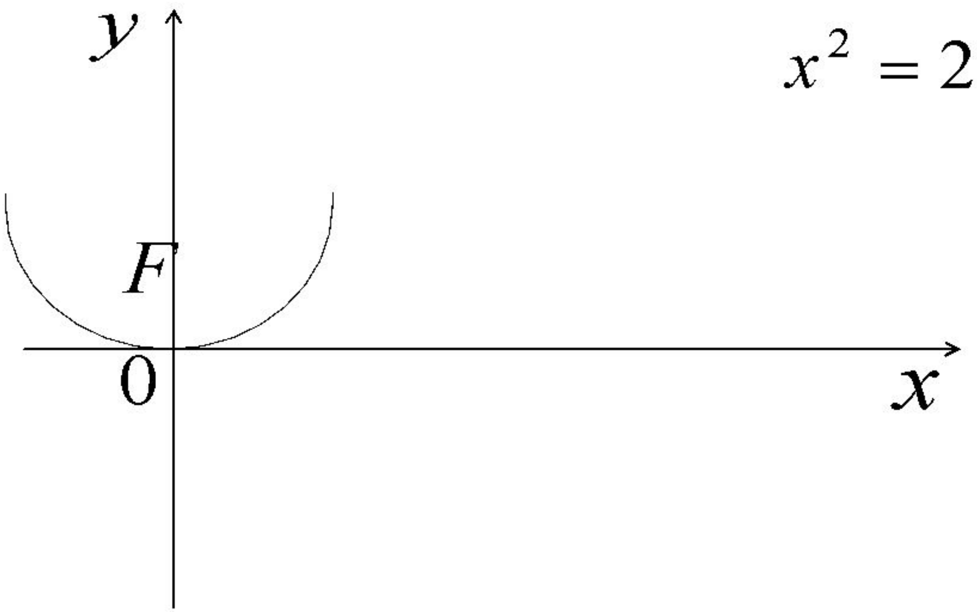
$$y^2 = 2px$$

Парабола



$$y^2 = 2px,$$

Парабола



$$x^2 = 2py.$$

Ключевые понятия

Эллипс, гипербола, окружность,

фокусы, оси, эксцентриситет.

Вопросы для самопроверки по теме «Кривые второго порядка»

1. Каноническое уравнения окружности.
2. Каноническое уравнение эллипса.
3. Определение эллипса.
4. Определение гиперболы.
5. Каноническое уравнение гиперболы.

Вопросы для самопроверки по теме «Кривые второго порядка» (продолжение)

6. Определение параболы. Канонические уравнения параболы.

7. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Полярные координаты

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi;$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Лекция12.Плоскость

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1.$$

Уравнение через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол между плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей

$$\alpha_1 \| \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{n_1} \| \overline{n_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Longleftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Rightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{\left| Ax_o + By_o + Cz_o + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ключевые понятия

Плоскость, угол между плоскостями, параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей.

Вопросы для самопроверки по теме «Плоскость»

1. Общее уравнение плоскости. Частные случаи.

2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

3. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Лекция13.Прямая в пространстве

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q}$$

Параметрические уравнения

$$x = mt + x_0\,,\;\; y = pt + y_0\,,\;\; z = qt + z_0$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Общие уравнения прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

Угол между прямыми

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}}{\left|\overline{a_1}\right| \cdot \left|\overline{a_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

Параллельность прямых

Если $\square_1 \| \square_2$, то $\overline{a_1} \| \overline{a_2} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2}$.

Перпендикулярность прямых

Если $\ell_1 \perp \ell_2$ то $\overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$

Угол между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{a}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|} = \frac{\left|Am + Bp + Cq\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + p^2 + q^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

Если $\square \parallel \alpha$, то $Am + Bp + Cq = 0$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если $\square \perp \alpha$,

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$$

Ключевые понятия

Прямая в пространстве, угол между

прямыми в пространстве,

параллельность прямых,

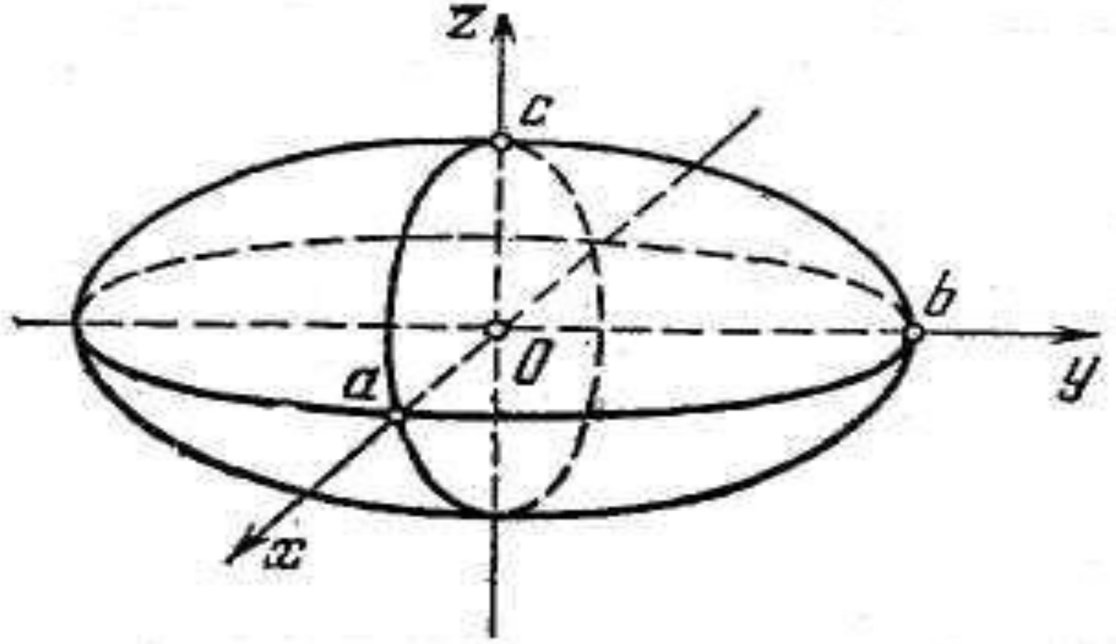
перпендикулярность прямых,

угол между прямой и плоскостью.

Вопросы для самопроверки по теме «Прямая в пространстве»

1. Прямая в пространстве. Способы задания.
2. Угол между двумя прямыми.
3. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
4. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Лекция14.Поверхности второго порядка. Эллипсоид.



Эллипсоид

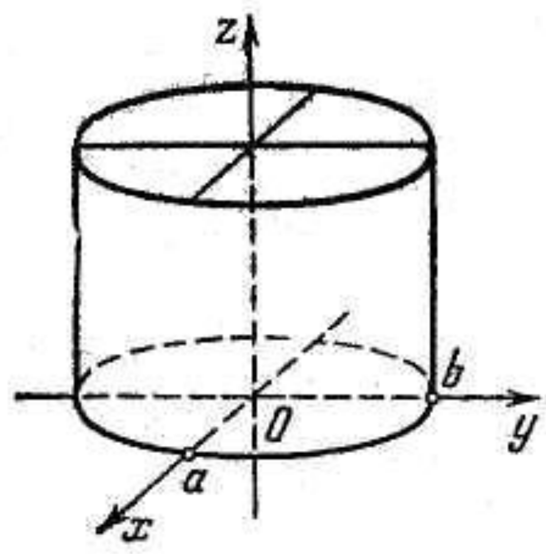
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой □. Линия L при этом называется направляющей цилиндрической поверхности , а каждая из прямых, составляющих поверхность и параллельных прямой □, ее образующей.

Цилиндрические поверхности

Если направляющая цилиндрической поверхности лежит в одной из координатных плоскостей , а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости, то уравнение такой поверхности совпадает с уравнением направляющей L, то есть содержит только две переменных.



Эллиптический цилиндр

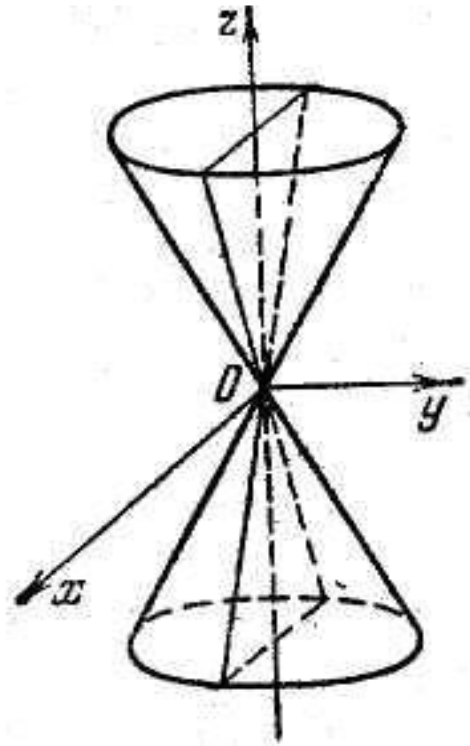
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Конические поверхности

Конической поверхностью называется поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и проходящих через данную точку P. Линия L при этом называется *направляющей* конической поверхности, точка P – ее вершиной, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность, - ее *образующей.*

Конус

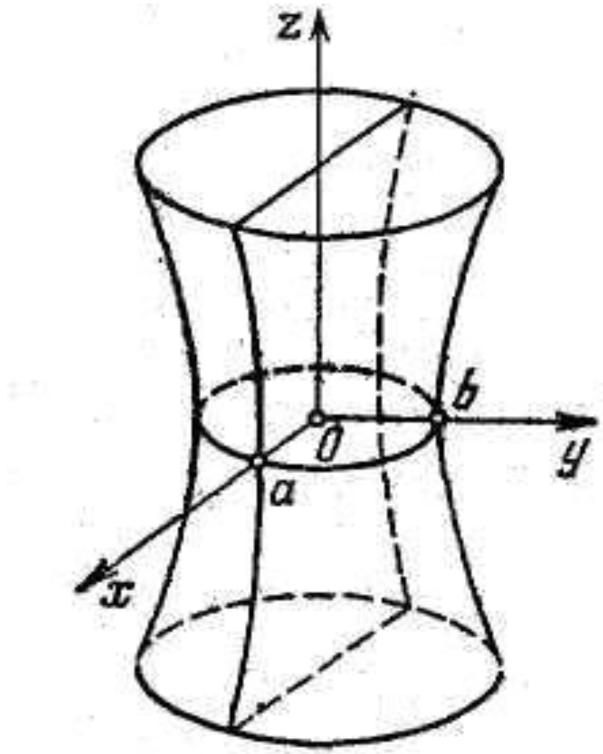
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

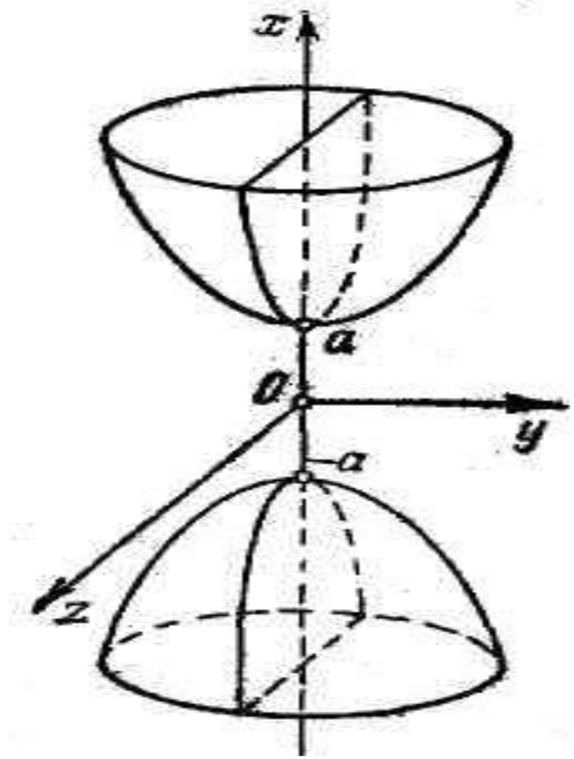


Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

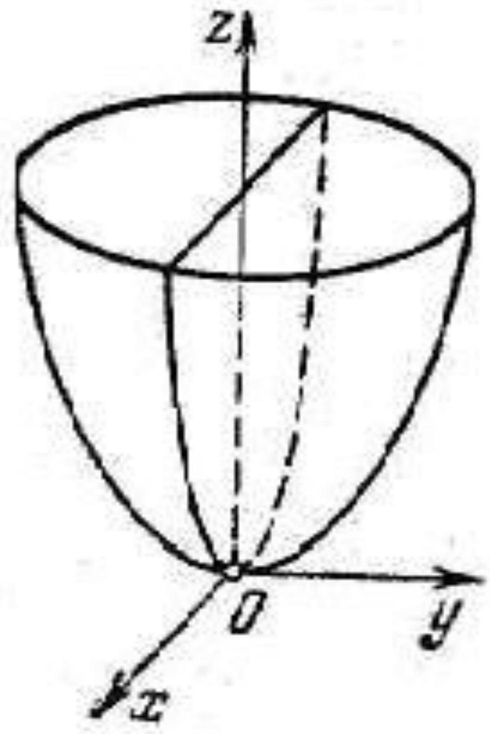


Двуполостной гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Эллиптический параболоид

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{g},$$



Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

Гиперболический параболоид

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{g},$$

Ключевые понятия

Поверхность, эллипсоид, конус, цилиндр, виды цилиндров, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, параболоид.

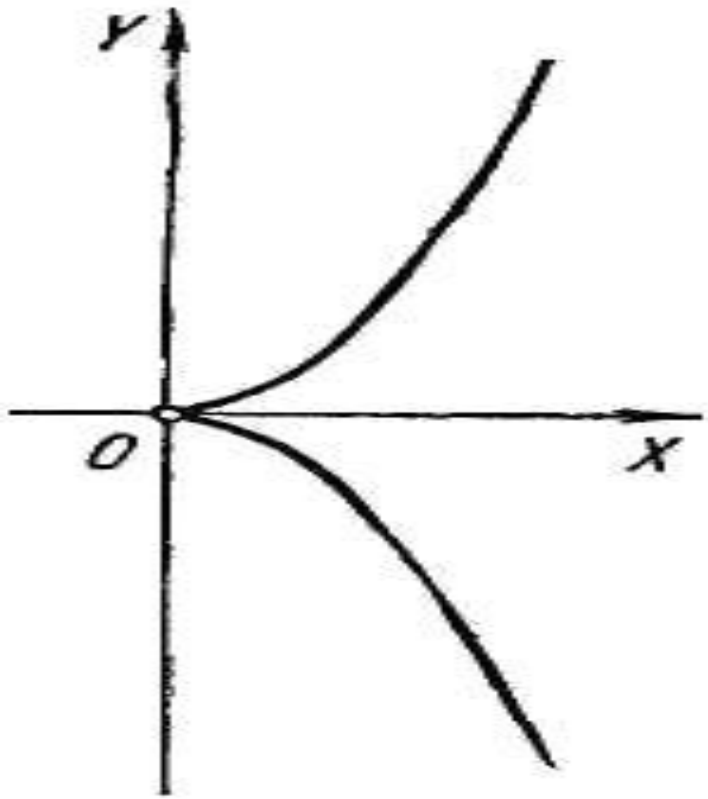
Вопросы для самопроверки по теме «Поверхности второго порядка»

1. Поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

2. Общее уравнение поверхности второго порядка и его приведение к каноническому виду.

Лекция15.

Некоторые кривые

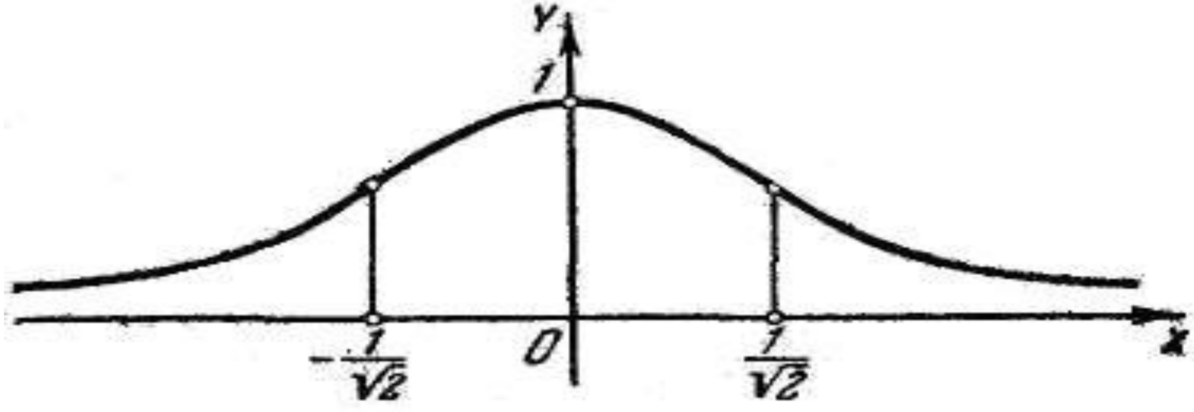


Полукубическая парабола

$$y^2 = x^3$$

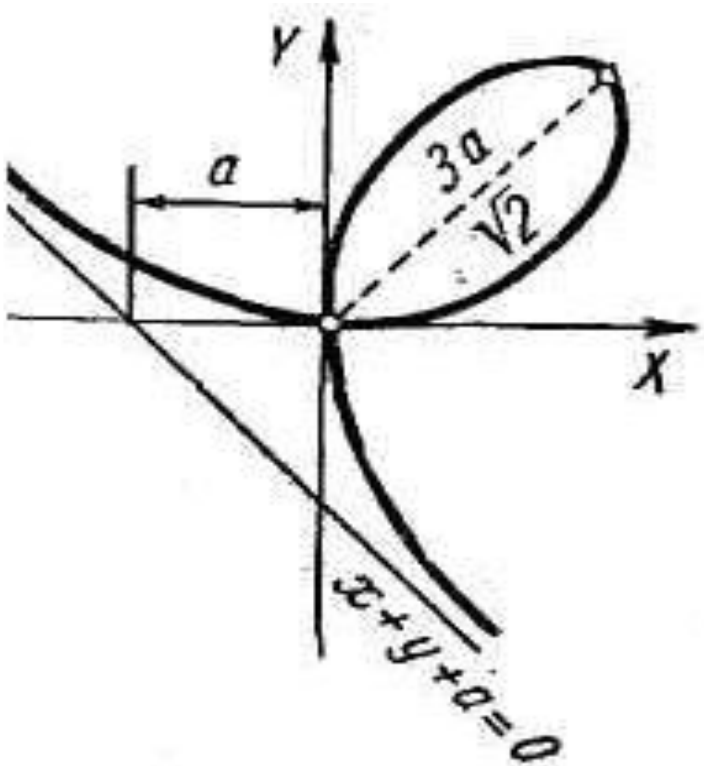
или

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$



Кривая Гаусса

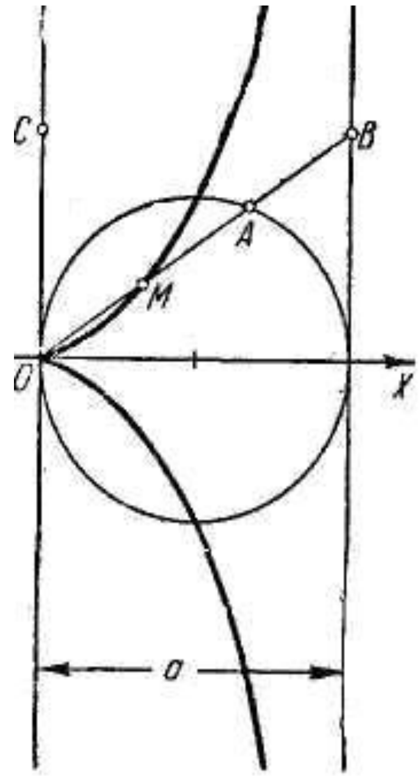
$$y = e^{-x^2}$$



Декартов лист

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$ или

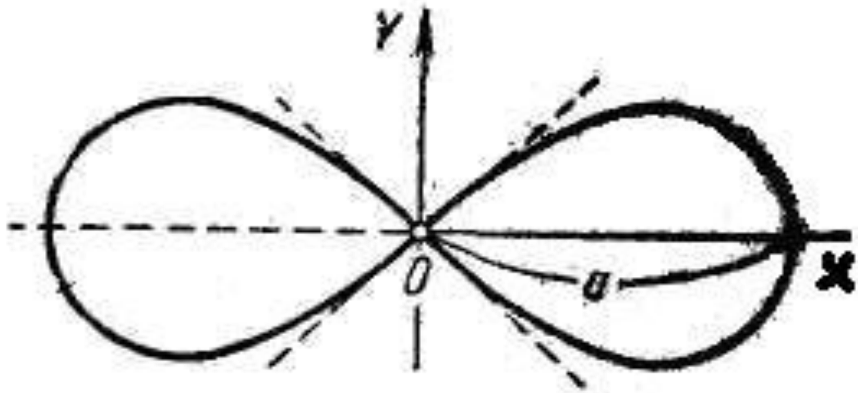
$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$



Циссоида Диоклеса

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$ или

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

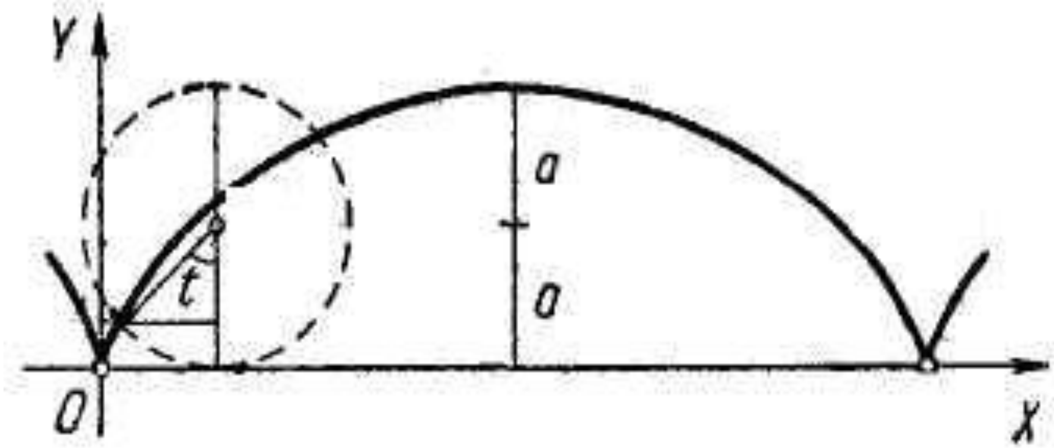


Лемниската Бернулли

$$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$$

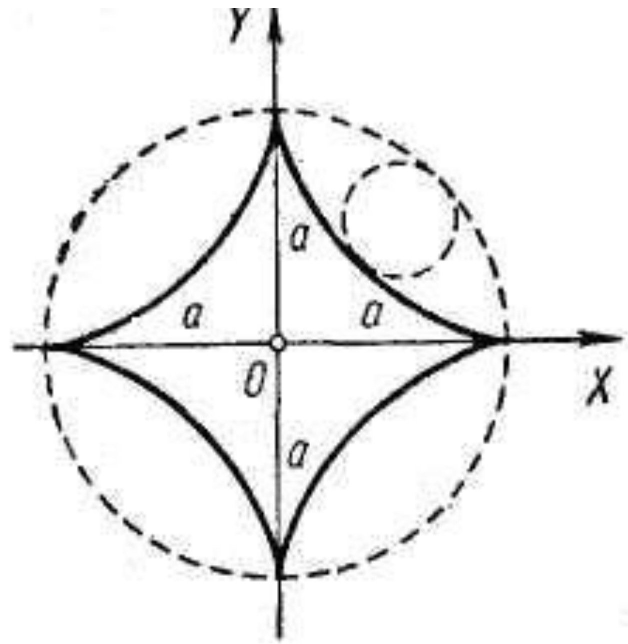
или

$$r^2=a^2\cos 2\varphi$$



Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

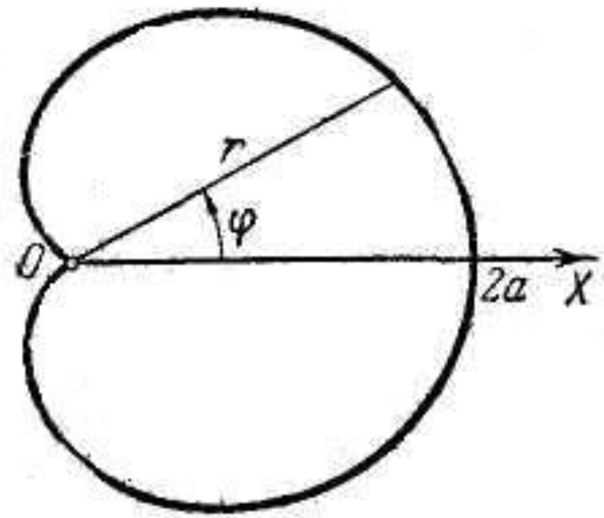


Гипоциклоида (астроида)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

или

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



Кардиоида

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

Ключевые понятия

Замечательные кривые, кривая Гаусса, Декартов лист, циссоида Диоклеса, лемниската Бернулли, циклоида, астроида, кардиоида.

Лекция16.Комплексные числа.

Комплексным числом *z* называется

число вида x+iy,

где *x* и *y*–вещественные числа.

Комплексные числа (продолжение)

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Комплексные числа (продолжение)

Число *x* называется действительной частью, *y*–мнимой частью комплексного числа *z*. Это записывают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Комплексные числа (продолжение)

Если x=0, то число z называют чисто мнимым; если y=0 , то получается вещественное число z=x +0i.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными.

Комплексные числа (продолжение)

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$; комплексное число *z* считается равным нулю, если x=y=0.

Комплексные числа (продолжение)

Всякое комплексное число можно изобразить точкой на плоскости, т.к. каждому z соответствует упорядоченная пара вещественных чисел $(x;y)$.

Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

$$z = r\left(\sin\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Действия над комплексными числами(продолжение)

$$z_1 z_2 = \left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 + iy_2\right) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 +$$

$$+ i^2 y_1 y_2 = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right)$$

Действия над комплексными числами(продолжение)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{\left(x_2 + iy_2\right)\left(x_2 - iy_2\right)} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + iy_1 x_2 - ix_1 y_2 - i^2 y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) + i\left(-x_1 y_2 + x_2 y_1\right)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

Действия над комплексными числами(продолжение)

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2 \left[cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\,sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Формулы Муавра

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

Ключевые понятия

Мнимая единица, комплексное число, действительная и мнимая части комплексного числа; алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Вопросы для самопроверки по теме «Комплексные числа»

1. Формы записи комплексного числа.

2. Сложение, умножение, деление комплексных чисел.

Вопросы для самопроверки по теме «Комплексные числа»

3. Модуль и сопряженное комплексного числа и их свойства.

4. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра.

Вопросы для самопроверки по теме «Комплексные числа» (продолжение)

5. Извлечение корня из комплексного числа.

6. Основная теорема алгебры.

7. Геометрическое изображение комплексного числа.

Основная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 2006.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2005, ч.1.

Основная литература

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г. И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика: Учебник. Т. 1. – М.: Эдиториал УРСС, 2007.

4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. Изд. 3 – 11. Гостехиздат, 1955 – 1957. – М.: Наука, 1964 – 1971.

Дополнительная литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Физматлит, 2005.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 2006.

Дополнительная литература

3. Шипачев В.С. Основы высшей математики. – М.: Высшая школа, 2004.
4.Л.Я.Дубинина,Л.С.Никулина,И.В. Пивоварова.Курс лекций по высшей математике.Ч.1.-В.:
ВГУЭС,2002.

Использование материалов презентации