

# 3.4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$   
называется вектор  $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$   
где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - любые действительные  
числа.

**Например, даны три вектора:**

$$\vec{a}_1 = (1; 2; 0) \quad \vec{a}_2 = (2; 1; 1) \quad \vec{a}_3 = (-1; 1; -2)$$

**И числа**  $\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = 4$

**Линейной комбинацией этих векторов будет вектор:**

$$\vec{b} = (4; 1; -5)$$

**Говорят, что вектор  $\vec{b}$  разлагается по векторам  $\vec{a}$ .**

Векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

называются линейно зависимыми, если  
существуют такие числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$   
не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$$

В противном случае вектора называются  
линейно независимыми.

Пусть система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

линейно зависима:  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$

Выберем в этой сумме член с номером  $s$  и выразим его через остальные слагаемые:

$$\alpha_s \vec{a}_s = -\alpha_1 \vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2 - \dots - \alpha_k \vec{a}_k$$

$$\vec{a}_s = -\frac{\alpha_1}{\alpha_s} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_s} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_s} \vec{a}_k$$

Т. об., один из векторов линейно зависимой системы оказывается выраженным через другие вектора этой системы.

# *Свойства линейнозависимой системы векторов*

+

*Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима.*

+

*Система, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима.*



*Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди ее векторов содержится хотя бы один вектор, который линейно выражается через остальные вектора системы.*

Геометрический смысл линейной зависимости векторов:

Если два вектора линейно зависимы, то они коллинеарны:  $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$

Если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.