

Линейное диофантово уравнение и 4 способа его решения

- ▶ Правило 1. Если c не делится на d , то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых числах. Н.О.Д. $(a, b) = d$.

- ▶ Правило 2. Чтобы найти решение уравнения $ax + by = c$ при взаимно-простых a и b , нужно сначала найти решение $(x_0; y_0)$ уравнения $ax + by = 1$; числа cx_0, cy_0 составляют решение уравнения $ax + by = c$.

► Решить в целых числах (x, y)
уравнение

$$5x - 8y = 19 \dots (1)$$

Первый способ. Нахождение частного решения методом подбора и запись общего решения.

Знаем, что если Н.О.Д.(а;в) =1, т.е. а и в взаимно-простые числа, то уравнение (1)

имеет решение в целых числах x и y. Н.О.Д.(5;8) =1. Методом подбора находим частное решение: $x_0 = 7$; $y_0 = 2$.

Итак, пара чисел (7;2) - частное решение уравнения (1).

Значит, выполняется равенство: $5 \times 7 - 8 \times 2 = 19 \dots$ (2)

Вопрос: Как имея одно решение записать все остальные решения?

Вычтем из уравнения (1) равенство (2) и получим: $5(x - 7) - 8(y - 2) = 0$.

Отсюда $x - 7 = \frac{8(y-2)}{5}$. Из полученного равенства видно, что число $(x - 7)$ будет целым тогда и только тогда, когда $(y - 2)$ делится на 5, т.е. $y - 2 = 5n$, где n какое-нибудь целое число. Итак, $y = 2 + 5n$, $x = 7 + 8n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Тем самым все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x = 7 + 8n, \\ y = 2 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Второй способ. Решение уравнения относительно одного неизвестного.

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором наименьший (по модулю) коэффициент. $5x - 8y = 19$

$$\Leftrightarrow 5x = 8y + 19 \Leftrightarrow x = \frac{8y+19}{5}.$$

Остатки при делении на 5: 0,1,2,3,4. Подставим вместо y эти числа.

$$\text{Если } y = 0, \text{ то } x = \frac{8 \times 0 + 19}{5} = \frac{19}{5}.$$

$$\text{Если } y = 1, \text{ то } x = \frac{8 \times 1 + 19}{5} = \frac{27}{5}.$$

$$\text{Если } y = 2, \text{ то } x = \frac{8 \times 2 + 19}{5} = \frac{35}{5} = 7 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Если } y = 3, \text{ то } x = \frac{8 \times 3 + 19}{5} = \frac{43}{5}.$$

$$\text{Если } y = 4 \text{ то } x = \frac{8 \times 4 + 19}{5} = \frac{51}{5}.$$

Итак, частным решением является пара $(7;2)$.

$$\text{Тогда общее решение: } \begin{cases} x = 7 + 8n, \\ y = 2 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Третий способ. Универсальный способ поиска частного решения.

Для решения применим алгоритм Евклида. Мы знаем, что для любых двух натуральных чисел a, b , таких, что $\text{Н.О.Д.}(a, b) = 1$ существуют целые числа x, y такие, что $ax + by = 1$.

План решения:

1. Сначала решим уравнение $5m - 8n = 1$ используя алгоритм Евклида.
2. Затем найдем частное решение уравнения (1) по правилу 2.
3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1. Найдем представление: $1 = 5m - 8n$. Для этого используем алгоритм Евклида.

$$8 = 5 \times 1 + 3.$$

$$5 = 3 \times 1 + 2.$$

$$3 = 2 \times 1 + 1.$$

Из этого равенства выразим 1. $1 = 3 - 2 \times 1 = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 =$

$$= 3 - 5 \times 1 + 3 \times 1 = 3 \times 2 - 5 \times 1 = (8 - 5 \times 1) \times 2 - 5 \times 1 = 8 \times 2 - 5 \times 2 - 5 \times 1 =$$

$$= 5 \times (-3) - 8 \times (-2). \text{ Итак, } m = -3, n = -2.$$

2. Частное решение уравнения (1): $X_0 = 19m$; $y_0 = 19n$.

Отсюда получим: $X_0 = 19 \times (-3) = -57$; $y_0 = 19 \times (-2) = -38$.

Пара $(-57; -38)$ - частное решение (1).

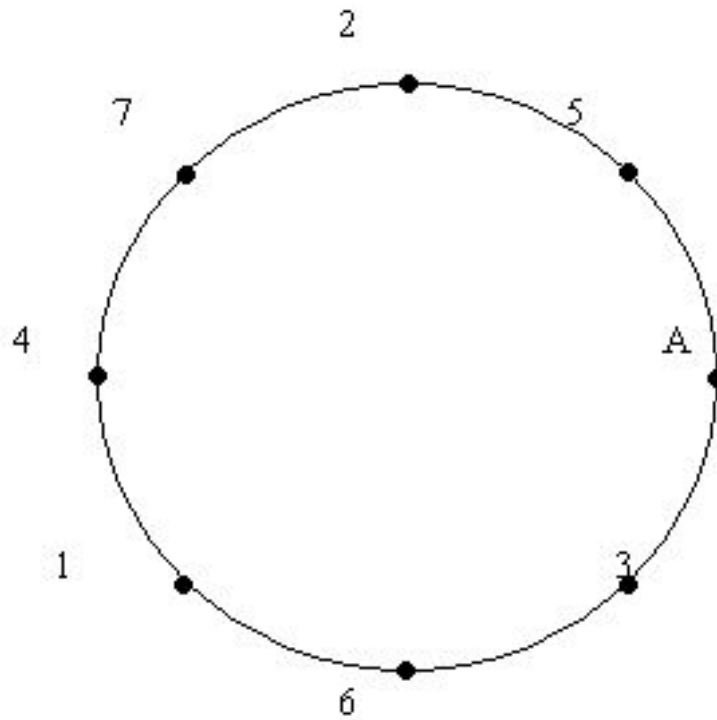
3. Общее решение уравнения (1): $\begin{cases} x = -57 + 8n, \\ y = -38 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$

Четвертый способ. Геометрический.

План решения.

1. Решим уравнение $5x - 8y = 1$ геометрически.
2. Запишем частное решение уравнения (1).
3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1



Отложим на окружности последовательно друг за другом равные дуги, составляющие

$\frac{5}{8}$ -ю часть полной окружности. За 8 шагов получим все вершины правильного вписанного в окружность 8-угольника. При этом сделаем 5 полных оборотов.

На 5-ом шаге получили вершину, соседнюю с начальной, при этом сделали 3 полных оборота и еще прошли $\frac{1}{8}$ -ю часть окружности, так

$$\text{что } x \times \frac{5}{8} = y + \frac{1}{8}.$$

Итак, $X_0 = 5$, $y_0 = 3$ является частным решением уравнения $5x - 8y = 1$.

2. Частное решение уравнения (1): $X_0 = 19 \times 5 = 95$; $y_0 = 19 \times 3 = 57$.

3. Общее решение уравнения (1):
$$\begin{cases} x = 95 + 8n, \\ y = 57 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$