

Тема урока:

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Преподаватель математики и физики
ГБПОУ Салаватского индустриального
колледжа
Ягаффарова Д.У.
2015г.

Опрос

1. Какое уравнение называется дифференциальным?

Уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.

2. Какие из следующих уравнений являются дифференциальными?

$$3^y + y = 3, \quad yy' + 2 = 0, \quad y^2 + y'' = y, \quad 2y^2 + 3y = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1.$$

3. Что значит решить ДУ?

Найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

4. Какое решение ДУ называется общим?

Решение, содержащее произвольную постоянную C .

5. Какое решение ДУ называется частным?

Решение, в которое подставлено числовое значение C .

Опрос

6. Что называется порядком ДУ?

Наивысший порядок производной, входящий в уравнение.

7. Определите порядок следующих ДУ:

$$y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0,$$

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1,$$

$$y'' - 3y' + y = x$$

$$y'' + y''' = y'$$

8. Какое уравнение называется ДУ первого порядка с разделёнными переменными?

Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$.

9. Какое уравнение называется ДУ первого порядка с разделяющимися переменными?

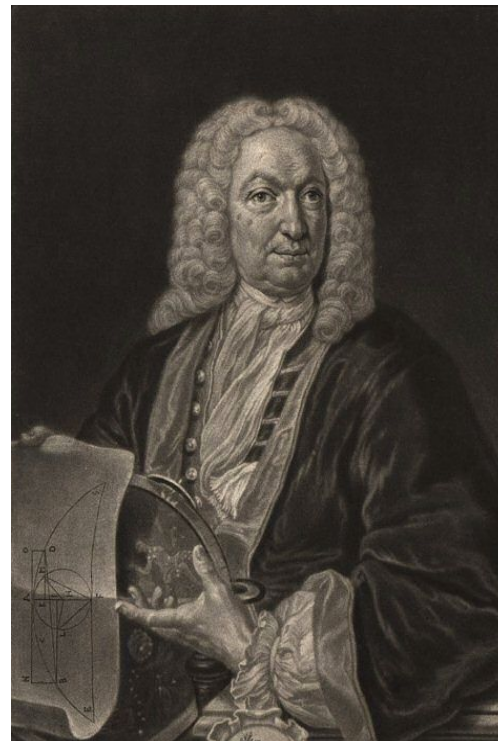
Уравнение вида $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка



Яков Бернулли
(1654-1705)

К портрету Иоганна
Вольтер написал
четверостишие:
Его ум видел истину,
Его сердце познало
справедливость.
Он — гордость
Швейцарии
И всего человечества.



Иоганн Бернулли
(1667—1748)

Три поколения Бернулли дали 8 крупных математиков и физиков.

Среди академиков Петербургской Академии наук — пятеро представителей семьи Бернулли.

Объекты, названные в честь членов семьи

Дифференциальное уравнение Бернулли — в честь Якова.

Закон Бернулли и **Интеграл Бернулли в гидродинамике** — в честь Даниила.

Лемниската Бернулли — в честь Якова.

Многочлен Бернулли — в честь Якова.

Неравенство Бернулли — в честь Иоганна.

Распределение Бернулли в теории вероятностей — в честь Якова.

Числа Бернулли — в честь Якова.

В честь Якова и Иоганна Бернулли назван кратер на Луне.

Уравнение Якова Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

$$z = y^{1-n}$$

Линейное

Однородное

Неоднородное

$$y' + P(x)y = 0$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

ДУ с разделяющимися
переменными

Метод Иоганна Бернулли

Метод Лагранжа

Метод подстановки

Метод вариации
произвольной
постоянной

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции переменной x (или постоянные величины), называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

- **Замечание.** Уравнение называется линейным, так как искомая функция y и её производная y' входят в это уравнение в первой степени.

Линейное ДУ первого порядка называется **однородным**, если функция

$$Q(x) = 0$$

Линейное ДУ первого порядка называется **неоднородным**, если функция $Q(x) \neq 0$

Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями первого порядка, а какие нет и почему?

1) $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ 2) $y'' + 2xy = 0$ 3) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$

1) Есть линейное уравнение первого порядка, так как y и y' входят в

первой степени, а $P(x) = \frac{2}{x+1}$, $Q(x) = (x+1)^3$ - функции одной переменной x

2) Не является линейным, так как содержит вторую производную

3) Не является линейным, так как содержит y^2

Линейное однородное ДУ первого порядка $y' + P(x)y = 0$

1. Решить уравнение $y' + y \sin x = 0$

Решение: $y' = \frac{dy}{dx}$, имеем

$$\frac{dy}{dx} + y \sin x = 0 \quad | \quad \frac{dx}{y}$$

Получаем $\frac{dy}{y} + \sin x dx = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

$$\ln y = \cos x + C$$

(общее решение)

Выразить производную функции
через дифференциалы

Разделить переменные

Интегрировать

2. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = 0$

Решение: $y = Cx$ (общее решение)

Линейное неоднородное ДУ. Метод Иоганна Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Замечание. Любую величину можно представить в форме произведения двух сомножителей, причем один из множителей можно выбрать по своему желанию.

$$y = uv$$

В результате линейное неоднородное ДУ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$v' + P(x)v = 0; \quad u'v = Q(x) \quad \text{или} \quad uv' = Q(x),$$

где u и v - новые функции переменной x

1. Решить уравнение $y' - \frac{3}{x}y = x$.

Решение:

$$P(x) = -\frac{3}{x}, Q(x) = x.$$

Положим

$$y = uv,$$

тогда

$$y' = u'v + v'u.$$

$$u' + P(x)u = 0;$$

Получим

$$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x,$$

или

$$u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) + u'v = x. \quad (1)$$

$$v' - \frac{3}{x}v = 0.$$

$$v' = \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 3 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln v = 3 \ln x, \quad C=0, \text{ ввиду произвольности в выборе}$$

$$v = x^3.$$

Имеем

$$u'x^3 = x$$

Выразить производную функции
через дифференциалы

Разделить переменные

Интегрировать

v

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$du = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2}$$

Выразить производную функции
через дифференциалы

Разделить переменные

Интегрировать

$$u = -\frac{1}{x} + C, \quad \text{постоянную } C \text{ писать обязательно}$$

Окончательно получим

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x} \right) x^3 \quad (\text{общее решение})$$

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v \left(u' - \frac{3}{x} u \right) + uv' = x$$

Алгоритм решения линейного ДУ первого порядка

1. Приводят уравнение к виду $y' + P(x)y = Q(x)$
2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.
4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$,
6. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

Примеры

Решить уравнения:

1. $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2.$ Ответ: $y = 2\sqrt{1-x}.$

2. $xy' - y = x^2 \cos x.$ Ответ: $y = x(\sin x + C).$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется линейным ДУ первого порядка?

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

2. При каких условиях линейное ДУ первого порядка называется однородным?

$$Q(x) = 0$$

3. К какому ДУ приводится линейное однородное уравнение ?

ДУ с разделяющимися переменными

4. Какими методами решается линейное неоднородное ДУ ?

Методы Бернулли, Лагранжа

5. В чем заключается метод Бернулли?

В подстановке $y = uv$,

Домашнее задание

1. Решить линейное ДУ первого порядка

$$y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0$$

2. Решить задачу Коши для линейного ДУ первого порядка

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}; y(0) = 0$$

Спасибо за внимание

