Тема урока:

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Преподаватель математики и физики
ГБПОУ Салаватского индустриального колледжа
Ягаффарова Д.У.
2015г.

Опрос

1. Какое уравнение называется дифференциальным?

Уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.

2. Какие из следующих уравнений являются дифференциальными?

$$3^y + y = 3, \quad yy' + 2 = 0, \quad y^2 + y'' = y, \quad 2y^2 + 3y = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1.$$

3.Что значит решить ДУ?

Найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

4. Какое решение ДУ называется общим?

Решение, содержащее произвольную постоянную *С.*

5. Какое решение ДУ называется частным?

Решение, в которое подставлено числовое значение *С.*

Опрос

6. Что называется порядком ДУ?

Наивысший порядок производной, входящий в уравнение.

7. Определите порядок следующих ДУ:

$$y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0, \qquad \frac{ds}{dt} = 3t^2 + t - 1, \qquad y'' - 3y' + y = x$$

$$y'' + y''' = y'$$

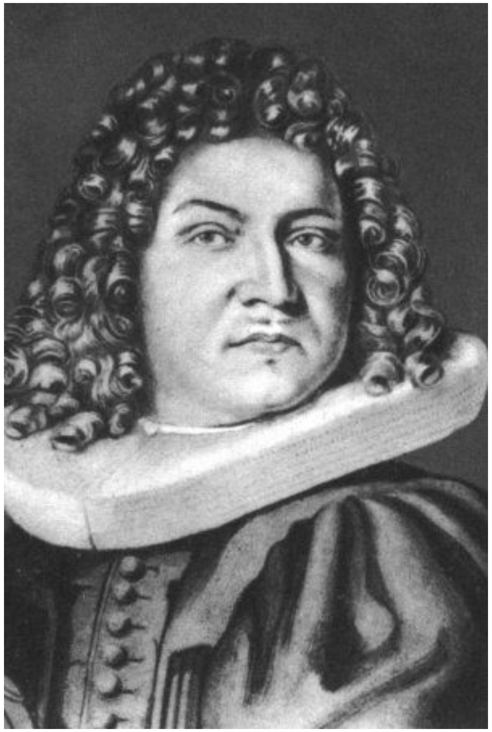
8. Какое уравнение называется ДУ первого порядка с разделёнными переменными?

Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0.$

9. Какое уравнение называется ДУ первого порядка с разделяющимися переменными?

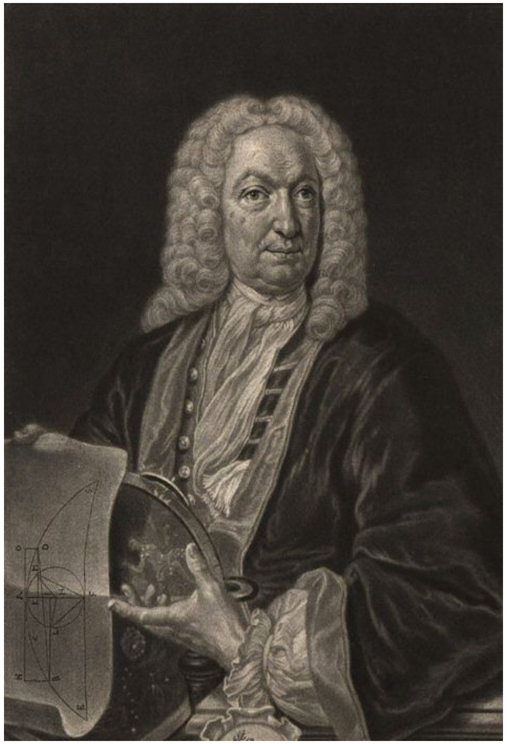
Уравнение вида $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка



Яков Бернулли
(1654-1705)

К портрету Иоганна
Вольтер написал
четверостишие:
Его ум видел истину,
Его сердце познало
справедливость.
Он — гордость
Швейцарии
И всего человечества.



Иоганн Бернулли
(1667—1748)

Три поколения Бернулли дали 8 крупных математиков и физиков.

Среди академиков Петербургской Академии наук — пятеро представителей семьи Бернулли.

Объекты, названные в честь членов семьи
Дифференциальное уравнение Бернулли — в честь Якова.
Закон Бернулли и Интеграл Бернулли в гидродинамике — в честь Даниила.
Лемниската Бернулли — в честь Якова.
Многочлен Бернулли — в честь Якова.
Неравенство Бернулли — в честь Иоганна.
Распределение Бернулли в теории вероятностей — в честь Якова.
Числа Бернулли — в честь Якова.

В честь Якова и Иоганна Бернулли назван кратер на Луне.

Уравнение Якова Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

$$z = y^{1-n}$$

Линейное

Однородное

$$y' + P(x)y = 0$$

ДУ с разделяющимися переменными

Неоднородное

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Метод Иоганна Бернулли

Метод подстановки

Метод Лагранжа

Метод вариации произвольной постоянной

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции переменной x или постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

•Замечание. Уравнение называется линейным, так как искомая функция ***y*** и её производная ***y'*** входят в это уравнение в первой степени.

Линейное ДУ первого порядка называется однородным, если функция

$$Q(x) = 0$$

Линейное ДУ первого порядка называется неоднородным, если функция $Q(x) \neq 0$

Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями первого порядка, а какие нет и почему?

1) $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ 2) $y'' + 2xy = 0$ 3) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$

1) Есть линейное уравнение первого порядка, так как ***y*** и ***y'*** входят в

первой степени, а $Đ(x) = \frac{2}{x+1}, Q(x) = (x+1)^3$ - функции одной переменной ***x***

2) Не является линейным, так как содержит вторую производную

3) Не является линейным, так как содержит y^2

Линейное однородное ДУ первого порядка $y' + P(x)y = 0$

1. Решить уравнение $y' + y\sin x = 0$

Решение: $y' = \dfrac{dy}{dx},$ имеем

Выразить производную функции через дифференциалы

$$\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0 \quad \Big| \quad \frac{dx}{y}$$

Разделить переменные

Получаем $$\frac{dy}{y} + \sin x dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx$$

Интегрировать

$$\ln y = \cos x + C$$ (общее решение)

2. Решить уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = 0$

Решение: $y = Cx$ (общее решение)

Линейное неоднородное ДУ. Метод Иоганна Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Замечание. Любую величину можно представить в форме произведения двух сомножителей, причем один из множителей можно выбрать по своему желанию.

$$y = uv$$

В результате линейное неоднородное ДУ сводиться к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$v' + P(x)v = 0; \quad u'v = Q(x)$$ или $$uv' = Q(x),$$

где u и v - новые функции переменной x

1. Решить уравнение $y' - \dfrac{3}{x}y = x.$

Решение:

$$P(x) = -\frac{3}{x}, Q(x) = x.$$

Положим $y = uv,$

тогда $y' = u'v + v'u.$

$$u' + P(x)u = 0;$$

Получим
$$u'v+v'u-\frac{3}{x}uv=x,$$
или
$$u\left(v'-\frac{3}{x}v\right)+u'v=x. \qquad (1)$$

$$v'-\frac{3}{x}v=0.$$

$$v'=\frac{dv}{dx},$$
Выразить производную функции через дифференциалы

$$\frac{dv}{v}=\frac{3dx}{x},$$
Разделить переменные

$$\int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x},$$
Интегрировать

$$\ln v=3\ln x,$$ C=0, ввиду произвольности в выборе v

$$v=x^3.$$

Имеем
$$u'x^3=x$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

Выразить производную функции через дифференциалы

$$du = \frac{1}{x^2}dx$$

Разделить переменные

$$\int du = \int \frac{dx}{x^2}$$

Интегрировать

$$u = -\frac{1}{x} + C,$$ постоянную *C* писать обязательно

Окончательно получим

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3$$ (общее решение)

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v\left(u' - \frac{3}{x}u\right) + uv' = x$$

Алгоритм решения линейного ДУ первого порядка

1. Приводят уравнение к виду $y' + P(x)y = Q(x)$

2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$
и подставляют эти выражения в уравнение.

3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.

4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.

5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$,

6. Если требуется найти частное решение , то определяют С из начальных условий и подставляют в общее решение.

Примеры

Решить уравнения:

1. $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2.$ Ответ: $y = 2\sqrt{1 - x}.$

2. $xy' - y = x^2 \cos x.$ Ответ: $y = x(\sin x + C).$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется линейным ДУ первого порядка?

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

2. При каких условиях линейное ДУ первого порядка называется однородным?

$$Q(x) = 0$$

3. К какому ДУ приводится линейное однородное уравнение ?

ДУ с разделяющимися переменными

4. Какими методами решается линейное неоднородное ДУ ?

Методы Бернулли, Лагранжа

5. В чем заключается метод Бернулли?

В подстановке $y = uv,$

Домашнее задание

1. Решить линейное ДУ первого порядка

$$y' + \frac{2y}{x} = x^2, x \neq 0$$

2. Решить задачу Коши для линейного ДУ первого порядка

$$y' - ytgx = \frac{1}{\cos^3 x}; y(0) = 0$$

Спасибо за внимание