

# Линейные неравенства

Линейным неравенством с одной переменной  $x$  называют неравенства вида  $ax+b>0$  (вместо знака  $>$  может быть, разумеется, любой другой знак неравенства), где  $a$  и  $b$  - действительные числа ( $a \neq 0$ )

# правило

- **Правило 1.** Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знака неравенства.
- **Правило 2.** Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже положительное число, не меняя при этом знака неравенства.
- **Правило 3.** Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный ( $<на>$ ,  $\leqна\geq$ ).

## пример

Решить неравенство  $\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15}$

Решение: Умножим

Обе части неравенства на положительное число 15, оставив знак неравенства без изменения (правило 2). Это позволит нам освободиться от знаменателей, т.е. перейти к более простому неравенству, равносильному данному:

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right);$$

$$5x + 3(2x-1) > 30x - 1;$$

$$11x - 3 > 30x - 1$$

Воспользовавшись правилом 1 решения неравенств, перенесем член  $30x$  из правой части неравенства в левую, а член  $-3$  – из левой части в правую (с противоположными знаками). Получим:

$$11x - 30x > -1 + 3;$$

$$-17x > 2.$$

Наконец, применив правило 3, получим:

$$x < -\frac{2}{17}$$

# Квадратные неравенства

Квадратным неравенством с одной переменной  $x$  называют неравенство вида  $ax^2+bx+c>0$ , где  $a, b, c$  – действительные числа (кроме  $a=0$ ).

# правило

**Правило 1.** Если квадратный трехчлен  $ax^2+bx+c$  не имеет корней (т.е. его дискриминант  $D$ -отрицательное число) и если при этом  $a>0$ , то при всех значениях  $x$  выполняется неравенство

$$ax^2+bx+c>0.$$

Иными словами, если  $D<0, a>0$ , то неравенство  $ax^2+bx+c>0$  выполняется при всех  $x$ ; напротив, неравенство  $ax^2+bx+c\leq 0$  в этом случае не имеет решений.

# Правило

**Правило 2.** Если квадратный трехчлен  $ax^2+bx+c$  не имеет корней (т.е. его дискриминант  $D$ -отрицательное число) и если при этом  $a < 0$ , то при всех значениях  $x$  выполняется неравенство

$$ax^2+bx+c < 0.$$

Иначе говоря, если  $D < 0, a < 0$ , то неравенство  $ax^2+bx+c < 0$  выполняется при всех  $x$ ; напротив, неравенство  $ax^2+bx+c \geq 0$  в этом случае не имеет решений.

эти утверждения-частные случаи следующей теоремы.

# Теорема

- Если квадратный трехчлен  $ax^2+bx+c$  имеет отрицательный дискриминант, то при любом  $x$  значение трехчлена имеет знак старшего коэффициента  $a$ .

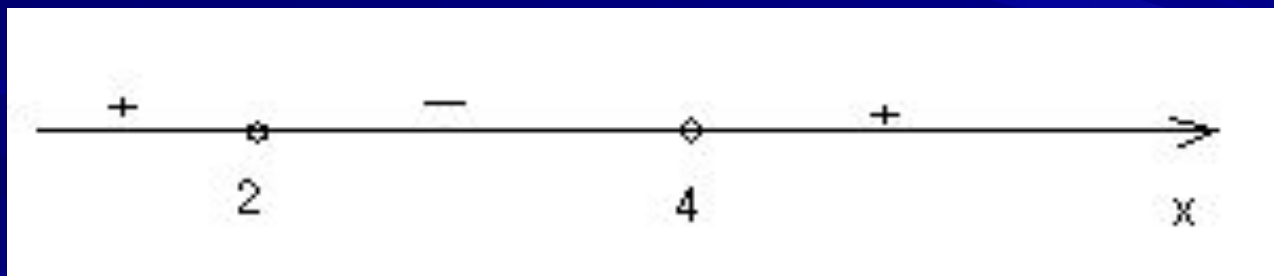


# Пример

Решить неравенство  $x^2-6x+8>0$ .

Решение: Разложим квадратный трехчлен  $x^2-6x+8$  на линейные множители. Корням трехчлена являются числа 2 и 4. Воспользовавшись известной из курса алгебры формулой  $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ , получим:  $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$ .

Отметим на числовой прямой корни трехчлена: 2 и 4. (рисунок). Выясним, когда произведение  $(x-2)(x-4)$  Положительно, а когда отрицательно.



Если  $x > 4$ , то  $x - 2 > 0$  и  $x - 4 > 0$ , значит,  $(x - 2)(x - 4) > 0$ . Если  $2 < x < 4$ , то  $x - 2 > 0$ , а  $x - 4 < 0$ , значит,  $(x - 2)(x - 4) < 0$ . Если, наконец,  $x < 2$ , то и  $x - 2 < 0$ , и  $x - 4 < 0$ , а потому  $(x - 2)(x - 4) > 0$ . Нас интересует все те значения переменной  $x$ , при которых данный квадратный трехчлен  $x^2 - 6x + 8$  принимает положительные значения. Это имеет место на двух открытых лучах  $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Ответ:  $x < 2; x > 4$ .

Метод рассуждений, который мы применили в примере, называют обычно методом интервалов (или методом промежутков). Он активно используется в математике для решений рациональных неравенств.

# Рациональные неравенства

Рациональное неравенство с одной переменной  $x$  - это неравенство вида  $h(x) > q(x)$ , где  $h(x)$  и  $q(x)$  – рациональные выражения, т.е. алгебраические выражения, составленные из числа и переменной  $x$  с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень. Разумеется, переменная может быть обозначена любой другой буквой.

# Правило

При решении рациональных неравенств используются те правила, которые были сформулированы в предыдущих слайдах. С помощью этих правил обычно преобразуют заданное рациональное неравенство к виду  $f(x) > 0 (< 0)$ , где  $f(x)$  - алгебраическая дробь (или многочлен). Далее разлагают числитель и знаменатель дроби  $f(x)$  на множители вида  $x - a$  (если, конечно, это возможно) и применяют метод интервалов, которые мы уже упоминали и подробнее покажем на примере.

# Пример

Решить неравенство:  $(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0$ .

**Решение:** Извлечем необходимую информацию из рисунка,

но с двумя изменениями. Во-первых, поскольку нас интересует, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $f(x) < 0$ , нам придется выбрать промежутки  $(-\infty; -1)$  и  $(1; 2)$

Во-вторых, нас устраивают и те точки, в которых выполняется равенство  $f(x) = 0$ . Это точки  $-1, 1, 2$ , отметим их на рисунке темными кружочками и включим в ответ. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

Ответ:  $x \leq -1; 1 \leq x \leq 2$

