Линейные неравенства

Линейным неравенством с одной переменной x называют неравенства вида $ax+b>0$ (вместо знака > может быть, разумеется,любой другой знак неравенства),где a и b - действительные числа ($a\neq 0$)

правило

- Правило 1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком,не меняя при этом знака неравенства.
- Правило 2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже положительное число,не меняя при этом знака неравенства.
- Правило 3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже отрицательное число,изменив при этом знак неравенства на противоположный (<на>,≤на≥).

пример

Решить неравенство $\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}>2x-\frac{1}{15}$

Решение:Умножим

Обе части неравенства на положительное число 15,оставив знак неравенства без изменения (правило 2).Это позволит нам освободиться от знаменателей,т.е. перейти к более простому неравенству, равносильному данному:

$$15\left(\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}\right)>15\left(2x-\frac{1}{15}\right);$$

$$5x+3(2x-1)>30x-1;$$

$$11x-3>30x-1$$

Воспользовавшись правилом 1 решения неравенств, перенесем член 30х из правой части неравенства в левую,а член -3 –из левой части в правую (с противоположными знаками).Получим:

$$11x-30x>-1+3;$$

$$-17x>2.$$

Наконец, применив правило 3,получим:

$$x < -\frac{2}{17}$$

Квадратные неравенства

Квадратным неравенством с одной переменной х называют неравенство вида $ax^2+bx+c>0$,где a,b,c –действительные числа (кроме a=0).

правило

Правило 1.Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней (т.е. его дискриминант D-отрицательное число)и если при этом $a>0$,то при всех значениях x выполняется неравенство

$$ax^2+bx+c>0.$$

Иными словами, если $D<0, a>0$,то неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2+bx+c\leq 0$ в этом случае не имеет решений.

Правило

Правило 2.Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней (т.е. его дискриминант D-отрицательное число)и если при этом $a<0$,то при всех значениях x выполняется неравенство

$$ax^2+bx+c<0.$$

Иначе говоря, если $D<0, a<0$,то неравенство $ax^2+bx+c<0$ выполняется при всех x; напротив,неравенство $ax^2+bx+c\geq 0$ в этом случае не имеет решений.

эти утверждения-частные случаи следующей теоремы.

Теорема

- Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет отрицательный дискриминант, то при любом x значение трехчлена имеет знак старшего коэффициента a.

Пример

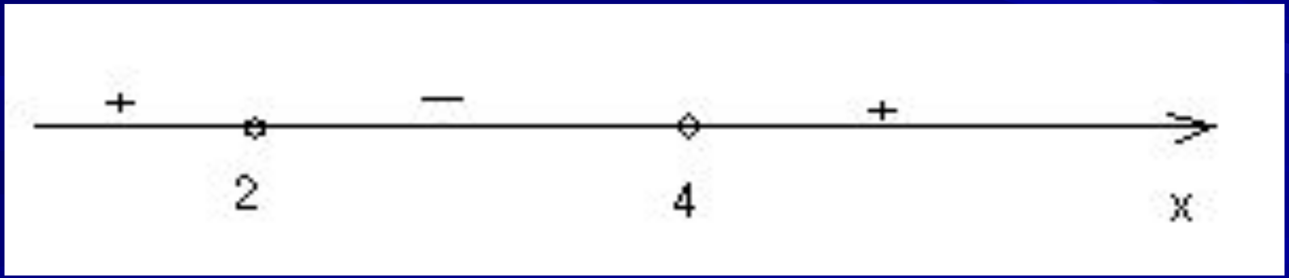
Решить неравенство $x^2-6x+8>0$.

Решение: Разложим квадратный трехчлен x^2-6x+8 на линейные множители. Корням трехчлена являются числа 2 и 4.Воспользовавшись известной из курса алгебры для 8-го формулой $ax^2+bx+c= a(x-x1)(x-x2)$, получим: $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$.

Отметим на числовой прямой корни трехчлена:2 и 4.

(рисунок). Выясним, когда произведение (x-2)(x-4)

Положительно, а когда отрицательно.



Если $x>4$,то $x-2>0$ и $x-4>0$,значит,$(x-2)(x-4)>0$.Если $2<x<4$.то $x-2>0$,а $x-4<0$,значит,$(x-2)(x-4)<0$.Если,наконец,$x<2$,то и $x-2>0$,и $x-4<0$,а потому $(x-2)(x-4)>0$.Нас интересует все те значения переменной x, при которых данный квадратный трехчлен x^2-6x+8 принимает положительные значения.Это имеет место на двух открытых лучах $(-\infty;2)(4;+\infty)$

Ответ: $x<2;x>4$.

Метод рассуждений, который мы применили в примере, называют обычно методом интервалов (или методом промежутков).Он активно используется в математике для решений рациональных неравенств.

Рациональные неравенства

Рациональное неравенство с одной переменной x -это неравенство вида $h(x)>q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ –рациональные выражения, т.е. алгебраические выражения, составленые из числа и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень. Разумеется, переменная может быть обозначена любой другой буквой.

Правило

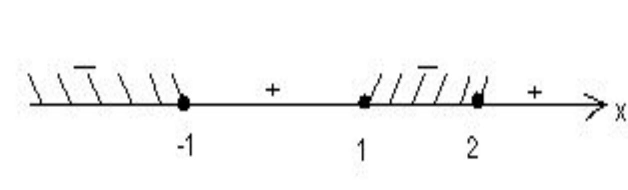
При решении рациональных неравенств используются те правила, которые были сформулированы в предыдущих слайдов. С помощью этих правил обычно преобразуют заданное рациональное неравенство к виду $f(x)>0(<0)$,где $f(x)$-алгебраическая дробь (или многочлен).Далее разлагают числитель и знаменатель дроби $f(x)$ на множители вида $x-a$ (если, конечно, это возможно) и применяют метод интервалов, которые мы уже упоминали и подробнее покажем на примере.

Пример

Решить неравенство: (x-1)(x+1)(x-2)≤0.

Решение: Извлечем необходимую информацию из рисунка,

но с двумя изменениями. Во-первых, поскольку нас интересует, при каких значениях x выполняется неравенство f(x)<0,нам придется выбрать промежутки $(-\infty;-1)u(1;2)$



Во-вторых, нас устраивают и те точки, в которых выполняется равенство f(x)=0.Это точки -1,1,2 , отметим их на рисунке темными кружочками и включим в ответ. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

Ответ: x ≤-1; 1≤ x ≤2