

# *Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами*

## Лекция 6

# Вывод формул общего решения ЛОУ 2-го порядка

Корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

**Случай 1.** Если  $\frac{p^2}{4} - q > 0$ , то характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня  $k_1 \neq k_2 \in R$ . В этом случае общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

# Продолжение

**Случай 2.** Если  $\frac{p^2}{4} - q = 0$ , то характеристическое уравнение имеет одинаковые корни  $k_1 = k_2 = k$ .

Частные решения ЛОУ выбираем так, чтобы они были линейно независимыми:

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{и} \quad y_2 = xe^{kx}.$$

Общее решение ЛОУ 2-го порядка будет иметь вид  $y = e^{kx}(C_1 + xC_2)$ .

# Продолжение

**Случай 3.** Если  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , то характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$$k_1 = \alpha + \beta i \quad \text{и} \quad k_2 = \alpha - \beta i, \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{p}{2}$$

$$\text{и} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Общее решение ЛОУ 2-го порядка в действительной форме можно записать

$$\text{в виде} \quad y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

## Общее решение ЛОУ 2-го порядка в зависимости от корней характеристического уравнения

1. Если  $k_1 \neq k_2 \in R$ , то  $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2. Если  $k_1 = k_2 = k$ , то  $y = e^x (C_1 + x C_2)$

3. Если  $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

4. Если  $k_{1,2} = \pm \beta i$ , то

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

# Пример

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 12y = 0$$

Составим характеристическое уравнение  $y'' + y' - 12y = 0$ . Его корни действительны и различны:  $k_1 = -4, k_2 = 3$ . Поэтому общее решение

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}$$

# Пример

Решить уравнение  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

имеет два кратных корня  $k_{1,2} = -2$ ,

поэтому искомое общее решение

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2x).$$

# Пример

Решить уравнение  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

Составим характеристическое уравнение  $k^2 + 4k + 13 = 0$ . Корни этого уравнения  $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3i$  комплексно-сопряженные. Общее решение исходного уравнения:

$$y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) \quad .$$



# Теорема о структуре общего решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Общее решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где  $p$  и  $q$  постоянные, а  $f(x) \neq 0$ ,  
равно сумме общего решения  
однородного уравнения  $y'' + py' + qy = 0$   
и какого-нибудь частного решения  
неоднородного уравнения, т. е.

$$y = y_0 + \tilde{y}.$$

# Подбор частного решения ЛНДУ по виду правой части методом неопределенных коэффициентов

1. Пусть  $f(x) = ae^{mx}$ . Тогда частное решение ищут в виде:

а) если  $k_1 \neq m$ ,  $k_2 \neq m$ , то  $\tilde{y} = Ae^{mx}$

б) если  $k_1 = m$ ,  $k_2 \neq m$ , то  $\tilde{y} = xAe^{mx}$

в) если  $k_1 = m$ ,  $k_2 = m$ , то  $\tilde{y} = x^2 Ae^{mx}$

# Продолжение

2. Пусть  $f(x) = P_n(x) \cdot e^{mx}$ , где  $P_n(x)$  - заданный многочлен. Тогда частное решение уравнения ищут в виде:

а) если  $k_1 \neq m, k_2 \neq m$ , то  $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{mx}$

б) если  $k_1 = m, k_2 \neq m$ , то  $\tilde{y} = xQ_n(x) \cdot e^{mx}$

в) если  $k_1 = k_2 = m$  то  $\tilde{y} = x^2 Q_n(x) \cdot e^{mx}$

где  $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$  - многочлен с неопределенными коэффициентами.

# В правой части уравнения- многочлен

1. Пусть  $f(x) = P_n(x)$ , где  $P_n(x)$  - заданный многочлен. Это частный случай  $f(x) = P_n(x) \cdot e^{mx}$  при  $m=0$ . Тогда

а) если  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ , то  $\tilde{y} = Q_n(x)$ ;

б) если  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ , то  $\tilde{y} = xQ_n(x)$ ;

в) если  $k_1 = k_2 = 0$ , то  $\tilde{y} = x^2Q_n(x)$ .

## ***В правой части уравнения- тригонометрический полином***

5. Пусть  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$

где степени многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  вообще говоря различны. Тогда

а) если  $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$ , то частное решение ищут в виде

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} (T_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x)$$

где степени многочленов  $T_l(x)$  и  $R_l(x)$  равны  $l = \max(n, m)$ .

## Продолжение

б)если  $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , то частное решение ищут в виде:

$$\tilde{y} = xe^{\alpha x} (T_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x)$$

**Пример:** указать вид частного решения уравнения  $y'' + 2y' + 5y = xe^{-x} \sin 2x$ .

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \text{ имеет: } D = -16 \text{ и корни}$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i, \text{ а решение имеет вид}$$

$$\tilde{y} = xe^{-x} ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x)$$

Решить уравнение  $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$  .

$k^2 + 3k + 2 = 0$  . Корни этого уравнения

$k_1 = -1, k_2 = -2$  действительны и различны, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид  $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$  .

Составим частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:  $f(x) = 3e^{2x}$  .

# Продолжение

Среди корней характеристического уравнения нет равных числу  $m = 2$ .

Поэтому ищем  $\tilde{y}$  в виде:  $\tilde{y} = Ae^{2x}$ , где  $A$  – неопределенный коэффициент.

$\tilde{y}' = Ae^{2x} \cdot 2$ ,  $\tilde{y}'' = Ae^{2x} \cdot 2^2$ . Подставим

$\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$  в уравнение. Имеем

$4Ae^{2x} + 3A \cdot 2e^{2x} + 2Ae^{2x} = 3e^{2x}$ . Далее имеем  $12A = 3$  и  $A = 1/4$ .

$$\tilde{y} = \frac{1}{4}e^{2x}, \quad y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$