О мир, пойми! Певцом –во сне – открыты
Закон звезды и формула цветка.
М. Цветаева.

- Математика дает универсальные инструменты для изучения связей, зависимостей между различными величинами. Её изучение делает шире и богаче наши возможности математического описания окружающего мира.

Муниципальное
Общеобразовательное
Учреждение
«Средняя
Общеобразовательная
Школа №236 г.Знаменск»

Исследовательская работа по теме «Линейные уравнения с параметром»

Работу выполнили ученицы 9 «А» класса:
Харламова Анастасия и Сафина Алина

Научный руководитель: учитель математики Потапова Е.А.

Цель работы:

- 1)Ввести понятия:

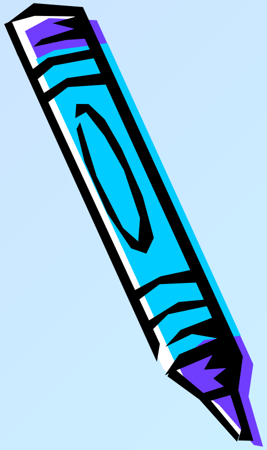
    а) параметр;

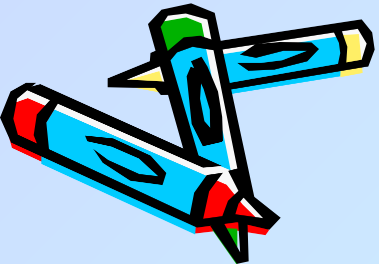
    б) уравнения с параметрами;

    в) системы допустимых значений параметров;

    г) равносильность для уравнений с параметрами.

- 2)Рассмотреть общие принципы для решения линейных уравнений с параметрами.





Основные определения.

- Рассмотрим уравнения вида: $f(a,b,c...,k,x)=0$, где $a,b,c,...,k,x$ – переменные.

Переменные $a,b,c,...k$, которые при решения уравнения считаются постоянными, называются параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.

- Параметры договорились обозначать первыми буквами латинского алфавита $a,b,c,...k$, а неизвестные x, y, z. Исследовать и решить уравнение с параметрами – это значит:
- 1.Найти все системы значений параметров, при которых данное уравнение имеет решение.
- 2. Найти все решения для каждой найденной системы значений параметров, то есть для неизвестного и параметра должны быть указаны свои области допустимых значений.

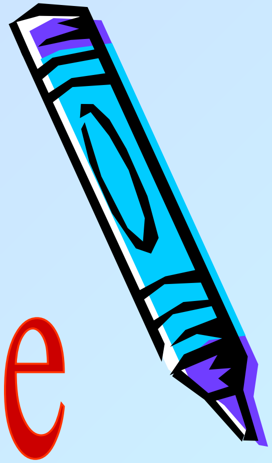
- В процессе решения существенную роль играет теорема о равносильности.

• <u>*Теорема.*</u>

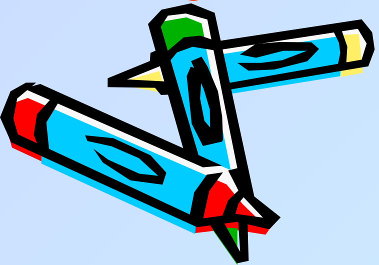
Два уравнения, содержащие одни и те же параметры, называют равносильными, если: они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров; каждое решение первого уравнения является решением второго и наоборот.

• <u>Определение</u>

Система значений параметров $a = a_0, b = b_0, c = c_0, \ldots k = k_0$, при которых левая и правая части неравенства имеют смысл в области действительных чисел, называют системой допустимых значений параметров.



Простейшие линейные уравнения с параметрами



- Определение: Уравнение вида $Ax - B = 0$

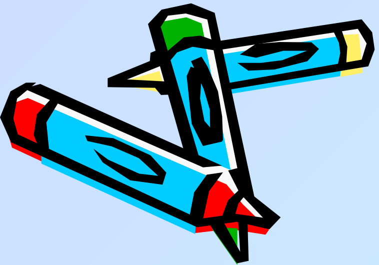
где A, B - выражения, зависящие от параметров,

$x -$ переменная, называют линейным.

- Перепишем уравнение в виде: **Ax=B**

Ax=B

- Возможны три случая:
- 1) Если A=B=0, то уравнение примет вид: 0x=0.При любом значении x это равенство верно. Значит уравнение имеет бесчисленное множество корней, x– любое число.
- 2)Если A=0,B $\neq 0$, то уравнение примет вид 0x=B. Корней нет.
- 3) Если A $\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень: $x = \dfrac{B}{A}$



Пример 1:Исследовать и решить уравнение с параметром:

$$(a-1)\ (a-2)x = a-1$$

- 1)При a=1 уравнение примет вид: 0x=0.Это равенство верно при любом x, значит x $\in (-\infty;+\infty)$
- 2) При a=2 уравнение примет вид 0x=1. Корней нет.

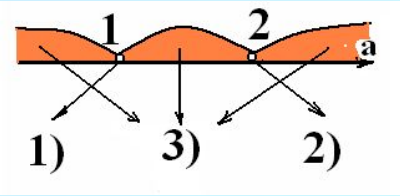
- 3) При $a \neq 1$ и $a \neq 2$ уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{a-2}$$

Ответ: 1).При a=1, x- любое число,
2).При a=2, решений нет,
3).При $a \neq 1$ и $a \neq 2$,

$$x = \frac{1}{a-2}$$

Графическая иллюстрация исследования по параметру a:



Пример 2. Решить уравнение с параметром:

$$(a^2-2a+1)x=a^2+2a-3$$

- Разложим на множители левую и правую часть уравнения. Получим:
  $$(a-1)^2x=(a-1)(a+3)$$

- 1) Если а=1, то уравнение примет вид: 0х=0. Уравнение имеет бесчисленное множество корней. x $\in(-\infty;+\infty)$

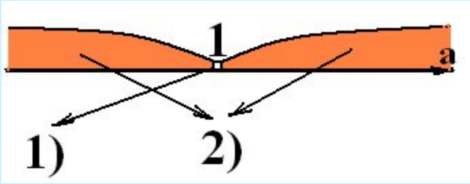
- 2)Если $a\neq1$, то уравнение имеет один корень

$$x=\frac{(a-1)(a+3)}{(a-1)^2}$$ или $$x=\frac{a+3}{a-1}$$

Ответ: 1).При а=1, х- любое число,

2).При $a\neq1,\quad x=\frac{a+3}{a-1}$.

Графическая иллюстрация исследования по параметру а:



- **Исследовать и решить уравнения с параметром.**

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\frac{3m-11}{m-1}=\frac{2x+7}{x+3}$$

$$OOY:\begin{cases} m\neq 1 \\ x\neq -3 \end{cases}$$

- Данное уравнение равносильно с учетом D(y):

$$3mx-5+(3m-11)(x+3)=(2x+7)(m-1)$$

$$3mx-5+3mx-11x+9m-33=2xm+7m-2x-7$$

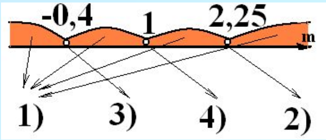
$(4m-9)x=31-2m$ -канонический вид линейного уравнения с параметром, наиболее удобный для исследования.

а) Если $\begin{cases} m\neq 2{,}25 \\ m\neq 1 \end{cases}$, то существует единственное решение: $x=\frac{31-2m}{4m-9}$

б) Выясним, при каких значениях параметра m x=-3. $\frac{31-2m}{4m-9}=-3,$

$31-2m=-12m+27,\quad 10m=-4,\quad m=-0{,}4,$ то есть, при m=-0,4 $x\notin OOY$

в) Если m=2,25, то 0x=26,5, следовательно, решений нет.



Графическая иллюстрация исследования по параметру а:

Ответ: 1)При $\begin{cases} m\neq 2{,}25 \\ m\neq -0{,}4 \\ m\neq 1 \end{cases}$ единственное решение $x=\frac{31-2m}{4m-9}$.

2)При m=2,25 $x\in\varnothing$

3) При m=-0,4 $x\in\varnothing$

4) При m=1 уравнение не определено или не имеет смысла.

Тренировочные упражнения.

- Решить и исследовать уравнения с параметром:

1). $$m=\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m(x-1)}$$

2). $$\frac{t^2+3}{t+1}=\frac{t+3}{t(x-4)}-\frac{4t}{t+1}$$

3). $$\frac{x-3m}{x^2-9}-\frac{2m+3}{x+3}=\frac{m-5}{x-3}$$

4). $$m+2+\frac{2-m}{x+2}=\frac{8}{m}$$

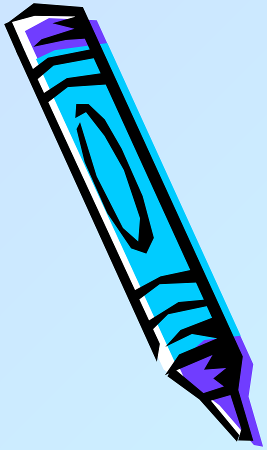
5). $$m+\frac{m-8}{m+1}=\frac{3(m+4)}{x+3}$$

6). $$\frac{3mx-5}{(m+2)(x^2-9)}=\frac{2m+1}{(m+2)(x-3)}-\frac{5}{x+3}$$

7). $$\frac{m+1}{m(x+2)}-\frac{2}{x+3}=\frac{mx+5}{m(x^2+5x+6)}$$

Вывод:

- Необходимость рассматривать уравнения с буквенными коэффициентами возникает часто. Прежде всего это полезно тогда, когда формулируются некоторые общие свойства, присущие не одному конкретному уравнению, а целому классу уравнений. Разумеется, то, что в уравнении одни буквы мы считаем неизвестными, а другие – параметрами, в значительной степени условно. В реальной практике из одного и того же соотношения между переменными приходится выражать одни переменные через другие, то есть решать уравнение относительно одной буквы, считая ее обозначением неизвестного, а другие буквы параметрами.



- При решении уравнений с параметрами чаще всего встречаются две задачи:

1) Найти формулу для решения уравнения;

2) Исследовать решения уравнения в зависимости от изменения значений параметров.

- В простейших случаях, как мы убедились, решение уравнения с одним неизвестным распадается на два шага –преобразование уравнения к стандартному и решение стандартного уравнения.

- Исследование линейного уравнения с параметром - это первый шаг в познании методов исследования систем линейных уравнений с большим количеством неизвестных, которые имеют широкое применение на практике.

- Так, в задачах математической экономики можно найти системы, состоящие из нескольких сотен уравнений с таким же примерно числом неизвестных. Для их решения разработаны мощные машинные методы. Основную роль при этом играют компактные способы записи систем и их преобразований. Представьте себе: система из тысячи уравнений с тысячью неизвестными содержит миллион коэффициентов.

- Мы пока стоим на пороге познания методов исследования реальных процессов. Математика дает нам универсальные методы для будущей профессиональной работы в области ЭКОНОМИКИ.

Источник знаний:

«Уравнения и неравенства с параметром» А.Х.Шахмейстер. С.-Петербург. 2004.

«Алгебра и начала анализа» М.И.Башмаков. Москва. «Просвещение». 1992.

«Практикум по элементарной математике». Алгебра. В.Н.Литвиненко, А.Г.Мордкович.