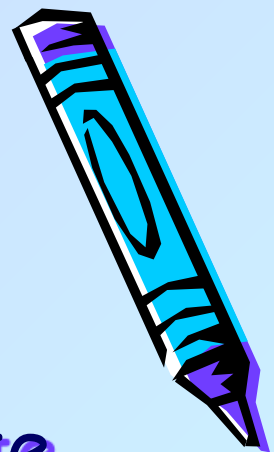
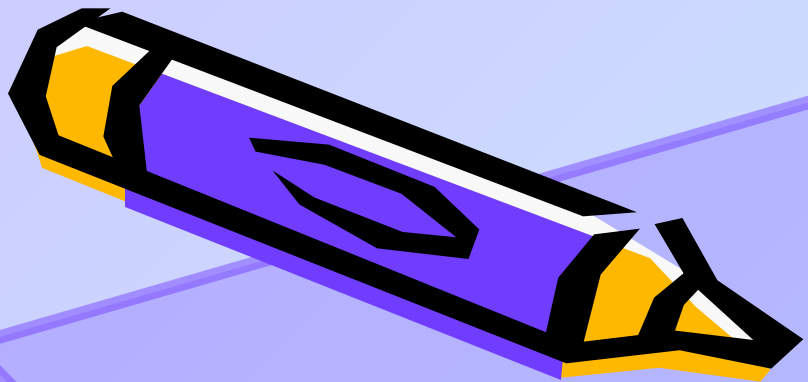


О мир, пойми! Певцом – во сне –
открыты

Закон звезды и формула цветка.
М. Цветаева.

- Математика дает универсальные инструменты для изучения связей, зависимостей между различными величинами. Её изучение делает шире и богаче наши возможности математического описания окружающего мира.





Муниципальное
Общеобразовательное
Учреждение
«Средняя
Общеобразовательная
Школа №236 г.Знаменск»

**Исследовательская работа
по теме
«Линейные уравнения
с параметром»**

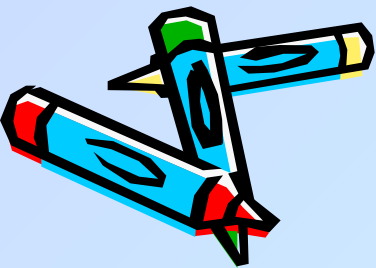
Работу выполнили ученицы 9 «А» класса:
Харламова Анастасия и Сафина Алина

Научный руководитель: учитель
математики Потапова Е.А.

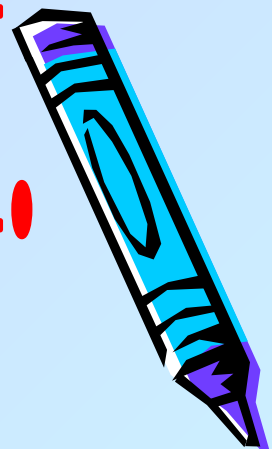


Цель работы:

- 1) Ввести понятия:
 - а) параметр;
 - б) уравнения с параметрами;
 - в) системы допустимых значений параметров;
 - г) равносильность для уравнений с параметрами.
- 2) Рассмотреть общие принципы для решения линейных уравнений с параметрами.



ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.



- Рассмотрим уравнения вида: $f(a, b, c, \dots, k, x) = 0$, где a, b, c, \dots, k, x – переменные.

Переменные a, b, c, \dots, k , которые при решения уравнения считаются постоянными, называются параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры.

- Параметры договорились обозначать первыми буквами латинского алфавита a, b, c, \dots, k , а неизвестные x, y, z . Исследовать и решить уравнение с параметрами – это значит:
 - 1. Найти все системы значений параметров, при которых данное уравнение имеет решение.
 - 2. Найти все решения для каждой найденной системы значений параметров, то есть для неизвестного и параметра должны быть указаны свои области допустимых значений.



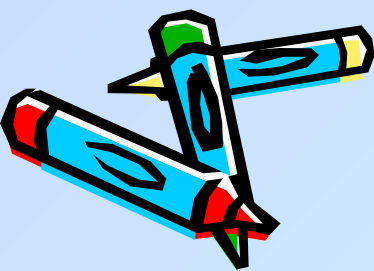
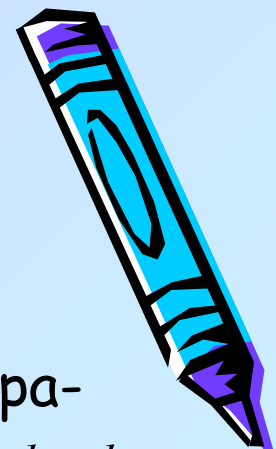
- В процессе решения существенную роль играет теорема о равносильности.

• Теорема.

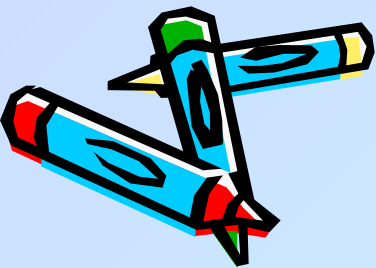
Два уравнения, содержащие одни и те же параметры, называют равносильными, если: они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров; каждое решение первого уравнения является решением второго и наоборот.

• Определение

Система значений параметров $a = a_0, b = b_0, c = c_0, \dots, k = k_0$, при которых левая и правая части неравенства имеют смысл в области действительных чисел, называют системой допустимых значений параметров.



Простейшие линейные уравнения с параметрами





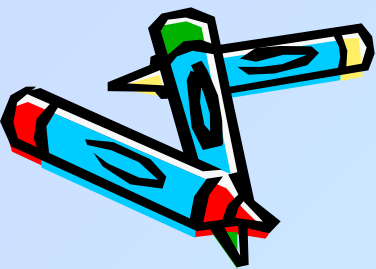
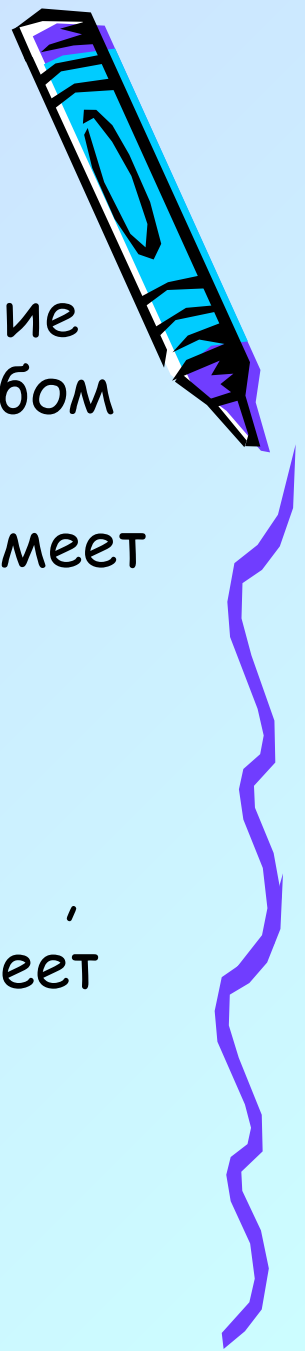
- Определение: Уравнение вида $Ax - B = 0$ где A, B - выражения, зависящие от параметров, x - переменная, называют линейным.

- Перепишем уравнение в виде: $Ax=B$



$Ax=B$

- Возможны три случая:
 - 1) Если $A=B=0$, то уравнение примет вид: $0x=0$. При любом значении x это равенство верно. Значит уравнение имеет бесчисленное множество корней, x - любое число.
 - 2) Если $A=0, B \neq 0$, то уравнение примет вид $0x=B$. Корней нет.
 - 3) Если $A \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{B}{A}$



Пример 1: Исследовать и решить уравнение с параметром:

$$(a - 1)(a - 2)x = a - 1$$

- 1) При $a=1$ уравнение примет вид: $0x=0$. Это равенство верно при любом x , значит $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) При $a=2$ уравнение примет вид $0x=1$. Корней нет.

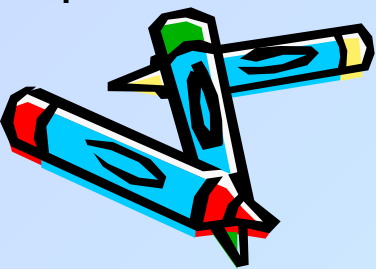
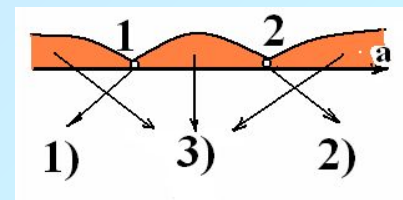
- 3) При $a \neq 1$ и $a \neq 2$ уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{a-2}$$

Ответ: 1). При $a=1$, x - любое число,
2). При $a=2$, решений нет,
3). При $a \neq 1$ и $a \neq 2$,

$$x = \frac{1}{a-2}$$

Графическая иллюстрация исследования по параметру a :



Пример 2. Решить уравнение с параметром:

$$(a^2 - 2a + 1)x = a^2 + 2a - 3$$

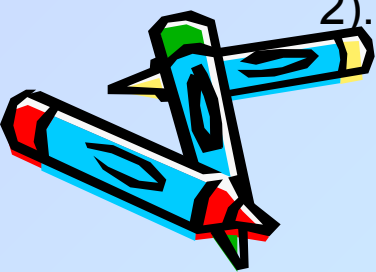
- Разложим на множители левую и правую часть уравнения. Получим:
 $(a - 1)^2 x = (a - 1)(a + 3)$
- 1) Если $a=1$, то уравнение примет вид: $0x=0$. Уравнение имеет бесчисленное множество корней. $x \in (-\infty; +\infty)$

- 2) Если $a \neq 1$, то уравнение имеет один корень

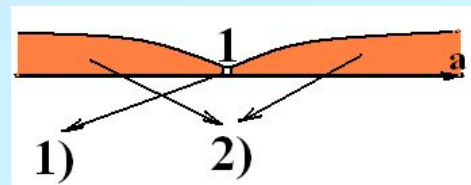
$$x = \frac{(a-1)(a+3)}{(a-1)^2} \quad \text{или} \quad x = \frac{a+3}{a-1}$$

Ответ: 1). При $a=1$, x - любое число,

2). При $a \neq 1$, $x = \frac{a+3}{a-1}$



Графическая иллюстрация исследования по параметру a :



• Исследовать и решить уравнения с параметром.

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3} \quad \text{ООУ: } \begin{cases} m \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

- Данное уравнение равносильно с учетом D(y):

$$3mx - 5 + (3m - 11)(x + 3) = (2x + 7)(m - 1)$$

$$3mx - 5 + 3mx - 11x + 9m - 33 = 2xm + 7m - 2x - 7$$

$(4m - 9)x = 31 - 2m$ - канонический вид линейного уравнения с параметром, наиболее удобный для исследования.

а) Если $\begin{cases} m \neq 2,25 \\ m \neq 1 \end{cases}$, то существует единственное решение: $x = \frac{31 - 2m}{4m - 9}$

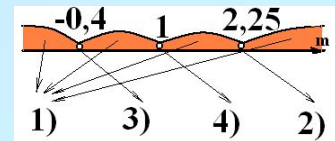
б) Выясним, при каких значениях параметра m $x = -3$.

$$\frac{31 - 2m}{4m - 9} = -3,$$

$31 - 2m = -12m + 27$, $10m = -4$, $m = -0,4$, то есть, при $m = -0,4$ $x \notin \text{ООУ}$

в) Если $m = 2,25$, то $0x = 26,5$, следовательно, решений нет.

Графическая иллюстрация исследования по параметру a :

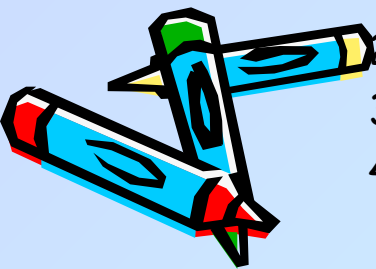
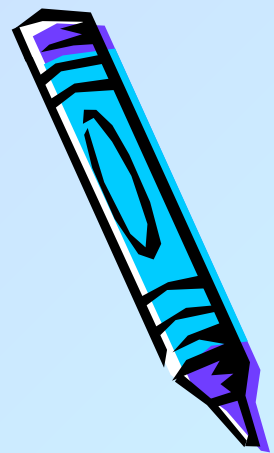


Ответ: 1) При $\begin{cases} m \neq 2,25 \\ m \neq -0,4 \\ m \neq 1 \end{cases}$ единственное решение $x = \frac{31 - 2m}{4m - 9}$.

2) При $m = 2,25$ $x \in \emptyset$

3) При $m = -0,4$ $x \in \emptyset$

4) При $m = 1$ уравнение не определено или не имеет смысла.



Тренировочные упражнения.

- Решить и исследовать уравнения с параметром:

$$1). \quad m = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m(x-1)}$$

$$2). \quad \frac{t^2+3}{t+1} = \frac{t+3}{t(x-4)} - \frac{4t}{t+1}$$

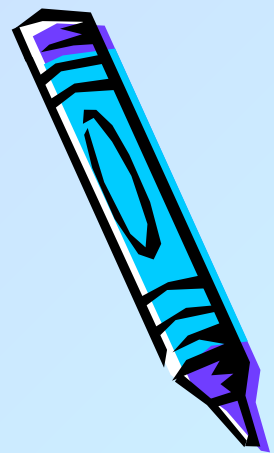
$$3). \quad \frac{x-3m}{x^2-9} - \frac{2m+3}{x+3} = \frac{m-5}{x-3}$$

$$4). \quad m+2 + \frac{2-m}{x+2} = \frac{8}{m}$$

$$5). \quad m + \frac{m-8}{m+1} = \frac{3(m+4)}{x+3}$$

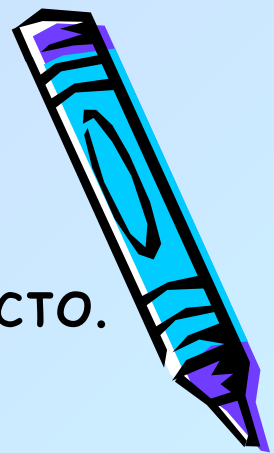
$$6). \quad \frac{3mx-5}{(m+2)(x^2-9)} = \frac{2m+1}{(m+2)(x-3)} - \frac{5}{x+3}$$

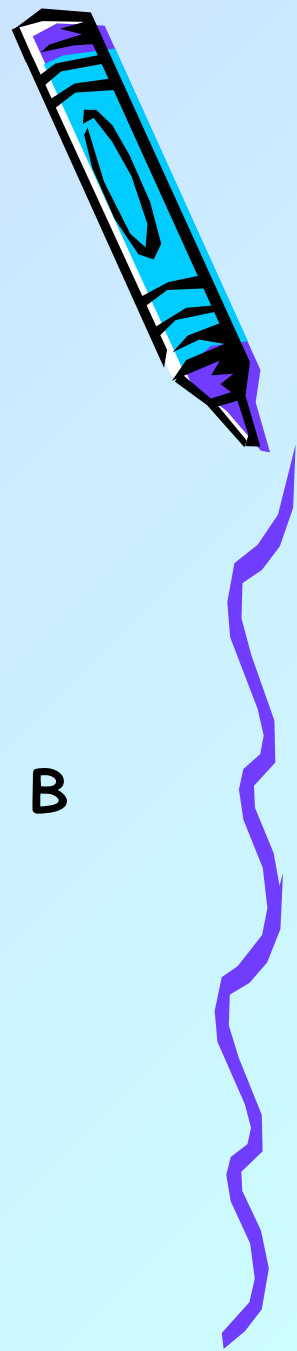
$$7). \quad \frac{m+1}{m(x+2)} - \frac{2}{x+3} = \frac{mx+5}{m(x^2+5x+6)}$$



Вывод:

- Необходимость рассматривать уравнения с буквенными коэффициентами возникает часто. Прежде всего это полезно тогда, когда формулируются некоторые общие свойства, присущие не одному конкретному уравнению, а целому классу уравнений. Разумеется, то, что в уравнении одни буквы мы считаем неизвестными, а другие - параметрами, в значительной степени условно. В реальной практике из одного и того же соотношения между переменными приходится выражать одни переменные через другие, то есть решать уравнение относительно одной буквы, считая ее обозначением неизвестного, а другие буквы параметрами.

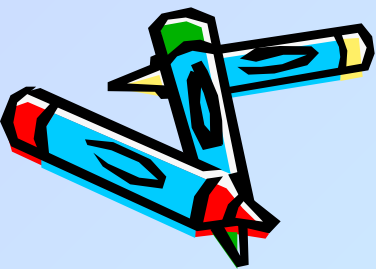




- При решении уравнений с параметрами чаще всего встречаются две задачи:

- 1) Найти формулу для решения уравнения;

- 2) Исследовать решения уравнения в зависимости от изменения значений параметров.

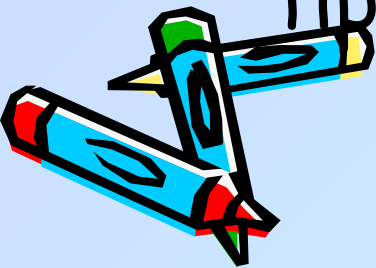




- В простейших случаях, как мы убедились, решение уравнения с одним неизвестным распадается на два шага - преобразование уравнения к стандартному и решение стандартного уравнения.

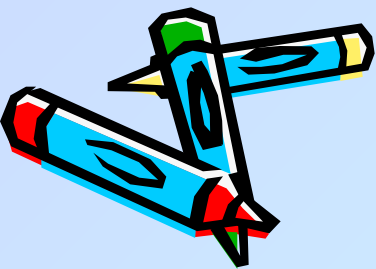


- Исследование линейного уравнения с параметром - это первый шаг в познании методов исследования систем линейных уравнений с большим количеством неизвестных, которые имеют широкое применение на практике.





- Так, в задачах математической экономики можно найти системы, состоящие из нескольких сотен уравнений с таким же примерно числом неизвестных. Для их решения разработаны мощные машинные методы. Основную роль при этом играют компактные способы записи систем и их преобразований. Представьте себе: система из тысячи уравнений с тысячью неизвестными содержит миллион коэффициентов.





- Мы пока стоим на пороге познания методов исследования реальных процессов. Математика дает нам универсальные методы для будущей профессиональной работы в области ЭКОНОМИКИ.



Источник знаний:

«Уравнения и неравенства с параметром»

А.Х.Шахмейстер. С.-Петербург. 2004.

«Алгебра и начала анализа»

М.И.Башмаков. Москва. «Просвещение». 1992.

«Практикум по элементарной математике».

Алгебра. В.Н.Литвиненко, А.Г.Мордкович.

