ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Работу выполнил:
Кудинов Виктор,
10 класс ГОУ СОШ №1266 г. Москвы.

Руководитель:
Хавжу Инна Сергеевна,
учитель математики

Логарифмические уравнения

Содержание:

При решении логарифмических уравнений и неравенств пользуются свойствами логарифмов, а также свойствами логарифмической функции

$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$:

1) Область определения: $x > 0$;

2) Область значений: $\boldsymbol{R}$;

3) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \quad x_1 = x_2$;

4) При $a>1$ функция $y=\log_a x$ возрастает, при $0 < a < 1$ функция $y=\log_a x$ убывает при всех $x > 0$, т.е.

$a > 1$ и $\log_a x_1 > \log_a x_2 \qquad x_1 > x_2$,

$0 < a < 1$ и $\log_a x_1 > \log_a x_2 \qquad x_1 < x_2$;

Основными методами решения логарифмических уравнений являются следующие:

- *решение уравнений на основании определения логарифма;*
- *метод потенцирования;*
- *приведение логарифмического уравнения к квадратному, заменой переменной;*
- *приведение логарифмов к одному основанию;*
- *решение уравнений логарифмированием обеих частей.*

Метод первый: *решение уравнений на основании определения логарифма*

$\log_{x+1}(2x^2+1)=2$

По определению логарифма имеем: $2x^2+1=(x+1)^2$,

$x^2-2x=0$ →

$x=2$ или $x=0$.

Проверка:

$x=0$ не может быть корнем данного уравнения, так как основание логарифма $x+1\neq1$.

При $x=2$ $\log_{2+1}(2\cdot2^2+1)=\log_3 9=2$.

Ответ: 2.

Метод второй: ***потенцирование***

$\log_5 x = \log_5 (6-x^2)$

Из равенства логарифмов следует:

$x = 6 - x^2$

$x = -3$ или $x = 2$.

Проверка:

$x = -3$ корнем уравнения быть не может, так как логарифмы отрицательных чисел не существуют.

$\text{Log}_5\, x = \log_5 2$,

$\log_5(6-x^2) = \log_5 (6-2^2) = \log_5 2$.

Ответ: 2.

Метод третий: ***приведение логарифмического уравнения к квадратному***

$\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$

$\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x$

$9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0.$

Пусть $\lg x = y$, тогда $9y^2 - 10y + 1 = 0$

$y = 1$ или $y = 1/9$

$\lg x = 1$ или $\lg x = 1/9$

$x = 10$ или $x = 10^{1/9}$.

Проверкой подтверждаем, что оба числа являются корнями.

Ответ: $10;\ 10^{1/9}$

Метод четвертый: ***приведение логарифмов к одному основанию***

$\log_{16}x+\log_4 x+ \log_2 x=7$

$(1/4)\log_2 x+ (1/2)\log_2 x+ \log_2 x=7$

$(7/4)\log_2 x=7$

$\log_2 x=4$

$x=16.$

Ответ: 16.

Метод пятый: ***логарифмирование обеих частей уравнения***

$x^{\lg x+2} = 1000$

Логарифмируя обе части уравнения ($x > 0$), получим:

$(\lg x+2)\cdot\lg x=\lg 1000$

$\lg^2 x+ 2\lg x- 3=0$

$\lg x=y$

$y^2 + 2y- 3=0$

$y=- 3$, $y=1$.

$\lg x=- 3$, $x=10^{-3}=0{,}001$;

$\lg x=1$, $x=10$

Выполнив проверку, убедимся, что оба найденных значения переменной являются корнями данного уравнения.

Ответ: 0,001; 10.

При решении логарифмических уравнений следует помнить:

- При переходах от логарифмических уравнений к уравнениям, не содержащим знака логарифма, следует учитывать область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения.
- Решение большинства логарифмических уравнений после некоторых преобразований сводится к решению логарифмического уравнения вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ или совокупности таких уравнений.

- При решении уравнений, содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$, выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть определена при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$. Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому при решении уравнения переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к появлению посторонних корней.

- Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать соответствующие ограничения или, получив корни, сделать проверку. Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов таит еще больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается и при решении уравнения можно потерять корни. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:
- $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, тогда

  $$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x);$$
- $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, тогда

  $$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a (- f(x)) + \log_a (-g(x)).$$

Немного истории:

Джон Непер

(англ. *John Napier*; 1550—1617) шотландский барон, математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц.

Используемая литература

С.М. Никольский , М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин «Алгебра и начала анализа для 10-11 классов», Москва, Просвещение, 2006

С.А. Шестаков «Книга для учителя к Сборнику заданий по алгебре и началам анализа для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы»

М.А. Куканов «Математика. 9-11 классы: решение заданий ЕГЭ высокой степени сложности. Основные методы и приемы», Волгоград, Учитель, 2009