

Логарифмическая функция

Содержание

1. Понятие логарифма.
2. Графики логарифмических функций.
3. Свойства логарифмов.
4. Решение логарифмических уравнений.
5. Решение логарифмических неравенств.

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую необходимо возвести число a , чтобы получить число b .

$$a \in (0;1) \cup (1;+\infty) \quad b \in (0;+\infty)$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Пример:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$



В зависимости от значения основания приняты два обозначения

1. Если основанием является 10, то вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.
2. Для введения следующего определения стоит понимать что за число e .

Число e есть предел, к которому стремится $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n . Т.е

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots$$

Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$.



**Из определения логарифма следует
следующее тождество:**

$$a^{\log_a b} = b$$

Можно выделить три формулы

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \log_a a^c = c$$

Примеры:

$$3^{\log_3 5} = 5 \quad \lg 1 = 0 \quad \ln e = 1$$



Графики логарифмических функции

1. $y = \lg x$

2. $y = \ln x$

3. $y = \log_a x, a > 1$

4. $y = \log_a x, 0 < a < 1$

5. Свойства функции.

График функции $y = \lg x$

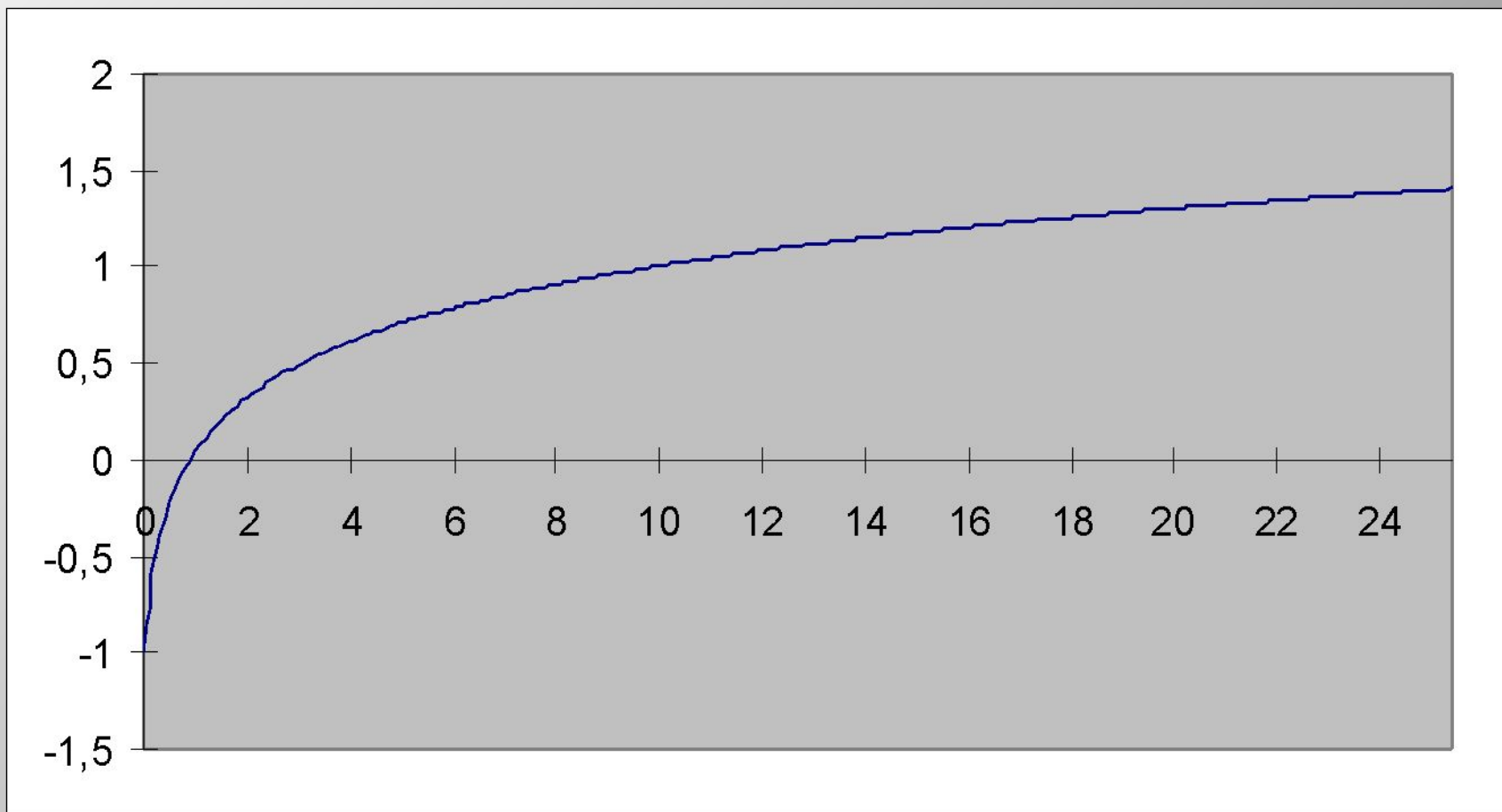


График функции $y = \ln x$

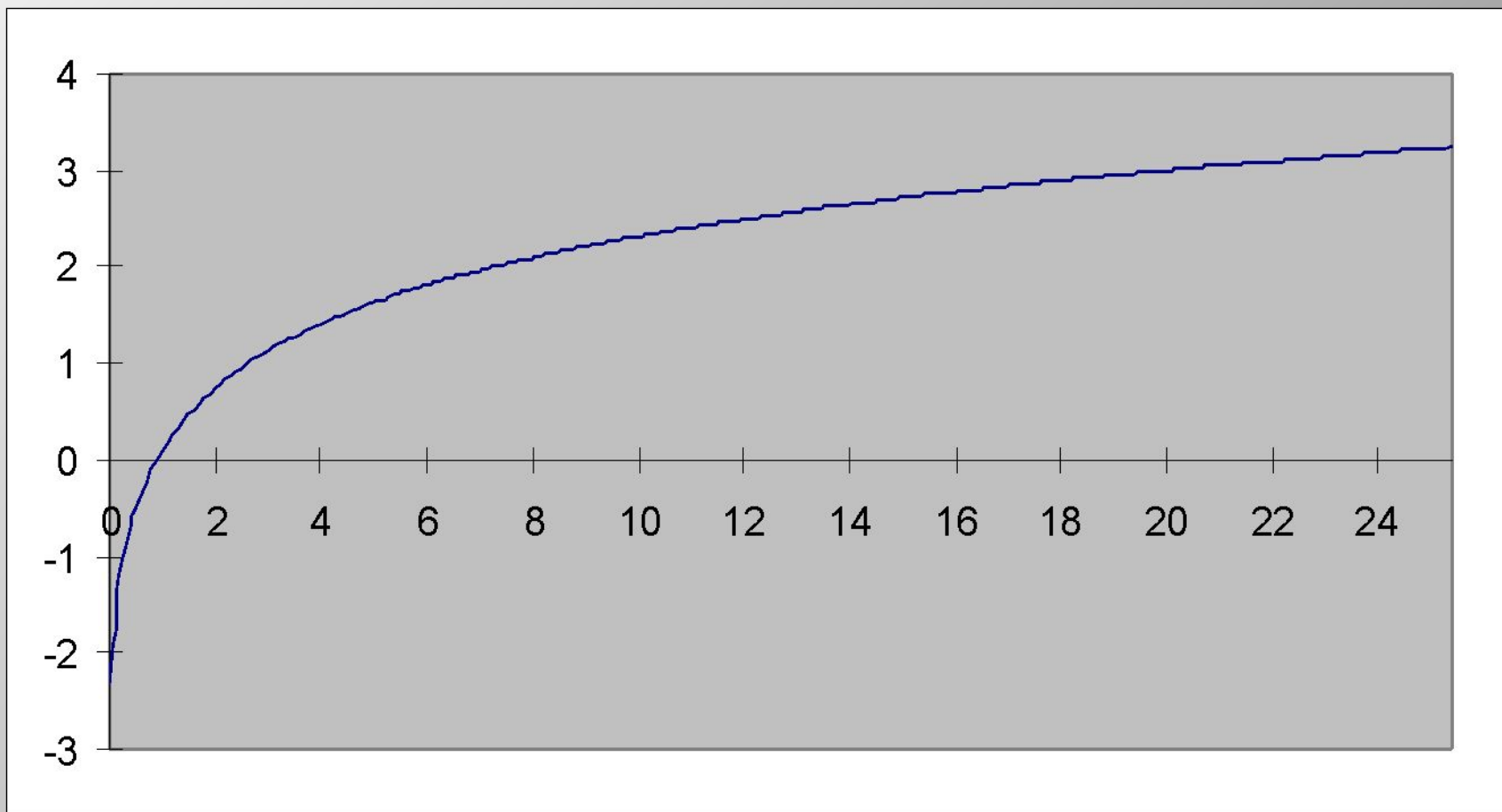


График функции $y = \log_a x$ $a > 1$

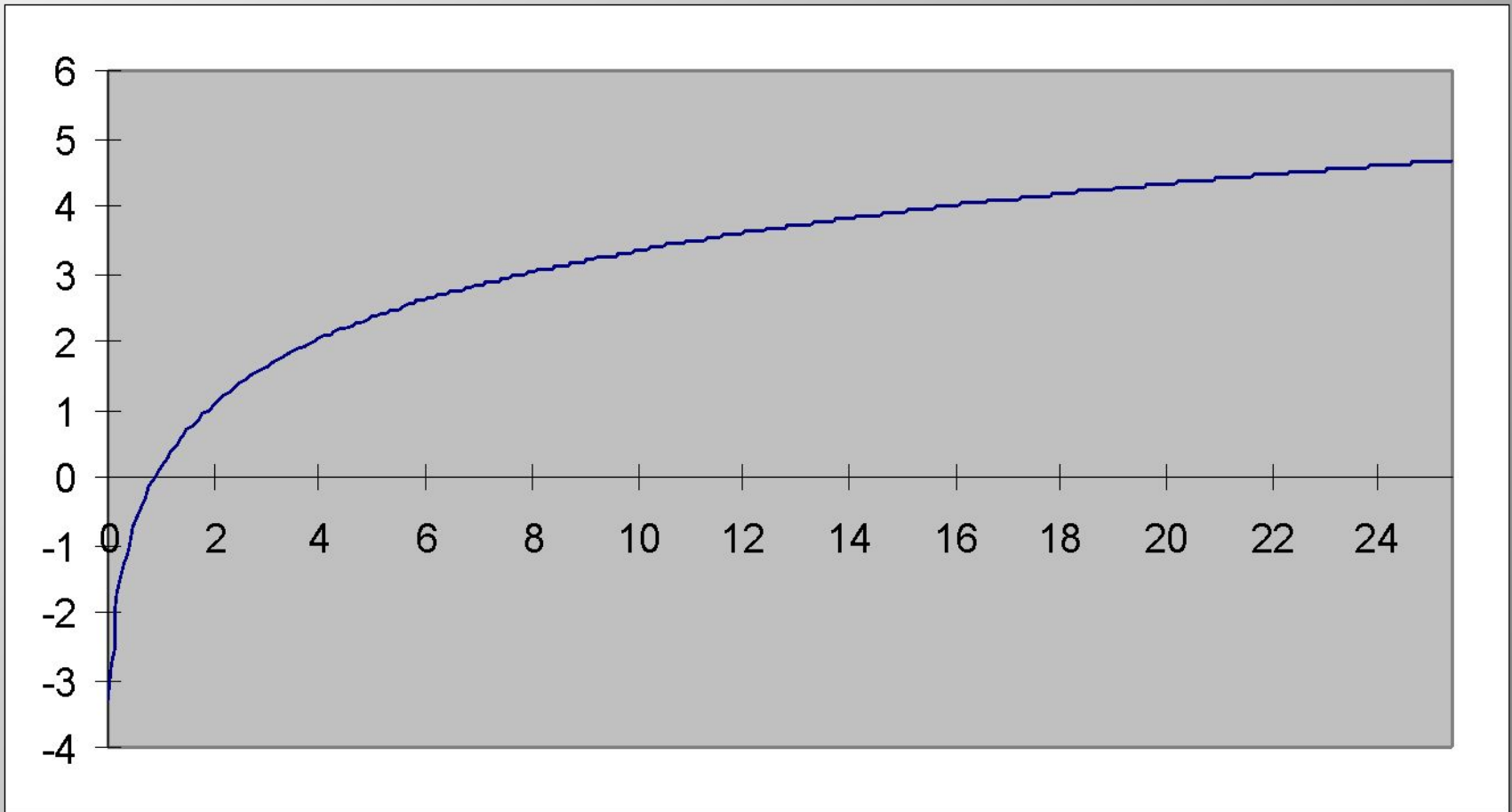
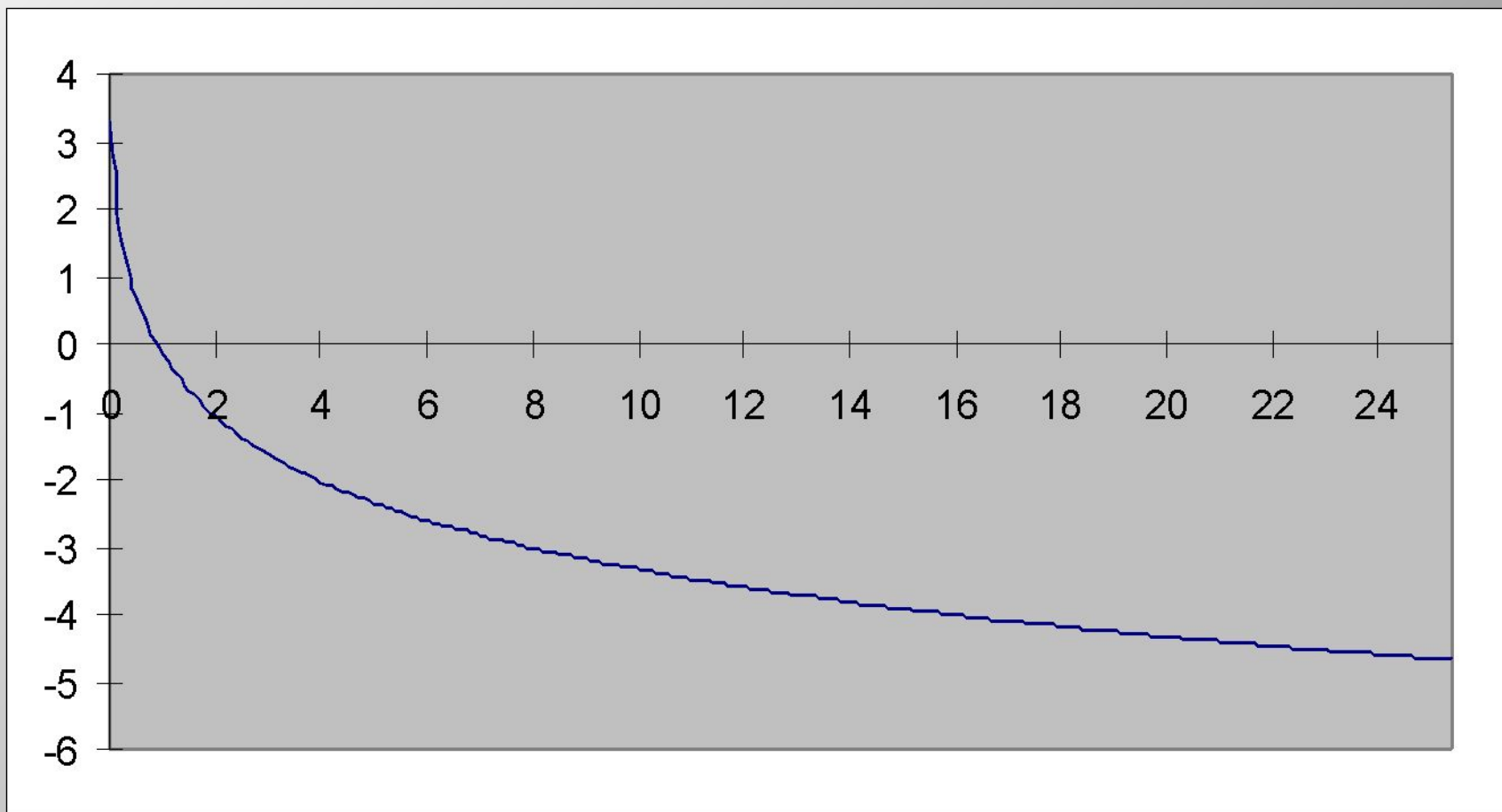


График функции $y = \log_a x$ $0 < a < 1$



Свойства $f(x)=\log_a x$

1. $D(f)=(0;+\infty)$;
2. Не является ни четной, ни нечетной;
3. При $a>1$ функция возрастающая, при $0<a<1$ функция убывающая;
4. Не ограничена;
5. Не имеет ни максимального, ни минимального значения;
6. Непрерывна;
7. $E(f)=(-\infty;+\infty)$;
8. Асимптота $x=0$;
9. Выпукла вверх при $a>1$, выпукла вниз при $0<a<1$

Стоит заметить, что график проходит через точки $(1;0)$ и $(a;1)$



Свойства логарифмов

1. Логарифм произведения.
2. Логарифм частного.
3. Логарифм степени.
4. Логарифм корня.
5. Переход от одного показателя к другому.
6. Свойства натуральных логарифмов.

1. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_x (ab) = \log_x a + \log_x b$$

2. Логарифм частного равен логарифмов делимого без логарифма делителя:

$$\log_x \left(\frac{a}{b} \right) = \log_x a - \log_x b$$



3. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log_x a^m = m \log_x a$$

4. Логарифм корня равен отношению логарифма подкоренного выражения и показателя корня:

$$\log_x \sqrt[m]{a} = \frac{\log_x a}{m}$$



5. Переход от одного основания к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$



Свойства натуральных логарифмов

Чтобы по известному десятичному логарифму числа x найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа x на десятичный логарифм числа e :

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0.43429} \approx 2.30259 \lg x$$

Чтобы по известному натуральному логарифму числа x найти его десятичный логарифм, нужно умножить натуральный логарифм числа x на десятичный логарифм числа e :

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x \approx 0.43429 \ln x$$

Число $\lg e = 0.43429$ называется модулем десятичных логарифмов и обозначается через M .



Решения логарифмических уравнений

$$\log_x 5 = 2$$

$$x^2 = 5$$

$$\underline{x = \sqrt{5}}, \text{ т.к. } \sqrt{5} > 0$$

$$\text{Ответ : } x = \sqrt{5}$$

$$\log_4 x = 0,5$$

$$x = 4^{0.5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\underline{x = 2}$$

$$\text{Ответ : } x = 2$$



Решить уравнение:

$$\frac{2^x(2^x - 4)}{1 - 2^x} = \frac{2^{x+1} - 5}{1 - 2^x}$$

Пусть $m = 2^x$, причем $m \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$$m(m - 4) = 2m - 5$$

$$m_1 = 1, \text{ но } m \neq 1 \quad \underline{m_2 = 5}$$

$$m^2 - 4m - 2m + 5 = 0$$

$$\text{Значит, } 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5$$

$$m^2 - 6m + 5 = 0$$

Ответ : $x = \log_2 5$.

$$a = 1, k = \frac{b}{2} = -3, c = 5$$

$$D_1 = k^2 - ac = 4$$

$$m_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = 3 \pm 2$$

Решение логарифмических неравенств

$$\log_{0.5} x > 0$$

$$\log_{0.5} x = 0$$

$$x = 1$$

$$\text{Ответ : } x \in (0;1)$$

$$2^x > 3$$

$$2^x > 2^{\log_2 3}$$

$$x > \log_2 3$$

$$\text{Ответ : } x \in (\log_2 3; +\infty).$$



Решите неравенство:

$$(10^x - 2)^2 \leq 3 \cdot 10^x - 2$$

Пусть $t = 10^x$, $t \in (0, +\infty)$

$$(t - 2)^2 \leq 3t - 2$$

$$t^2 - 4t + 4 - 3t + 2 \leq 0$$

$$t^2 - 7t + 6 \leq 0$$

$$(t - 1)(t - 6) \leq 0$$

$$1 \leq t \leq 6$$

$$1 \leq 10^x \leq 6$$

$$0 \leq x \leq \lg 6$$

Ответ : $x \in [0; \lg 6]$.



Над презентацией работали:

Киселев Михаил
Спасибо за внимание
Гаячков Максим

Кирилов Дмитрий